数理解析研究所講究録
第 299 巻 1977 年 27-54

動的計画が表現する数理計画問題について

九大 理　　岩本 誠一

§1. 動的計画の記述

有限段確定的動的計画は一般に次の 6 つの組で記述される [5, 8]:

$(\mathrm{Opt},\ \{S_n\}_{1\leq n\leq N+1},\ \{A_n\}_{1\leq n\leq N},\ \{g_n\}_{1\leq n\leq N},\ k,\ \{T_n\}_{1\leq n\leq N})$

ただし (i) N: 正整数, 段の数

(ii) S_n: p_n 次元ユークリッド空間 R^{p_n} の空でない部分集合, 第 n 状態空間

(iii) A_n: S_n から R^{q_n} の部分集合 A_n への点対集合値写像. すなわち $A_n: S_n \longrightarrow 2^{A_n}$. ただし $2^A = \{$集合 A の空でない部分集合$\}$ $(A_n \supset) A_n(s_n)$ を状態 $s_n \in S_n$ における可能なアクション空間, 集合 A_n を第 n アクション空間という。(注) A_n を集合と写像の両方に用いている。

(iv) g_n: $\mathrm{graph}(A_n) \times \mathrm{range}(g_{n+1}) \longrightarrow R^1$　　$1 \leq n \leq N-1$

$g_N : graph(A_N) \times range(k) \longrightarrow R'$

ここに　$graph(A_n) \equiv \{(s_n, a_n) \in S_n \times A_n \mid a_n \in A_n(s_n),\ s_n \in S_n\}$

$range(g_n) \equiv \{g_n(s_n, a_n; g_{n+1}) \mid (s_n, a_n, g_{n+1}) \in graph(A_n) \times range(g_{n+1})\} \quad 1 \leqq n \leqq N-1$

$range(g_N) \equiv \{g_N(s_N, a_N; k) \mid (s_N, a_N, k) \in graph(A_N) \times range(k)\}$

$g_n(g_N)$ を<u>第n(N)利得関数</u>という.

さらに $\{g_n\}_{1 \leqq n \leqq N}$ は次の単調非減少性の仮定を満している:

<u>単調非減少性の仮定</u>. 各 $g_n(s_n, a_n; \cdot)$ $((s_n, a_n) \in graph(A_n),\ 1 \leqq n \leqq N)$ が・に関して単調非減少である。

(v) $k : S_{N+1} \longrightarrow R'$, <u>終端利得関数</u>

(vi) $T_n : graph(A_n) \longrightarrow S_{n+1}$, <u>第$n$状態変換</u>

(vii) Opt は"Max"か"Min"のいづれか一方を指示する<u>最適子</u>で, 次の最適化問題を表現していることを意味する:

$$
(1.1)\quad \begin{aligned} &\text{Optimize}\quad g_1(s_1, a_1; g_2(s_2, a_2; \cdots g_N(s_N, a_N; k(s_{N+1}))\cdots)) \\ &\text{subject to (i)}\quad T_n(s_n, a_n) = s_{n+1} \quad 1 \leqq n \leqq N \\ &\qquad\qquad\ \text{(ii)}\quad a_n \in A_n(s_n) \quad 1 \leqq n \leqq N. \end{aligned}
$$

$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N\}$: 政策 $\underset{(def)}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_n : S_n \longrightarrow A_n$, $\pi_n(s_n) \in A_n(s_n)$ $s_n \in S_n$, $1 \leqq n \leqq N$.

$\Pi \equiv$ 政策 π の全体

$\Pi \ni \pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$: 最適

$\underset{(def)}{\Longleftrightarrow}$ 各初期状態 $s_1 \in S_1$ から始まる上述の N 段動的計画に対して，アクションの列 $\{\pi_1^*(s_1), \pi_2^*(s_2^*), \pi_3^*(s_3^*), \cdots \pi_N^*(s_N^*)\}$ が最適化問題 (1.1) の最適値に到達するとき．

ただし $s_2^* = T_1(s_1, \pi_1^*(s_1))$, $s_3^* = T_2(s_2^*, \pi_2^*(s_2^*))$, $\cdots$, $s_N^* = T_{N-1}(s_{N-1}^*, \pi_{N-1}^*(s_{N-1}^*))$

§2. 部分動的計画と再帰式

§1 で定義された N 段動的計画 (Opt, $\{S_n\}_{1 \leqq n \leqq N+1}$, $\{A_n\}_{1 \leqq n \leqq N}$, $\{g_n\}_{1 \leqq n \leqq N}$, k; $\{T_n\}_{1 \leqq n \leqq N}$) を $\mathcal{D}$ で表わす。このとき $n = 1, 2, \cdots, N, N+1$ に対して ($N-n+1$) 部分動的計画 $\mathcal{D}_{N-n+1}$ を $\mathcal{D}_{N-n+1} = (Opt$, $\{S_m\}_{n \leqq m \leqq N+1}$, $\{A_m\}_{n \leqq m \leqq N}$, $\{g_m\}_{n \leqq m \leqq N}$, k, $\{T_m\}_{n \leqq m \leqq N}$) で定義する。$\mathcal{D}_{N-n+1}$ は $s_n \in S_n$ を初期状態とする ($N-n+1$) 段動的計画である。これは最適化問題

$$\text{Optimize } g_n(s_n, a_n; g_{n+1}(s_{n+1}, a_{n+1}; \cdots g_N(s_N, a_N; k(s_{N+1})) \cdots))$$

(2.1) subject to (i) $T_m(s_m, a_m) = s_{m+1}$ $\quad n \leqq m \leqq N$

$$\text{(ii)}\quad a_m \in A_m(s_m) \qquad n \leqq m \leqq N$$

を表現している。(2.1)の最適値を$u^{N-n+1}(s_n)$で表し、関数u^{N-n+1} : $S_n \longrightarrow R^1$ を<u>第(N-n+1)最適利得関数</u>という。

特にN部分動的計画(すなわち $n=1$ のとき)は§1で与えたN段動的計画に一致する。言いかえれば $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}$. 従って原動的計画の最適値は$u^N(s_1)$で与えられる。他方, 0部分動的計画(すなわち $n=N+1$ のとき)は最適化要素を含んでいないから, $u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1})$ $\quad s_{N+1} \in S_{N+1}$ である。$\mathcal{D}_0$ を形式的に

$$\mathcal{D}_0 = (\,\mathrm{Opt},\ S_{N+1},\ \Lambda,\ \Lambda,\ k,\ \Lambda\,)$$

と書いておく。ただしΛは*empty mark*.

