

Some fixed point theorems and their applications

東工大 理 高橋 渉

§1. はじめに.

X をある与えられた集合とし, $T \in X$ から X への写像とするとき $Tx = x$ なる点 x を T の不動点という。この不動点の存在は写像 T と空間 X の条件によってきまってくるが, この不動点の存在をうまく使うことによつてとても有用な命題がえられたり, これまで複雑に証明されていた命題が簡単に証明されたりすることがある。ここではまずはじめによく知られた Brouwer の不動点定理と単位の分割定理を用いることによつて線形位相空間における存在定理を証明し, それを凸不等式のシステムに応用してみる。このシステムに関する命題を用いて Banach spaces における定理や invariant measures に関する定理を証明し, さらに games に関する定理や mini-max 定理なども証明してみる。

§2. 存在定理.

まず次の定理をのべる。

定理1. X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし, $A \in X \times X$ の部分集合で次の条件をみたすものとする。

(1) 任意の $y \in X$ に対し 集合 $\{x \in X : (x, y) \in A\}$ は閉である。

(2) すべての $x \in X$ に対し $(x, x) \in A$ である。

(3) 任意の $x \in X$ に対し 集合 $\{y \in X : (x, y) \in A\}$ は convex である。

そのとき, $x_0 \times X \subset A$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. 任意の $x \in X$ に対し, $(x, y) \in A$ なる $y \in X$ の存在を仮定しよう。 $A_y = \{x \in X : (x, y) \in A\}$ とすると $X = \bigcup_{y \in X} A_y^c$ であり, X の compactness を使うと $X = \bigcup_{i=1}^m A_{y_i}^c$ なるような $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ をうるこたができる。

$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ をこの covering に対応する単位の分割とし, mapping $p \in$

$$p(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i(x) y_i$$

を定義すると, すべての $x \in X$ に対し $p(x) \in {}_x A^c$ である。ここで ${}_x A = \{y \in X : (x, y) \in A\}$ である。 $X_0 \in$

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ により与えられる finite dimensional simplex とする。 p は X_0 から X_0 への continuous mapping であり、Brouwer の不動点定理を用いることにより $x_0 = p(x_0) \in A^c$ なる $x_0 \in X_0 \subset X$ であることが出来る。これは $(x_0, x_0) \in A$ に反する。ゆえに定理が証明される。

この特別な場合として 次の使いやす定理とする。

定理 2. X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし F を次の条件をみたす $X \times X$ 上の実数値関数とする。

(1) 任意の $y \in X$ に対し x の関数 $F(x, y)$ は upper semicontinuous である。

(2) 任意の $x \in X$ に対し y の関数 $F(x, y)$ は convex 関数である。

(3) すべての $x \in X$ に対し $F(x, x) \geq c$ である。

そのとき すべての $y \in X$ に対し $F(x_0, y) \geq c$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. $A = \{(x, y) \in X \times X : F(x, y) \geq c\}$ とする。そのとき A は定理 1 の条件 (1), (2), (3) をみたすことは明らかである。これゆえすべての $y \in X$ に対し $F(x_0, y) \geq c$ なる $x_0 \in X$ であることが出来る。これで定理が証明されることになる。

§3. 凸不等式のシステム.

X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし, $f_1, f_2, \dots, f_m \in X$ 上の lower semicontinuous で convex な実数値函数とする。 m 個の不等式のシステム

$$(*) \quad f_i(x) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

が X 上で consistent であるとは $(*)$ をみたすような $x \in X$ が存在するときであり, システム $(*)$ が X 上で irreducibly inconsistent であるとはシステム $(*)$ が inconsistent であり, かつ $(*)$ のどんな $(m-1)$ 個のシステムも X 上で consistent であるときをいう。

定理3. システム $(*)$ が X 上で consistent である必要十分条件は $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ なる m 個の非負実数 α_i に対し $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y_0) \leq 0$ なる $y_0 \in X$ が存在することである。