以下の議論においては関数の最適値, 従って最適点は常に存在するものとする。

(N-n+1)部分動的計画と(N-n)部分動的計画の最適値関数u^{N-n+1}, u^{N-n} の間には次の再帰式が成立する:

<u>定理 1</u>

$$(2.2)\qquad u^{N-n+1}(s_n) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a_n \in A_n(s_n)} g_n(s_n, a_n;\, u^{N-n}(T_n(s_n, a_n))) \qquad s_n \in S_n \quad 1 \leqq n \leqq N$$

$$(2.3)\qquad u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1})$$

（証明）$n=1$, $Opt=\mathrm{Max}$ のときを証明すれば，他の場合も同様だから，十分である。

任意の $s_1\in S_1$ を固定すると，列 $\{a_n^*\}_{1\leqq n\leqq N}$ が存在して

$$(2.4)\quad \begin{cases} u^N(s_1)=g_1(s_1,a_1^*;\ g_2(s_2^*,a_2^*;\ \cdots;\ g_N(s_N^*,a_N^*;\ k(s_{N+1}^*))\cdots)) \\ T_n(s_n^*,a_n^*)=s_{n+1}^* \qquad\qquad 1\leqq n\leqq N\ ,\quad s_1^*=s_1 \\ a_n^*\in A_n(s_n^*) \end{cases}$$

となる。この s_2^* に対しては，$u^{N-1}(s_2^*)$ の定義より

$$(2.5)\quad g_2(s_2^*,a_2^*;\ g_3(s_3^*,a_3^*;\ \cdots;\ g_N(s_N^*,a_N^*;\ k(s_{N+1}^*))\cdots)) \leqq u^{N-1}(s_2^*).$$

(2.4), (2.5), $g_1(s_1,a_1^*;\ \cdot)$ の単調非減少性より

$$u^N(s_1)=g_1(s_1,a_1^*;\ g_2(s_2^*,a_2^*;\ g_3(s_3^*,a_3^*;\ \cdots;\ g_N(s_N^*,a_N^*;\ k(s_{N+1}^*))\cdots)))$$

$$\leqq g_1(s_1,a_1^*;\ u^{N-1}(s_2^*)).$$

$T_1(s_1\ a_1^*)=s_2^*$ ，$a_1^*\in A_1(s_1)$ より

$$(2.6)\quad u^N(s_1)\leqq g_1(s_1,a_1^*;\ u^{N-1}(T_1(s_1,a_1^*)))$$

$$\leqq \mathop{\mathrm{Max}}_{a_1\in A_1(s_1)} g_1(s_1,a_1;\ u^{N-1}(T_1(s_1,a_1))).$$

次に $\hat{a}_1\in A_1(s_1)$ が存在して

$$(2.7)\quad \mathop{\mathrm{Max}}_{a_1\in A_1(s_1)} g_1(s_1,a_1;\ u^{N-1}(T_1(s_1,a_1)))=g_1(s_1,\hat{a}_1;\ u^{N-1}(T_1(s_1,\hat{a}_1)))$$

となる．$T_1(s_1,\hat{a}_1)=\hat{s}_2$ とすると，$\hat{s}_2$ を初期状態とする $\mathcal{Q}_{N-1}$ の最適なアクションの列 $\{\hat{a}_n\}_{2\leqq n\leqq N}$ が存在する。すなわち

$$\{\ u^{N-1}(\hat{s}_2)=g_2(\hat{s}_2,\hat{a}_2;\ g_3(\hat{s}_3,\hat{a}_3;\ \cdots;\ g_N(\hat{s}_N,\hat{a}_N;\ k(\hat{s}_{N+1}))\cdots))$$

$$(2.8)\quad \begin{cases} T_m(\hat{s}_m, \hat{a}_m) = \hat{s}_{m+1} \\ \hat{a}_m \in A_m(\hat{s}_m). \end{cases} \qquad 2 \leqq m \leqq N$$

このとき 列 $\{\hat{a}_n\}_{1\leqq n\leqq N}$ は s_1 を初期状態とする $\mathcal{Q}_N$ の可能なアクション列になる。すなわち

$$\begin{cases} T_n(\hat{s}_n, \hat{a}_n) = \hat{s}_{n+1} \\ \hat{a}_n \in A_n(\hat{s}_n) \end{cases} \qquad 1 \leqq n \leqq N, \quad s_1 = \hat{s}_1.$$

よって (2.8), $u^N(s_1)$ の定義より

$$(2.9)\quad g_1(s_1, \hat{a}_1 ; u^{N-1}(T_1(s_1, \hat{a}_1)))$$
$$= g_1(s_1, \hat{a}_1 ; g_2(\hat{s}_2, \hat{a}_2 ; g_3(\hat{s}_3, \hat{a}_3 ; \cdots ; g_N(\hat{s}_N, \hat{a}_N ; k(\hat{s}_{N+1}))\cdots)))$$
$$\leqq u^N(s_1).$$

ゆえに (2.7), (2.9) より

$$(2.10)\quad \operatorname*{Max}_{a_1 \in A_1(s_1)} g_1(s_1, a_1 ; u^{N-1}(T_1(s_1, a_1))) \leqq u^N(s_1).$$

(2.6), (2.10), $s_1 \in S_1$ が任意より

$$u^N(s_1) = \operatorname*{Max}_{a_1 \in A_1(s_1)} g_1(s_1, a_1 ; u^{N-1}(T_1(s_1, a_1))) \quad s_1 \in S_1 \quad /\!/$$

<u>定理 2</u>　(2.2) の Opt に到達する a_n を $\hat{\pi}_n(s_n)$ とすれば，政策 $\hat{\pi} = \{\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \cdots, \hat{\pi}_N\}$ は原動的計画 $\mathcal{Q}$ の最適政策である。一般に $\{\hat{\pi}_n, \hat{\pi}_{n+1}, \cdots, \hat{\pi}_N\}$ は部分動的計画 $\mathcal{Q}_{N-n+1}$ の最適政策である ($1 \leqq n \leqq N$).

(証明)　$u^0 = k$ より，$\{\hat{\pi}_N\}$ が $\mathcal{Q}_N$ の最適政策であることは自明。まず，$n = N$ のとき

$$(2.11)\quad u^1(s_N) = \underset{a_N \in A_N(s_N)}{Opt}\ g_N(s_N, a_N\ ;\ u^0(T_N(s_N, a_N)))$$
$$= g_N(s_N, \hat{\pi}_N(s_N)\ ;\ h(\hat{s}_{N+1}))\qquad s_N \in S_N$$
$$\text{ただし}\quad \hat{s}_{N+1} = T_N(s_N, \hat{\pi}_N(s_N)).$$

次に $n=N-1$ のとき

$$(2.12)\quad u^2(s_{N-1}) = \underset{a_{N-1} \in A_{N-1}(s_{N-1})}{Opt}\ g_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}\ ;\ u^1(T_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1})))$$
$$= g_{N-1}(s_{N-1}, \hat{\pi}_{N-1}(s_{N-1})\ ;\ u^1(\hat{s}_N))$$
$$\text{ただし}\quad \hat{s}_N = T_{N-1}(s_{N-1}, \hat{\pi}_{N-1}(s_{N-1})).$$

よって (2.11), (2.12) より

$$u^2(s_{N-1}) = g_{N-1}(s_{N-1}, \hat{\pi}_{N-1}(s_{N-1})\ ;\ g_N(\hat{s}_N, \hat{\pi}_N(\hat{s}_N)\ ;\ h(\hat{s}_{N+1}))).$$
$$\text{ただし}\quad \hat{s}_N = T_{N-1}(s_{N-1}, \hat{\pi}_{N-1}(s_{N-1})),$$
$$\hat{s}_{N+1} = T_N(\hat{s}_N, \hat{\pi}_N(\hat{s}_N)).$$

しかも $\{\hat{\pi}_{N-1}(s_{N-1}), \hat{\pi}_N(\hat{s}_N)\}$ は s_{N-1} を初期状態とする $\mathcal{Q}_{N-1}$ の可能なアクション列である．ゆえに 策政 $\{\hat{\pi}_{N-1}, \hat{\pi}_N\}$ は $\mathcal{Q}_{N-1}$ の最適政策である．以下 逐次議論していくと $\hat{\pi} = \{\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \cdots, \hat{\pi}_N\}$ は $\mathcal{Q}_1 (= \mathcal{Q})$ の最適政策になる。//