証明. 必要性は明らかである。十分性を証明する。もし, $f_i(x_0) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$ なる $x_0 \in X$ が存在しないとする。 $G_i = \{x \in X : f_i(x) > 0\} \quad (i=1, 2, \dots, m)$ に対して $X = \bigcup_{i=1}^m G_i$ である。 m 要素集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ に対する単位の分割 $\varepsilon = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ とし, $X \times X$ 上の函数 $F \varepsilon$

$$F(\alpha, y) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\alpha) f_i(y)$$

とすると F は定理 2 の (1), (2) を満たしており, さらに α の
 函数 $F(\alpha, x)$ は lower semicontinuous であることより,
 すべての $x \in X$ に対して $F(\alpha, x) \geq c_0 > 0$ なる実数 c_0
 の存在も容易にわかる。そこで定理 2 を使えば すべての
 $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(\alpha_0) f_i(y) > 0$$

なる $\alpha_0 \in X$ の存在が示される。これで十分性が証明された。

定理 3' \mathcal{F} を X 上の real valued lower semicontinuous
 convex functions f の集合とする。そのとき次の (1), (2),
 (3) は同値である。

(1) すべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $f(x) \leq 0$ なる $x \in X$ が存
 在する。

(2) 任意の $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{F}$ と $\alpha_i \geq 0$ で $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ なる m
 個の実数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) \leq 0$$

なる $y \in X$ が存在する。

(3) 任意の $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}^m$ に対し

$$\sum_{i=1}^m f_i(y) \leq 0$$

なる $y \in X$ が存在する。

定理4. システム $(*)$ が X 上で *irreducibly inconsistent* である必要十分条件は次の(1)と(2)が同時にみたされることである。

(1) n 個の正の数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ が存在してすべての $x \in X$ に対し $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) > 0$ である。

(2) $1 \leq k \leq m$ なる k と $\{1, 2, \dots, m\}$ の中の k 個の元からなる任意の集合 $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k\}$ とその補集合 $\{\nu_{k+1}, \dots, \nu_m\}$ に対し, $f_{\nu_i}(x_0) > 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) をみたし, さらに $f_{\nu_i}(x_0) \leq 0$ ($i=k+1, \dots, m$) をみたすような $x_0 \in X$ が存在する。

証明. 十分性を示す。システム $(*)$ が *inconsistent* であることは定理3と(1)より明らかである。 $(*)$ の $(m-1)$ 個のシステムが *consistent* であることは(2)より明らかである。次に必要性を示す。 $(*)$ が X 上で *irreducibly inconsistent* であるので $X = \bigcup_{i=1}^m \{x : f_i(x) > 0\}$ は明らかであり, 定理3のように m 個の補集合 $\{x : f_i(x) > 0\}$ に対応する単位の分

割 $\varepsilon \in \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ とすれば, すべての $y \in X$ に対し

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) f_i(y) > 0$$

をみたすような $x_0 \in X$ が存在することは容易にわかる。まず (1) が示された。次に上の $x_0 \in X$ に対して (*) の $(m-1)$ 個のシステムが X 上で consistent であることと定理 3 を用いると $\beta_i(x_0) \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) なることがわかる。それゆえ m 個のすべての i に対し $f_i(x_0) > 0$ なることは単位の分割定理より明らかである。これは $k=m$ の場合 (2) を証明したことになる。 $1 \leq k \leq m-1$ なる k について (2) を証明しよう。

$$X_0 = \bigcap_{i=k+1}^m \{x : f_{i_2}(x) \leq 0\}$$

とすると X_0 は X の空でない compact convex 集合であり, 仮定より $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}\}$ は X_0 上で irreducibly inconsistent である。それゆえ上の手続きによつて $f_{i_1}(x_0) > 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) をみたす $x_0 \in X_0$ が存在する。さらにこの x_0 は $f_{i_2}(x_0) \leq 0$ ($i=k+1, \dots, m$) をみたしていることは明らかである。これで (2) が証明された。

これらの存在定理をもとにして, いろいろの応用を試みるのがこの講究の目的である。

§4. Banach spaces への応用.

N は normed linear space とし, N^* は その dual space とする。このとき $S = \{ f \in N^* : \|f\| \leq 1 \}$ は weak* compact convex set であることはよく知られている。

定理 5. N は normed linear space とし, $L \subseteq N$ の subset とする。このとき次の (1) と (2) の条件は同値である。

(1) 任意の $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in L^m$ に対して $m \leq f(\sum_{i=1}^m \alpha_i)$ でありかつ $\|f\| = 1$ であるような $f \in N^*$ が存在する。

(2) すべての $\alpha \in L$ に対して $f(\alpha) \geq 1$ でありかつ $\|f\| = 1$ であるような $f \in N^*$ が存在する。

証明. (2) が (1) を意味することは明らかである。それゆえ (1) が (2) を証明しよう。 $\alpha \in L$ に対して S 上の lower semicontinuous convex function F_α を

$$F_\alpha(f) = 1 - f(\alpha)$$

で定義しよう。このとき (1) の条件より $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in L^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^m F_{\alpha_i}(f) = \sum_{i=1}^m (1 - f(\alpha_i)) \leq 0$$

なる $f \in S$ の存在がわかる。ここで定理3を用いることによつてすべての $x \in L$ に対し $g(x) \geq 1$ であるような $g \in S$ がえられる。 $\|g\| \neq 0$ なるので $f = g/\|g\|$ とするとこの f は(2)の条件をみたす $f \in N^*$ である。なぜなら $\|f\| = 1$ でありかつすべての $x \in L$ に対し

$$f(x) = \frac{g(x)}{\|g\|} \geq \frac{1}{\|g\|} \geq 1$$

である。

この定理を用いると Roberts [7] によつてえられた次の結果がただちにえられる。

系. N は normed linear space とし、 L はすべての $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L^n$ に対し $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \geq n$ をみたす N の subset とする。そのときすべての $x \in L$ に対し $f(x) \geq 1$ でありかつ $\|f\| = 1$ であるような $f \in N^*$ が存在する。

証明. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L^n$ としよう。条件より $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \geq n$ なるので $\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\| \geq 1$ である。 Hahn-Banach theorem を用いて

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq \sup_{\|y\| \leq 1} f(y) = \|f\| = 1$$

なる $f \in N^*$ を求めることができる。すなわち $(x_1, \dots, x_m) \in L^m$ に対して $f(\sum_{i=1}^m x_i) \geq m$ でありかつ $\|f\|=1$ であるような $f \in N^*$ がえられる。今や定理を用いて系を証明される。

同じ手法によって Fan [4] によってえられた次の有用な結果も証明できる。

定理 6. N は normed linear space とし, $\{x_\nu\}$ を N 上の 0 でない N の部分集合, $\{\alpha_\nu\}$ を $\{x_\nu\}$ に対応する実数の集合とする。そのとき次の (1) と (2) の条件は同値である。

(1) $\alpha_\nu > 0$ なる $f \in N^*$ が存在する。

$$(2) \quad \sigma = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{\nu_i} : \lambda_i > 0, \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_{\nu_i} \right\| = 1 \right\} < \infty.$$

さらに $S_\rho = \{f \in N^* : f(x_\nu) \geq \alpha_\nu, \forall \nu\}$ としたとき条件 (1) のもとで $S_\rho \neq \emptyset$ ならば $\min_{f \in S_\rho} \|f\| = \sigma$ である。

証明. (1) \Rightarrow (2). $\alpha_\nu > 0$ なる $f \in N^*$ が存在する。そして $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ を $\lambda_i > 0$ とする。

$\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_{\nu_i} \right\| = 1$ なる λ_i をとる。 $\lambda_i f(x_{\nu_i}) \geq \lambda_i \alpha_{\nu_i}$ となるので $f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{\nu_i}\right) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{\nu_i}$ である。それゆえ、

$$\|f\| \geq \left| f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{\nu_i}\right) \right| \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{\nu_i}$$