<u>定理 3</u>　$\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$ が原動的計画 $\mathcal{Q}$ の最適政策ならば，各 n $(2 \leqq n \leqq N)$ と $s_1\ (\in S_1)$ に対して

$$u^N(s_1) = g_1(s_1, \pi_1^*(s_1)\ ;\ g_2(s_2^*, \pi_2^*(s_2)\ ;\ \cdots\ ;\ g_n(s_n^*, \pi_n^*(s_n^*)\ ;$$
$$g_{n+1}(s_{n+1}^*, \pi_{n+1}^*(s_{n+1}^*)\ ;\ \cdots\ g_N(s_N^*, \pi_N^*(s_N^*)\ ;\ h(s_{N+1}^*))\cdots))\cdots))$$
$$= g_1(s_1, \pi_1^*(s_1)\ ;\ g_2(s_2^*, \pi_2^*(s_2^*)\ ;\ \cdots\ ;\ g_{n-1}(s_{n-1}^*, \pi_{n-1}^*(s_{n-1}^*)\ ;$$

$u^{N-n+1}(s_n^*))\cdots))$

である。ただし　$T_n(s_n^*, \pi_n^*(s_n^*)) = s_{n+1}^*$　$1 \leqq n \leqq N$, $s_1 = s_1^*$

（証明）　$n=2$, $Opt = Max$ として証明すれば十分である。上半式は自明である。下半式を示す。各 $s_1 \in S_1$ に対して $T_1(s_1, \pi_1^*(s_1)) = s_2^*$ とする。s_2^*から始まる $\mathcal{Q}_{N-1}$ の最適なアクション列を $\{\hat{a}_n\}_{2\leqq n\leqq N}$ とすると

$$u^{N-1}(s_2^*) = g_2(s_2^*, \hat{a}_2; g_3(\hat{s}_3, \hat{a}_3; \cdots; g_N(\hat{s}_N, \hat{a}_N; k(\hat{s}_{N+1}))\cdots))$$

ただし　$T_m(\hat{s}_m, \hat{a}_m) = \hat{s}_{m+1}$, $\hat{a}_m \in A_m(\hat{s}_m)$　$2 \leqq m \leqq N$, $\hat{s}_2 = s_2^*$.

よって

$$\begin{aligned} & g_2(s_2^*, \pi_2^*(s_2^*); g_3(s_3^*, \pi_3^*(s_3^*); \cdots; g_N(s_N^*, a_N^*; k(s_{N+1}^*))\cdots)) \\ \leqq\ & g_2(s_2^*, \hat{a}_2; g_3(\hat{s}_3, \hat{a}_3; \cdots; g_N(\hat{s}_N, \hat{a}_N; k(\hat{s}_{N+1}))\cdots)) \\ =\ & u^{N-1}(s_2^*). \end{aligned}$$

$g_1(s_1, \pi_1^*(s_1): \cdot)$ の非減少性と上半式より

$$\begin{aligned} (2.13)\quad u^N(s_1) &= g_1(s_1, \pi_1^*(s_1); g_2(s_2^*, \pi_2^*(s_2^*); \cdots; g_N(s_N^*, \pi_N^*(s_N^*); \\ &\qquad k(s_{N+1}^*))\cdots)) \\ &\leqq g_1(s_1, \pi_1^*(s_1); g_2(s_2^*, \hat{a}_2; \cdots; g_N(\hat{s}_N, \hat{a}_N; k(\hat{s}_{N+1}))\cdots)) \\ &= g_1(s_1, \pi_1^*(s_1); u^{N-1}(s_2^*)). \end{aligned}$$

しかも　アクション列 $\{\pi_1^*(s_1), \hat{a}_2, \hat{a}_3, \cdots, \hat{a}_N\}$ は s_1 から始まる $\mathcal{Q}$ の可能なアクション列であるから

$$(2.14)\quad g_1(s_1, \pi_1^*(s_1); g_2(s_2^*, \hat{a}_2; \cdots; g_N(\hat{s}_N, \hat{a}_N; k(\hat{s}_{N+1}))\cdots)) \leqq u^N(s_1).$$

よって (2.13), (2.14) より

$$u^N(s_1) = g_1(s_1, \pi_1^*(s_1); u^{N-1}(s_2^*))\quad \text{ただし}\ s_2^* = T_1(s_1, \pi_1^*(s_1))!!$$

定理 1, 2, 3 は利得系の再帰性と単調非減少性の下で成立していた。定理 3 は最適性の弱原理 [5] と言うべきものである。いわゆる最適性の原理 [1] は，単調非減少性の仮定を狭義増加性の仮定に強めたとき，成立する：

狭義増加性の仮定　各 $g_n(s_n, a_n; \cdot)$ $((s_n, a_n) \in graph(A_n)$ $1 \leqq n \leqq N)$ が・に関して狭義増加である。

定理 4　狭義増加性の仮定を設ける。$\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$ が原動的計画 $\mathcal{Q}$ の最適政策ならば，各 n $(1 \leqq n \leqq N)$ に対して部分政策 $\{\pi_n^*, \pi_{n+1}^*, \cdots, \pi_N^*\}$ は $(N-n+1)$ 部分動的計画 $\mathcal{Q}_{N-n+1}$ の最適政策である。

（証明）定理 3 において・の関数 $g_1(s_1, \pi_1^*(s_1); g_2(s_2^*, \pi_2^*(s_2^*); \cdots; g_{n-1}(s_{n-1}^*, \pi_{n-1}^*(s_{n-1}^*)); \cdot) \cdots))$ が狭義増加であることより，

$$u^{N-n+1}(s_n^*) = g_n(s_n^*, \pi_n^*(s_n^*); g_{n+1}(s_{n+1}^*, \pi_{n+1}^*(s_{n+1}^*); \cdots; g_N(s_N^*, \pi_N^*(s_N^*); k(s_{N+1}^*)) \cdots)) \qquad 2 \leqq n \leqq N$$

ゆえに $\{\pi_n^*, \pi_{n+1}^*, \cdots, \pi_N^*\}$ は s_n^* から始まる $\mathcal{Q}_{N-n+1}$ の最適政策である。ここに s_n^* は s_1 から始めて政策 $\{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_{n-1}^*\}$ に従った第 n 状態である。//

§3.　標準的な数理計画問題の表現

実数 $d<e$ に対して $\langle d, e \rangle$ を d, e を端点とする任意の区

間とする．直積 $E=\langle d_1, e_1\rangle\times\langle d_2, e_2\rangle\times\cdots\times\langle d_N, e_N\rangle$ を R^N の区間として与えておく [9]：

連続関数 $f: E\longrightarrow R^1$ が <u>E上の再帰型関数</u>

$\underset{(def)}{\Longleftrightarrow}$ $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)=f_1(x_1; f_2(x_2; \cdots; f_{N-1}(x_{N-1}; f_N(x_N))\cdots))$

と書けて，$f_n: \langle d_n, e_n\rangle\times range(f_{n+1})\longrightarrow R^1$ 連続 $1\leqq n\leqq N-1$

$f_N: \langle d_N, e_N\rangle\longrightarrow R^1$ 連続．

となる．ただし $range(f_N)\equiv\{f_N(x_N)\mid x_N\in\langle d_N, e_N\rangle\}$

$range(f_n)\equiv\{f_N(x_n; y)\mid(x_n, y)\in\langle d_n, e_n\rangle\times range(f_{n+1})\}$ $1\leqq n\leqq N-1$

再帰型関数 $f: E\longrightarrow R^1$ が <u>E上で非減少性をもつ再帰型関数</u>

$\underset{(def)}{\Longleftrightarrow}$ 各 $f_n(x_n; \cdot)$ $(x_n\in\langle d_n, e_n\rangle$ $1\leqq n\leqq N-1)$ が・に関して非減少で，$f_N(\cdot)$ が狭義増加．

更に，各 $f_n(x_n; \cdot)$ が狭義増加のとき，<u>E上で狭義増加性をもつ再帰型関数</u>という。

$\langle d_1, e_1\rangle\times\langle d_2, e_2\rangle$ 上で非減少性をもつ再帰型関数 $f: \langle d_1, e_1\rangle\times\langle d_2, e_2\rangle\longrightarrow R^1$ が <u>最大(小)型関数</u>

$\underset{(def)}{\Longleftrightarrow}$ $f(x, y)=f_1(x; f_2(y))=max(g_1(x), g_2(y))$ $(=min(g_1(x), g_2(y)))$ と書けて，$g_i: \langle d_i, e_i\rangle\longrightarrow R^1$ 狭義単調となる．

2変数関数 $f: X\times Y\longrightarrow Z$ に対して1変数関数 $f^x: Y\longrightarrow$

Z, $f_y : X \longrightarrow Z$ を

$$f^x(y) \equiv f(x,y),\quad f_y(x) \equiv f(x,y) \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

で定義しておく.