である。これは $\sigma < \infty$ を意味する。

(2) \Rightarrow (1). $\sigma < \infty$ 時の $S_\sigma = \{f \in N^* : \|f\| \leq \sigma\}$ とすると S_σ は weak* compact convex set である。 ν に対して S_σ 上の関数 F_ν を

$$F_\nu(f) = d_\nu - f(x_\nu)$$

で定義すると F_ν は S_σ 上で continuous affine function である。ここで定理3を用いると (1) を証明しよう。

$\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ と $\lambda_i > 0$ を $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ とする。もし $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{\nu_i} \neq 0$ ならば Hahn-Banach theorem を用いて

$$(**) \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i d_{\nu_i} - \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_{\nu_i}) \leq 0$$

なる $f \in N^*$ ($\|f\| = \sigma$) をとることかできるし、
 $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{\nu_i} = 0$ ならば後で証明するが $\sum_{i=1}^m \lambda_i d_{\nu_i} \leq 0$ なるので
 (***) をみたす f として $f=0$ をとればよい。だから定理3
 よりすべての ν に対して $f(x_\nu) \geq d_\nu$ なる $f \in S_\sigma \subset N^*$ の存在がわかるのである。 $\sum_{i=1}^m \lambda_i d_{\nu_i} \leq 0$ なることを証明する。
 $\mu = \sum_{i=1}^m \lambda_i d_{\nu_i} > 0$ とすると恒定より 0 でない x_{ν_0} が存在するのて $a \cdot \mu + \frac{1}{\|x_{\nu_0}\|} d_{\nu_0} > \sigma$ なる $a > 0$ をとることかできる。とこのか、

$$\left\| \sum_{i=1}^m \alpha \lambda_i x_{v_i} + \frac{1}{\|x_{v_0}\|} x_{v_0} \right\| = 1$$

故に

$$\sum_{i=1}^m \alpha \lambda_i \alpha_{v_i} + \frac{1}{\|x_{v_0}\|} \alpha_{v_0} \leq \sigma$$

となりただちに矛盾をうる。

次に(1)のもとで $S_\rho \neq \emptyset$ とする。 $0 < \sigma < \infty$ であり、
 $S_\sigma = \{f \in N^* : \|f\| \leq \sigma\}$ の中に解があるから $\min_{f \in S_\rho} \|f\| \leq \sigma$
 は明らかである。また $f \in S_\rho$ ならば

$$\|f\| \geq f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{v_i}\right) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{v_i}$$

故に $\|f\| \geq \sigma$ をうる。すなわち $\min_{f \in S_\rho} \|f\| \geq \sigma$ である。
 ゆえに $\min_{f \in S_\rho} \|f\| = \sigma$ をうる。

§5. Invariant measures の応用.

$X \in$ compact Hausdorff space とし、 $C(X) \in$ real valued continuous functions の作る Banach algebra とする。
 $C(X)_+$ とする positive part を表わし、 M と X 上の probability measures の全体を表わすものとする。 M は weak* compact convex set を持つことはよく知られたことである。

定理7. $\Sigma \in C(X)$ 上の Markov-operators の作るある family とする。そのとき次の (1), (2), (3) の条件は同値である。

(1) X 上に Σ -invariant な probability measure μ が存在する。

(2) $(T_1, T_2, \dots, T_m) \in \Sigma^m$ と $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in C(X)_+^m$ に
対して

$$\sum_{i=1}^m T_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^m f_i(x)$$

ならば $x \in X$ が存在する。

(3) T と f によってそれぞれ Σ と $C(X)_+$ の元を表現するとき

$$\sup_{T, f} \min_{\mu \in M} \mu(Tf - f) = \min_{\mu \in M} \sup_{T, f} \mu(Tf - f)$$

が成立する。

証明. (1) \Rightarrow (2). $\mu \in \Sigma$ -invariant な probability measure とする。それと $(T_1, T_2, \dots, T_m) \in \Sigma^m$ と $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in C(X)_+^m$ に対して

$$\int \sum_{i=1}^m T_i f_i d\mu = \int \sum_{i=1}^m f_i d\mu$$

である。それゆえ

$$\sum_{i=1}^m T_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^m f_i(x)$$