N, $E = \langle d_1, e_1 \rangle \times \langle d_2, e_2 \rangle \times \cdots \times \langle d_N, e_N \rangle$ を与えておく. f, g_i $(1 \leqq i \leqq p)$, g, f_j $(1 \leqq j \leqq q)$: $E \longrightarrow R'$ はすべてE上で狭義増加性をもつ再帰型関数とする. このとき次の数理計画問題 I, II を考える[9] :

問題 I　Maximize $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$

subject to (1) $g_1(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c_1$ $(\in \mathit{range}(g_1))$

(2) $g_2(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c_2$ $(\in \mathit{range}(g_2))$

$\vdots$

(p) $g_p(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c_p$ $(\in \mathit{range}(g_p))$

(p+1) $x_n \in \langle d_n, e_n \rangle$ $1 \leqq n \leqq N$

問題 II　Minimize $g(y_1, y_2, \cdots, y_N)$

subject to (1) $f_1(y_1, y_2, \cdots, y_N) \geqq d_1$ $(\in \mathit{range}(f_1))$

(2) $f_2(y_1, y_2, \cdots, y_N) \geqq d_2$ $(\in \mathit{range}(f_2))$

$\vdots$

(q) $f_q(y_1, y_2, \cdots, y_N) \geqq d_q$ $(\in \mathit{range}(f_q))$

(q+1) $y_n \in \langle d_n, e_n \rangle$ $1 \leqq n \leqq N$

f, g_i, g, f_j に対する上記の仮定より

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = f_1(x_1; f_2(x_2; \cdots; f_{N-1}(x_{N-1}; f_N(x_N))\cdots))$$

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_N) = g_{i1}(x_1; g_{i2}(x_2; \cdots; g_{i,N-1}(x_{N-1}; g_{iN}(x_N))\cdots))$$

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_N) = g_1(y_1; g_2(y_2; \cdots; g_{N-1}(y_{N-1}; g_N(y_N))\cdots))$$

$$f_j(y_1, y_2, \cdots, y_N) = f_{j1}(y_1; f_{j2}(y_2; \cdots; f_{j,N-1}(y_{N-1}; f_{jN}(y_N))\cdots))$$

と書けて $f_n^{x_n}, g_{in}^{x_n}, g_n^{y_n}, f_{jn}^{y_n}$ は連続狭義増加関数である。

<u>定理 5</u>　問題I, IIはそれぞれN段動的計画 $\mathcal{D}^{I} = (\mathrm{Max}, \{S_n\}_{1\leqq n\leqq N+1}, \{A_n\}_{1\leqq n\leqq N}, \{g_n\}_{1\leqq n\leqq N}, k, \{T_n\}_{1\leqq n\leqq N})$, $\mathcal{D}^{II} = (\mathrm{Min}, \{S'_n\}_{1\leqq n\leqq N+1}, \{A'_n\}_{1\leqq n\leqq N}, \{g'_n\}_{1\leqq n\leqq N}, k', \{T'_n\}_{1\leqq n\leqq N})$ で表現できる。ただし

$$s = (c_1, c_2, \cdots, c_p) \quad , \quad a = x$$

$$S_n = \mathrm{range}(g_{1n}) \times \mathrm{range}(g_{2n}) \times \cdots \times \mathrm{range}(g_{pn}) \ , \ A_n = \langle d_n, e_n \rangle$$

$$A_n(\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_n}) = \{x \in \langle d_n, e_n \rangle \mid (g_{in}^{x})^{-1}(c_i) \in \mathrm{range}(g_{i,n+1}) \ 1\leqq i\leqq p\}$$

$$1\leqq n\leqq N-1,$$

$$A_N(\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_N}) = \{x \in \langle d_N, e_N \rangle \mid g_{iN}(x) \leqq c_i \quad 1\leqq i\leqq p\}$$

$$T_n((\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_n}), \underbrace{x}_{a_n}) = ((g_{1n}^{x})^{-1}(c_1), \ (g_{2n}^{x})^{-1}(c_2), \cdots, (g_{pn}^{x})^{-1}(c_p))$$

$$1\leqq n\leqq N-1$$

$T_N((\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_N}), \underbrace{x}_{a_N}) = S_{N+1}$ の任意の元（ただし S_{N+1} は任意の集合）

$$g_n((\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_n}), \underbrace{x}_{a_n} ; g_{n+1}) = f_n(x ; g_{n+1}) \qquad 1 \leqq n \leqq N-1$$

$$g_N((\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_N}), \underbrace{x}_{a_N} ; h) = f_N(x)$$

$h(s_{N+1}) = 0$ （実は任意でよい）

$s = (d_1, d_2, \cdots, d_q)$,　　$a = y$

$S'_n = range(f_{1n}) \times range(f_{2n}) \times \cdots \times range(f_{qn})$,　$A'_n = \langle d_n, e_n \rangle$

$$A'_n(d_1, d_2, \cdots, d_N) = \{ y \in \langle d_n, e_n \rangle \mid (f^y_{jn})^{-1}(d_j) \in range(f_{j,n+1}) \quad 1 \leqq j \leqq q \} \qquad 1 \leqq n \leqq N-1 ,$$

$$A'_N(d_1, d_2, \cdots, d_N) = \{ y \in \langle d_N, e_N \rangle \mid f_{jN}(y) \geqq d_j \quad 1 \leqq j \leqq q \}$$

$$T'_n((d_1, d_2, \cdots, d_N), y) = ((f^y_{1n})^{-1}(d_1), (f^y_{2n})^{-1}(d_2), \cdots, (f^y_{qn})^{-1}(d_q)) \qquad 1 \leqq n \leqq N-1$$

$T'_N((d_1, d_2, \cdots, d_N), y) = S'_{N+1}$ の任意の元（ただし S'_{N+1} は任意の集合）

$$g'_n((d_1, d_2, \cdots, d_N), y ; g'_{n+1}) = g_n(y ; g'_{n+1}) \qquad 1 \leqq n \leqq N-1$$

$$g'_N((d_1, d_2, \cdots, d_N), y ; h) = g_N(y)$$

$h'(d_1, d_2, \cdots, d_N) = 0$　　（実は任意でよい）

<u>Remark</u>　問題Ⅰ, Ⅱはそれぞれ(N-1)段動的計画で表現できる：ただし h, h' 以外は上述の通りであるが, h, h' は

$$k(\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_p}_{s_N}) = f_N(\min_{1 \leqq i \leqq p}(g_{iN})^{-1}(c_i))$$

$$k'(\underbrace{d_1, d_2, \cdots, d_q}_{s_N}) = g_N(\max_{1 \leqq j \leqq q}(f_{jN})^{-1}(d_j))$$