なる $\mu \in M$ が存在することは明らかである。

(2) \Rightarrow (1). $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して M 上の continuous affine function $F_{T, f} \in$

$$F_{T, f}(\mu) = \mu(Tf - f)$$

によって定義する。このとき $\alpha_i \geq 0$ と $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ なる m 個の実数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ と $(T_1, T_2, \dots, T_m) \in \Sigma^m$, $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in C(X)_+^m$ に対して (2) の仮定によって

$$\delta_\alpha \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i T_i f_i \right) \leq \delta_\alpha \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i \right)$$

なる $\delta_\alpha \in M$ が存在するので、定理 3 を用いることによってすべての $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf) \leq \mu(f)$ なる $\mu \in M$ の存在がわかる。この μ に対しては $\mu(Tf) \geq \mu(f)$ も成り立つ。なぜなら任意の $f \in C(X)_+$ に対して $\|f\| \cdot 1 - f \geq 0$ であるので

$$\mu(T(\|f\| \cdot 1 - f)) \leq \mu(\|f\| \cdot 1 - f)$$

が成り立つ。すなわちすべての $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf) \geq \mu(f)$ となる。これで (2) \Rightarrow (1) が証明された。

(1) \Rightarrow (3). 不等式

$$a = \sup_{T, f} \min_{\mu \in M} \mu(Tf - f) \leq \min_{\mu \in M} \sup_{T, f} \mu(Tf - f) = b$$

は常に成立するので、これから等号の成立を証明すればよい。
 $f=0$ とすることによって $a \geq 0$ であり、任意の T と f に対し $\exists \mu \in M$ なる μ が存在するので $a \leq 0$ でもある。それゆえ $a=0$ である。また (1) の条件によって Σ -invariant な probability measure μ が存在するので $b \leq 0$ がえられる。これより $a=b$ が証明された。

(3) \Rightarrow (1). 仮定より

$$\sup_{T, f} \min_{\mu \in M} \mu(Tf - f) = \min_{\mu \in M} \sup_{T, f} \mu(Tf - f)$$

であり、その左辺は 0 であるので

$$0 = \min_{\mu \in M} \sup_{T, f} \mu(Tf - f)$$

がえられる。すなわち

$$\sup_{T, f} \mu(Tf - f) = 0$$

なる $\mu \in M$ が存在することになる。これはすべての $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対し $\mu(Tf) \leq \mu(f)$ なることを意味するので (2) \Rightarrow (1) の証明におけると同様にこの μ が Σ -invariant

probability measure であることがわかる。

注意. 上の定理において Σ を one point set としたとき (3) の条件は mini-max 定理 [3] より常に成り立つので, Markov operator に対する invariant measure の存在は Tychonoff の不動点定理を用いることなしに Mini-max 定理よりえられることとなる。例えばこれに X から X への continuous mapping T に応用すれば mini-max 定理によって X 上の T -invariant measure の存在がえられることとなるのである。この μ が空間 X に何らかの条件をいれることにより point measure になってくれれば すなわち T の不動点の存在となるわけである。

§6. Games への応用.

X をある set とし, $\mathcal{A} \subseteq X$ の subsets からなる一つの algebra とする。 $B(X, \mathcal{A})$ によって bounded \mathcal{A} -measurable functions の作る Banach space を表わし, $B^*(X, \mathcal{A})$ によって \mathcal{A} 上の bounded additive set functions の全体を表わすことにする。 $v \in V(X, \mathcal{A})$ が game であるとは $v: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ であり $v(\emptyset) = 0$ とき

である。game ν の core とは すべての $A \in \mathcal{A}$ に対し $\mu(A) \geq \nu(A)$ であり $\mu(X) = \nu(X)$ である $\mu \in B^*(X, \mathcal{A})$ の全体のことである。これを $\mathcal{C}(X, \mathcal{A}, \nu)$ であらわす。次の定理は Schmeidler [9] によってえられたものであるが、定理 3 を用いることにより簡単に証明することができる。

定理 8. $\nu \in \text{game}$ としたとき 次の (1), (2), (3) の条件は同値である。

(1) $\mathcal{C}(X, \mathcal{A}, \nu) \neq \emptyset$.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ と $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ に対し