とする。

$\mathcal{D}^{\mathrm{I}}$, $\mathcal{D}^{\mathrm{II}}$ の $(N-n+1)$ 部分動的計画 $\mathcal{D}^{\mathrm{I}}_{N-n+1}$, $\mathcal{D}^{\mathrm{II}}_{N-n+1}$ はそれぞれ次の最大値問題，最小値問題を表現している：

<u>部分問題 I $(N-n+1)$</u>

$$\mathrm{Max}\ f_n(x_n; f_{n+1}(x_{n+1}; \cdots; f_{N-1}(x_{N-1}; f_N(x_N))\cdots))$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad &(1)\quad g_{1n}(x_n; g_{1,n+1}(x_{n+1}; \cdots; g_{1,N-1}(x_{N-1}; g_{1N}(x_N))\cdots)) \leqq c_1 \\
&(2)\quad g_{2n}(x_n; g_{2,n+1}(x_{n+1}; \cdots; g_{2,N-1}(x_{N-1}; g_{2N}(x_N))\cdots)) \leqq c_2 \\
&\quad\vdots \\
&(p)\quad g_{pn}(x_n; g_{p,n+1}(x_{n+1}; \cdots; g_{p,N-1}(x_{N-1}; g_{pN}(x_N))\cdots)) \leqq c_p \\
&(p+1)\quad x_m \in \langle d_m, e_m \rangle \qquad n \leqq m \leqq N
\end{aligned}$$

<u>部分問題 II $(N-n+1)$</u>

$$\mathrm{Min}\ g_n(y_n; g_{n+1}(y_{n+1}; \cdots; g_{N-1}(y_{N-1}; g_N(y_N))\cdots))$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad &(1)\quad f_{1n}(y_n; f_{1,n+1}(y_{n+1}; \cdots; f_{1,N-1}(y_{N-1}; f_{1,N}(y_N))\cdots)) \geqq d_1 \\
&(2)\quad f_{2n}(y_n; f_{2,n+1}(y_{n+1}; \cdots; f_{2,N-1}(y_{N-1}; f_{2,N}(y_N))\cdots)) \geqq d_2 \\
&\quad\vdots \\
&(q)\quad f_{qn}(y_n; f_{q,n+1}(y_{n+1}; \cdots; f_{q,N-1}(y_{N-1}; f_{q,N}(y_N))\cdots)) \geqq d_q \\
&(q+1)\quad y_m \in \langle d_m, e_m \rangle \qquad n \leqq m \leqq N.
\end{aligned}$$

$u^{N-n+1}: S_n \longrightarrow R'$, $v^{N-n+1}: S_n' \longrightarrow R'$ をそれぞれ $\mathcal{Q}^{\mathrm{I}}$, $\mathcal{Q}^{\mathrm{II}}$ に対する第 $(N-n+1)$ 最適利得関数とすれば, $u^{N-n+1}(c_1, c_2, \cdots, c_p)$, $v^{N-n+1}(d_1, d_2, \cdots, d_q)$ はそれぞれ部分問題 $\mathrm{I}(N-n+1)$, $\mathrm{II}(N-n+1)$ の最大値, 最小値を表している。定理1より次の系が得られる:

<u>系</u> (i) $u^0(c_1, c_2, \cdots, c_p) = 0$

$$u^1(c_1, c_2, \cdots, c_p) = f_N(\min_{1 \leqq i \leqq p} (g_{iN})^{-1}(c_i))$$

$$u^{N-n+1}(c_1, c_2, \cdots, c_p) = \underset{\substack{x_n \in \langle d_n, e_n \rangle \\ (g_{in}^{x_n})^{-1}(c_i) \in range(g_{i,n+1}) \\ 1 \leqq i \leqq p}}{\mathrm{Max}} f_n(x_n ; u^{N-n}((g_{1n}^{x_n})^{-1}(c_1), (g_{2n}^{x_n})^{-1}(c_2), \cdots, (g_{pn}^{x_n})^{-1}(c_p)))$$

$$1 \leqq n \leqq N-1$$

(ii) $v^0(d_1, d_2, \cdots, d_q) = 0$

$$v^1(d_1, d_2, \cdots, d_q) = g_N(\max_{1 \leqq j \leqq q} (f_{jN})^{-1}(d_j))$$

$$v^{N-n+1}(d_1, d_2, \cdots, d_q) = \underset{\substack{y_n \in \langle d_n, e_n \rangle \\ (f_{jn}^{y_n})^{-1}(d_j) \in range(f_{j,n+1}) \\ 1 \leqq j \leqq q}}{\mathrm{Min}} g_n(y_n ; v^{N-n}((f_{1n}^{y_n})^{-1}(d_1), (f_{2n})^{-1}(d_2), \cdots, (f_{qn}^{y_n})^{-1}(d_q)))$$

$$1 \leqq n \leqq N-1$$

一般に, $\mathcal{Q}^{\mathrm{I}}$ の最適利得関数 $\{u^0, u^1, \cdots, u^N\}$ と最適政策 $\{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$, $\mathcal{Q}^{\mathrm{II}}$ の最適利得関数 $\{v^0, v^1, \cdots, v^N\}$ と最適政策 $\{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_N\}$ を解析的に(すなわち $(c_1, c_2, \cdots, c_p)$, $(d_1, d_2, \cdots, d_q)$ の関数として)求めることは困難である。しかし, 求まれば, 問題Iの最大値は $u^N(c_1, c_2, \cdots, c_p)$ で与えられ, それを与える点(最大点) $(x_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_p), x_2^*(c_1, c_2, \cdots, c_p), \cdots, x_N^*(c_1, c_2, \cdots, c_p))$ は再帰的に

$$x_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_p) = \pi_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_p)$$

$$x_2^*(c_1, c_2, \cdots, c_p) = \pi_2^*(T_1((c_1, c_2, \cdots, c_p),\ x_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_p)))$$

$$\vdots$$

$$x_N^*(c_1, c_2, \cdots, c_p) = \pi_N^*(T_{N-1} \cdots T_2(T_1((c_1, c_2, \cdots, c_p),\ x_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_p)),$$
$$x_2^*(c_1, c_2, \cdots, c_p)),\ \cdots\ x_{N-1}^*(c_1, c_2, \cdots, c_p))$$

で与えられる．同様に，問題Ⅱの最小値は $v^N(d_1, d_2, \cdots, d_q)$ で与えられ，その最小点 $(\hat{y}_1(d_1, d_2, \cdots, d_q), \hat{y}_2(d_1, d_2, \cdots, d_q), \cdots, \hat{y}_N(d_1, d_2, \cdots, d_q))$ も再帰的に

$$\hat{y}_1(d_1, d_2, \cdots, d_q) = \hat{\sigma}_1(d_1, d_2, \cdots, d_q)$$

$$\hat{y}_2(d_1, d_2, \cdots, d_q) = \hat{\sigma}_2(T_1'((d_1, d_2, \cdots, d_q),\ \hat{y}_1(d_1, d_2, \cdots, d_q)))$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}_N(d_1, d_2, \cdots, d_q) = \hat{\sigma}_N(T_{N-1}' \cdots T_2'(T_1'((d_1, d_2, \cdots, d_q),\ \hat{y}_1(d_1, d_2, \cdots, d_q)),$$
$$\hat{y}_2(d_1, d_2, \cdots, d_q)),\ \cdots\ \hat{y}_{N-1}(d_1, d_2, \cdots, d_q))$$

で与えられる。これがいわゆる動的計画法に基づく解法である。

次の例題 1, 2 は問題 I, Ⅱ の特別な場合である [9]：

<u>例題 1</u>　$\mathrm{Max}\ b_1 x_1^{p_1} + b_2 x_2^{p_2} + \cdots + b_n x_n^{p_n}$

$$\text{s.t.}\ (1)\ a_{11} x_1^{q_{11}} + a_{12} x_2^{q_{12}} + \cdots + a_{1n} x_n^{q_{1n}} \leqq c_1 \quad (\geqq 0)$$

$$(2)\ a_{21} x_1^{q_{21}} + a_{22} x_2^{q_{22}} + \cdots + a_{2n} x_n^{q_{2n}} \leqq c_2 \quad (\geqq 0)$$

$$\vdots$$

$$(m)\ a_{m1} x_1^{q_{m1}} + a_{m2} x_2^{q_{m2}} + \cdots + a_{mn} x_n^{q_{mn}} \leqq c_m \quad (\geqq 0)$$

$(m+1)\quad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqq 0$

例題２　$\mathrm{Min}\ c_1 y_1^{q_1} + c_2 y_2^{q_2} + \cdots + c_m y_m^{q_m}$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ (1)'\ & d_{11} y_1^{p_{11}} + d_{12} y_2^{p_{12}} + \cdots + d_{1m} y_m^{p_{1m}} \geqq b_1\ (\geqq 0) \\
(2)'\ & d_{21} y_1^{p_{21}} + d_{22} y_2^{p_{22}} + \cdots + d_{2m} y_m^{p_{2m}} \geqq b_2\ (\geqq 0) \\
& \vdots \\
(n)'\ & d_{n1} y_1^{p_{n1}} + d_{n2} y_2^{p_{n2}} + \cdots + d_{nm} y_m^{p_{nm}} \geqq b_n\ (\geqq 0) \\
(n+1)'\ & y_1, y_2, \cdots, y_m \geqq 0
\end{aligned}$$

ただし　$P_j, b_j, q_{ij}, a_{ij} > 0$，$q_i, c_i, P_{ji}, d_{ji} > 0$　$1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n$.

勿論，例題１，２に対しても動的計画に基づいて解くことができる。特に　$P_i = q_j = q_{ij} = P_{ji} = 1$　$1 \leqq i \leqq m$　$1 \leqq j \leqq n$ のとき，例題１，２は線形計画問題に帰着する．更に　$a_{ij} = d_{ji}$　$1 \leqq i \leqq m$，$1 \leqq j \leqq n$ ならば，例題１，２は線形計画問題として互いに双対問題になっている。双対定理によれば

$$u^n(c_1, c_2, \cdots, c_m) = v^m(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

が成立する。

例題３（[7, 9]）　$\mathrm{Max}\quad x + y$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ (1)\ & x + y^2 \leqq c_1\ (\geqq 0) \\
(2)\ & 2x + y \leqq c_2\ (\geqq 0) \\
(3)\ & x \geqq 0,\ y \geqq 0
\end{aligned}$$

これは例題１の特別な場合で，２段動的計画で表現され　その最適利得関数 $\{u^0, u^1, u^2\}$ と最適政策 $\{\pi_1^*, \pi_2^*\}$ は次の様

44

になる：

$$u^0(c_1, c_2) = 0$$

$$u^1(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} \wedge c_2 \quad (a \wedge b \equiv \min(a, b),\ a \vee b \equiv \max(a, b))$$

$$\pi_2^*(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} \wedge c_2$$

$$u^2(c_1, c_2) = \begin{cases} c_2 \\ \dfrac{4c_2+1+\sqrt{-8c_2+1+16c_1}}{8} \\ c_1 + \dfrac{1}{4} \\ \sqrt{c_1} \end{cases} \qquad \pi_1^*(c_1, c_2) = \begin{cases} 0 & \text{①}\ \sqrt{c_1} > c_2\ \text{のとき} \\ \dfrac{4c_2-1-\sqrt{-8c_2+1+16c_1}}{8} & \text{②}\ \sqrt{c_1} \leqq c_2,\ \dfrac{c_2}{2} \leqq c_1\ \text{のとき} \\ c_1 - \dfrac{1}{4} & \text{③}\ \sqrt{c_1} \leqq c_2,\ \dfrac{c_2}{2} > c_1 \geqq \dfrac{1}{4}\ \text{のとき} \\ 0 & \text{④}\ \sqrt{c} \leqq c_2,\ c_1 < \dfrac{1}{4}\ \text{のとき} \end{cases}$$

従って，例題3は次の最適解をもつ：

$$\left.\begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{matrix}\right\}\text{ならば，}(x^*(c_1, c_2), y^*(c_1, c_2)) = \begin{cases} (0, c_2) \\ \left(\dfrac{4c_2-1-\sqrt{-8c_2+1+16c_1}}{8}, \dfrac{1+\sqrt{-8c_2+1+16c_1}}{4}\right) \\ \left(c_1 - \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \\ (0, \sqrt{c_1}) \end{cases} \text{のとき}$$

$$\text{最大値}\ u^2(c_1, c_2) = \begin{cases} c_2 \\ \dfrac{4c_2+1-\sqrt{-8c_2+1+16c_1}}{8} \\ c_1 + \dfrac{1}{4} \\ \sqrt{c_1} \end{cases} \quad \text{をもつ} \;//$$

<u>例題4（[7]）</u>　Min $3x_1 + x_2$

s.t. (1)′ $x_1 + 6x_2 \geqq b_1\ (\geqq 0)$

(2)′ $7x_1 + 2x_2 \geqq b_2\ (\geqq 0)$

(3) $x_1, x_2 \geqq 0$

これは例題2の特別な場合であり，しかも典型的な線形計画問題である。従って，シンプレックス法でも解ける。しかし，次のように動的計画に基づいて解くことができる：

$$v^0(b_1,b_2)=0$$

$$v^1(b_1,b_2)=\frac{b_1}{6}\vee\frac{b_2}{2},\quad \hat{\sigma}_2(b_1,b_2)=\frac{b_1}{6}\vee\frac{b_2}{2}$$

$$v^2(b_1,b_2)=\begin{cases}-\frac{1}{2}b_1+b_2 \\ \frac{b_1+17b_2}{40} \\ \frac{b_1}{6}\end{cases},\quad \hat{\sigma}_1(b_1,b_2)=\begin{cases}b_1 & \text{①}\ b_2\geqq 7b_1\ \text{のとき} \\ \frac{3b_2-b_1}{20} & \text{②}\ \frac{1}{3}b_1\leqq b_2<7b_1\ \text{のとき} \\ 0 & \text{③}\ \frac{1}{3}b_1>b_2\ \text{のとき}\end{cases}$$

よって

$$\left.\begin{matrix}\text{①}\\ \text{②}\\ \text{③}\end{matrix}\right\}\ \text{ならば，}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\begin{cases}\left(b_1,\frac{b_2-7b_1}{2}\right) \\ \left(\frac{3b_2-b_1}{20},\frac{-b_2+7b_1}{40}\right)\ \text{のとき，} \\ \left(0,\frac{1}{6}b_1\right)\end{cases}$$

$$\text{最小値}\ v^2(b_1,b_2)=\begin{cases}-\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ \frac{b_1+17b_2}{40} \\ \frac{1}{6}b_1\end{cases}\quad\text{をもつ}\ //$$

問題 I, II において　特に $p=q=1$, $f=f_1$, $g=g_1$ の場合を考えると次の問題 III, IV になる：

<u>問題 III</u>　　$\mathrm{Max}\ f(x_1,x_2,\cdots,x_N)$

$$\text{s.t.}\ g(x_1,x_2,\cdots,x_N)\leqq c$$

$$x_n\in\langle d_n,e_n\rangle\qquad 1\leqq n\leqq N$$

<u>問題IV</u>　Min $g(y_1, y_2, \cdots, y_N)$

s.t. $f(y_1, y_2, \cdots, y_N) \geqq d$

$y_n \in \langle d_n, e_n \rangle \quad 1 \leqq n \leqq N$

問題III, IVは互いに逆関係にあるという([8,9])．すなわち，一方を主問題，他方を逆問題という。両問題の間には逆定理が成立する —— 一方の解関数(最適値関数と最適点関数)は他方の解関数を逆の意味で特徴づけている —— ．

問題III, IVの特別な場合である次の例題5,6は共に線形計画問題である：

<u>例題5</u>　Max $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

s.t. (1) $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqq c \quad (\geqq 0)$

(2) $x_i \geqq 0 \quad 1 \leqq i \leqq n$

<u>例題6</u>　Min $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$

s.t. (1)′ $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i \geqq c \quad (\geqq 0)$

(2)′ $y_i \geqq 0 \quad 1 \leqq i \leqq n$

ただし　$a_i > 0, \quad b_i > 0 \quad 1 \leqq i \leqq n.$

従って，双対問題は例題5′, 6′で表される：

<u>例題5′</u>　Min cy

s.t. (1) $a_1 y \geqq b_1$

(2) $a_2 y \geqq b_2$

⋮

(n) $a_n y \geqq b_n$

(n+1) $y \geqq 0$

例題 6′ Max cx

s.t. (1)′ $b_1 x \leqq a_1$

(2)′ $b_2 x \leqq a_2$

⋮

(n)′ $b_n x \leqq a_n$

(n+1)′ $x \geqq 0$

例題 5′, 6′ の解は容易に求められて，次の通りである：

(3.1) $y^* = \max_{1 \leqq i \leqq n} \frac{b_i}{a_i}$ のとき，最小値は $\left(\max_{1 \leqq i \leqq n} \frac{b_i}{a_i}\right) \times c$.

(3.2) $x^* = \min_{1 \leqq i \leqq n} \frac{a_i}{b_i}$ のとき，最大値は $\left(\min_{1 \leqq i \leqq n} \frac{a_i}{b_i}\right) \times c$.

よって，線形計画における双対定理より，例題 5, 6 はそれぞれ (3.1), (3.2) で与えられる解をもつ．しかし，動的計画に基づいて解いても，この解は得られる ([7]).

$f_1(x, y) = \max(x, y^2)$ は R_+^2 上の狭義増加性をもつ再帰型関数ではないが，次の最大値問題も動的計画に基づいて解ける：

例題 7 ([7]) Max $x^2 + 2y$

s.t. (1) $\max(x, y^2) \leqq c_1$ $(\geqq 0)$

(2) $xy \leqq c_2$ $(\geqq 0)$

(3)　$x, y \geqq 0$

§4　目的関数に状態を含む数理計画問題

§3の数理計画問題では，動的計画で表現されたとき，その目的関数はアクション（決定）列のみの関数であった。すなわち

$$g_1(a_1 ; g_2(a_2 ; \cdots ; g_{N-1}(a_{N-1} ; g_N(a_N)) \cdots))$$

なる型であった。ただし a_n は n 番目のアクションである。この§では　目的関数に状態をも含む数理計画問題を挙げてみよう。

例題1.　$\mathrm{Max}\ (bx_1)^2+(x_1+bx_2)^2+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}+bx_N)^2$

s.t. (i)　$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2=1$　　　$(b \geqq 0)$

([1, 2, 3, 6])

これは次の要素をもつN段動的計画で表現される：

Max，$s=c$，$a=x$，$S_n=R_+^1$　$1 \leqq n \leqq N+1$，$A_n=A_n(c)=[-1, 1]$　$1 \leqq n \leqq N-1$，$A_N=A_N(c)=\{-1, +1\}$，$g_n(c, x ; g_{n+1})=(c+bx)^2+(1-x^2)g_{n+1}$　$1 \leqq n \leqq N$，$k(c)=0$，$T_n(c, x)=\dfrac{c+x}{\sqrt{1-x^2}}$，

これに対する再帰式は

$$u^{N-n+1}(c)=\underset{-1 \leqq x \leqq 1}{\mathrm{Max}}\left[(c+bx)^2+(1-x^2)u^{N-n}\left(\frac{c+x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right] \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

$$u^0(c)=0$$

になる。求める最大値は $u^N(0)$ で与えられる。

$$\left(\begin{array}{l} u^{N-n+1}(c) \equiv \underset{x_n^2+x_{n+1}^2+\cdots+x_N^2=1}{\mathrm{Max}} [(c+bx_n)^2+(c+x_n+bx_{n+1})^2+\cdots+(c+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{N-1}+bx_N)^2] \\ 1\leqq n\leqq N \text{ とおいて 再帰式を導く} \end{array}\right)$$ //

<u>例題 2</u>　$\mathrm{Max}\ x_1^2(x_1+bx_2)^2\cdots(x_1+bx_2+\cdots+b^{N-1}x_N)^2$

s.t. (i)　$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2=1$　$(b\geqq 0)$

([1, 2, 3, 6])

これも，次の要素だけ変えれば，例題 1 と同じ動的計画で表現できる：

$g_n(c,x\,;g_{n+1})=(c+x)^2b^{2(N-n)}(1-x^2)^{N-n}g_{n+1}$，$k(c)=1$，

$T_n(c,x)=\dfrac{c+x}{b\sqrt{1-x^2}}$

再帰式は次の様になる：

$$u^{N-n+1}(c)=\underset{-1\leqq x_n\leqq 1}{\mathrm{Max}}\left[(c+x_n)^2b^{2(N-n)}(1-x_n^2)^{N-n}\cdot u^{N-n}\left(\frac{c+x_n}{b\sqrt{1-x_n^2}}\right)\right]\qquad 1\leqq n\leqq N$$

$u^0(c)=1$

$$\left(\begin{array}{l} u^{N-n+1}(c) \equiv \underset{x_n^2+x_{n+1}^2+\cdots+x_N^2=1}{\mathrm{Max}} [(c+x_n)^2(c+x_n+bx_{n+1})^2\cdots(c+x_n+bx_{n+1}+\cdots+b^{N-n}x_N)^2] \\ 1\leqq n\leqq N \text{ とおいて 再帰式を導く.} \end{array}\right)$$

求める最大値は $u^N(0)$ で与えられる。

次の問題もそれぞれ動的計画によって表現される [1, 2, 3, 7]

<u>例題 3</u>　$\mathrm{Max}\ x_1^2+(x_1+ax_2)^2+[x_2+ax_2+(a+b)x_3]^2+\cdots$

$$+\{x_1+ax_2+(a+b)x_3+\cdots+[a+(N-2)b]x_N\}^2$$

s.t. (i) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2=1 \qquad (a,b\geqq 0)$

例題4　$\mathrm{Min}\ \sum_{n=1}^{N} b_n y_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N-1} a_n y_n y_{n+1}$

s.t. (i) $\sum_{n=1}^{N} y_n^2 = 1 \qquad (a_n,\ b_n$ ：定数）

例題5　$\mathrm{Min}\ \sum_1^N b_n y_n^2 + 2\sum_1^{N-1} a_n y_n y_{n+1} + 2\sum_1^{N-2} d_n y_n y_{n+2}$

s.t. (i) $\sum_1^N y_n^2 = 1 \qquad (a_n, b_n, d_n$ ：定数）

§5. 条件がつかない数理計画問題

§3, 4 で取り扱った数理計画問題は制約条件の下での最適化問題であった。非制約条件つき数理計画問題で，動的計画によって表現できる問題は次のようなものが考えられる（[1, 2, 3, 6, 7]）

例題1　$\mathrm{Min}\ \sum_{n=1}^{N}[\phi_n(y_n)+\psi_n(y_n-y_{n-1})] \qquad y_0=c$ （定数）

ただし　$\phi_n, \psi_n : R^1 \longrightarrow R^1$ は適当な関数

これは次のN段動的計画で表現できる：

Min, $s=c$, $a=y$, $S_n=A_n=A_n(c)=R^1$,

$g_n(c, y; g_{n+1}) = \phi_n(y)+\psi_n(y-c)+g_{n+1} \qquad 1\leqq n\leqq N$,

$k(c)=0$, $T_n(c, y)=y \qquad 1\leqq n\leqq N$.

再帰式は次の様になり，$u^N(c)$ が求める最小値である：

$$u^{N-n+1}(c)=\mathrm{Min}[\phi_n(y_n)+\psi_n(y_n-c)+u^{N-n}(y_n)] \qquad 1\leqq n\leqq N$$

$u^0(c)=0$

$$\left(\begin{array}{l} u^{N-n+1}(c) \equiv \underset{(y_n, y_{n+1}, \cdots, y_N)\in R^{N+1-n}}{\mathrm{Min}} \left[\sum_{k=n}^{N} \phi_k(y_k) + \psi_n(y_n - c) + \sum_{k=n+1}^{N} \psi_k(y_k - y_{k-1})\right] \quad 1\leqq n\leqq N \\ \text{とおいて，再帰式を導く} \end{array}\right)$$

<u>例題２</u>　$\mathrm{Min} \sum_{n=1}^{N} [\phi_n(y_n)+\psi_n(y_n-y_{n-1})+\chi_n(y_n-2y_{n-1}+y_{n-2})]$

ただし　$\phi_n, \psi_n, \chi_n : R^1 \longrightarrow R^1$.　$y_0=c_1$, $y_{-1}=c_2$（定数）

これは，次の要素以外は前例題と同じ動的計画で表現できる：

$s=(c_1,c_2)$，$S_n=R^2$　$1\leqq n\leqq N+1$，$g_n((c_1,c_2), y\,;\, g_{n+1})$

$=\phi_n(y)+\psi_n(y-c_1)+\chi_n(y-2c_1+c_2)+g_{n+1}$　　$1\leqq n\leqq N$，

$k(c_1,c_2)=0$，　$T_n((c_1,c_2), y)=(y, c_1)$　　$1\leqq n\leqq N$.

再帰式は次の様になり，$u^N(c_1,c_2)$ が最小値である：

$$u^{N-n+1}(c_1,c_2)=\underset{y_n\in R^1}{\mathrm{Min}}[\phi_n(y_n)+\psi_n(y_n-c_1)+\chi_n(y_n-2c_1+c_2)+u^{N-n}(y_n,c_1)] \qquad 1\leqq n\leqq N$$

$u^0(c_1,c_2)=0$

<u>例題３</u>　$\mathrm{Min}\,(x, Ax)-2(c, x)$，ただし　A；$N\times N$，(対称)，正定値

c：Nベクトル

これは次の要素で与えられるN段動的計画で表現される：

Min，$s_n=(c_1,c_2,\cdots,c_{N-n+1})$，$a_n=x_n$，$S_n=R^{N-n+1}$　　$1\leqq n\leqq N+1$，

$A_n=A_n(s_n)=R^1$　$1\leqq n\leqq N$，　$g_n(s_n, a_n; g_{n+1})=g_n((c_1,c_2,\cdots,c_{N-n+1})$，

$x_n\,;\,g_{n+1})=a_{nn}x_n^2-2c_{N-n+1}x_n+g_{n+1}$，$k(s_{N+1})=k(\phi)=0$，

$T_n(s_n, a_n)=T_n((c_1,c_2,\cdots,c_{N-n+1}), x_n)=(c_1-a_{1,N-n+1}x_n$，

$c_2 - a_{2,N-n+1}x_n, \cdots, c_{N-n} - a_{N-n,N-n+1}x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq N.$

その再帰式は

$$u^n(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \underset{x_n \in R^1}{\mathrm{Min}}[a_{nn}x_n^2 - 2c_nx_n + u^{n-1}(c_1 - a_{1n}x_n, c_2 - a_{2n}x_n, \cdots, c_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)]$$

$$1 \leqq n \leqq N$$

$$u^0(\phi) = 0$$

になる。

<u>例題 4</u>　$\mathrm{Min}\,(x, Ax) - 2(b, x)$，ただし $A : N \times N$，Jacobi*，正定値（対称），b : N ベクトル

次の要素をもつ N 段動的計画で表現される：

Min，$s_n = c$，$a_n = x$，$S_n = R^1 \quad 1 \leqq n \leqq N+1$，$A_n = A_n(s_n) = R^1 \quad 1 \leqq n \leqq N$，$g_n(c, x; g_{n+1}) = a_{N-n+1,N-n+1}x^2 - 2cx + g_{n+1} \quad 1 \leqq n \leqq N$，$k(s_{N+1}) = 0$，$T_n(c, x) = b_{N-n} + a_{N-n,N-n+1}x \qquad 1 \leqq n \leqq N$.

再帰式は

$$u^n(c) = \underset{x_n \in R^1}{\mathrm{Min}}[a_{nn}x_n^2 - 2cx_n + u^{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)]$$

$$1 \leqq n \leqq N$$

$$u^0(c) = 0$$

になる。

<u>例題 1′</u>　$\mathrm{Min}\; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + (y_1 - c)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2$，　c : 定数

（解）$(y_1, y_2, y_3) = (\frac{5}{13}c, \frac{2}{13}c, \frac{1}{13}c)$ のとき最小値 $\frac{8}{13}c^2$ //

---

* $a_{ij} = 0 \quad \mathrm{for}\ |i - j| \geqq 2$

例題 3′　Min $x^2+2y^2+3z^2-2xy-2xz-2c_1x-2c_2y-2c_3z$　(c_1, c_2, c_3: 定数)

(解) $(x, y, z)=(6c_1+3c_2+2c_3,\ 3c_1+2c_2+c_3,\ 2c_1+c_2+c_3)$ のとき,

最小値　$-(2c_1+c_2+c_3)^2-(c_1+c_2)^2-(c_1)^2$ //

例題 4′　Min $x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2b_1x-2b_2y-2b_3z$　(b_1, b_2, b_3: 定数)

(解) $(x, y, z)=(3b_1+2b_2+b_3,\ 2b_1+2b_2+b_3,\ b_1+b_2+b_3)$ のとき

最小値　$-(b_1+b_2+b_3)^2-(b_1+b_2)^2-(b_1)^2$ //

References

[1] BELLMAN, R., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.

[2] BELLMAN, R., *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes*, Vol. I, Linear Equations and Quadratic Criteria, Academic Press, New York, 1967.

[3] BELLMAN, R., *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

[4] BELLMAN, R., *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes*, Vol. II, Nonlinear Processes, Academic Press, New York, 1971.

[5] FURUKAWA, N. and IWAMOTO, S., Dynamic programming on recursive reward systems, *Bull. Math. Statist.*, 17 (1976), 103-126.

[6] IWAMOTO, S., *"Applications of Recursive Dynamic Programming"*, unpublished preprint (1975), pp. 310.

[7] IWAMOTO, S., *"Applications of Recursive Programming with Monotonicity"*, unpublished preprint (1976), pp. 128.

[8] IWAMOTO, S., Inverse dynamic programming, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math.*, 30 (1976), 25-42.

[9] IWAMOTO, S., Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, *J. Math. Anal. Appl.*, to appear.

[10] NEMHAUSER, G.L., *Introduction to Dynamic Programming*, John Wiley, New York, 1966.