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nu(A_i) \leq \nu(X) \parallel \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbb{1}_{A_i} \parallel$$

が成立する。

(3) $(A_1, A_2, \dots, A_m) \in \mathcal{A}^m$ に対し

$$\sum_{i=1}^m \nu(A_i) \leq \nu(X) \parallel \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{A_i} \parallel$$

が成立する。

証明. (1) \Rightarrow (2). $\mu \in \mathcal{C}(X, \mathcal{A}, \nu)$ とし $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ と $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ に対し

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nu(A_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(A_i) = \mu\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)$$

$$\leq \mu(1) \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i 1_{A_i} \right\|$$

$$= \nu(X) \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i 1_{A_i} \right\|$$

となる。

(2) \Rightarrow (3). 明らか。

(3) \Rightarrow (2). $C = \{ \mu \in B^*(X, A) : \mu(X) = \nu(X) \}$ としよう。 $A \in \mathcal{A}$ に対し C 上の函数 F_A を

$$F_A(\mu) = \nu(A) - \mu(A)$$

で定義すると, (3) の仮定より 任意の $(A_1, A_2, \dots, A_m) \in A^m$ に対し

$$\sum_{i=1}^m \nu(A_i) \leq \nu(X) \left\| \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \right\| = \mu \left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i} \right)$$

なる $\mu \in C$ が存在するので 定理 3 を用いて

$$\mu(A) \geq \nu(A), \quad \mu(X) = \nu(X)$$

なる $\mu \in C$ があることがわかる。これで定理が証明された。

同様な手法を用いることにより exact games や convex games の特性化を行うことがわかるがここではおこなわない。

§7. Mini-max theorem の応用。

この section では定理4の応用として Fan の mini-max theorem [3] を証明してみる。

定理9. X を線形位相空間の compact convex 集合とし, Y をある set としよう。 $X \times Y$ 上の実数値関数 f が次の(1) と(2)の条件:

(1) 任意の $y \in Y$ に対し, x の関数 $f(x, y)$ は lower semicontinuous かつ convex である。

(2) 任意の $x \in X$ に対し, y の関数 $f(x, y)$ は concave-like である。

をみたすならば, そのとき

$$\sup_y \min_x f(x, y) = \min_x \sup_y f(x, y)$$

が成立する。

証明. $c = \sup_y \min_x f(x, y)$ とする。これは任意の $y \in Y$ に対し $f(x, y) \leq c$ なる $x \in X$ の存在を意味する。いま任意の $(n-1)$ 個の元 $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \subset Y$ に対し

$$f(x, y_i) \leq c \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

なる $x \in X$ が常に存在するとし, 任意の n 個の元 $\{y_1, y_2,$

$\dots, y_m\} \subset Y$ に対して

$$f(x, y_i) \leq c \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

なる $x \in X$ が存在することを証明しよう。

$\{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset Y$ に対して

$$(***) \quad f(x, y_i) \leq c \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

が inconsistent であるとしよう。すると (***) は irreducibly inconsistent である。そこで定理 4 を使えば、すべての $x \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f(x, y_i) > c$$

なるような m 個の positive numbers $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ ($\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) が存在する。(2) の条件を用いると、すべての $x \in X$ に対して

$$f(x, y_0) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x, y_i) > c$$

なる $y_0 \in Y$ の存在する。この y_0 に対しては $f(x_0, y_0) \leq c$ なる $x_0 \in X$ が存在するので、上の式に矛盾する。これで

$$\min_x \sup_y f(x, y) \leq c$$

がえられ、定理が証明される。

References.

- [1] F. E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, 177 (1968), 283-301.
- [2] N. Dunford-J. T. Schwartz, *Linear operators, Part 1*, Interscience, New York (1958).
- [3] K. Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 38 (1952), 121-126.
- [4] K. Fan, On systems of linear inequalities, in "Linear inequalities and related systems", *Ann. of Math. Stud.* 38 (1956), 99-156.
- [5] K. Fan, Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, *Math. Z.* 68 (1957), 205-217.
- [6] K. Fan, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, *Math. Ann.* 163 (1966), 189-203.
- [7] J. W. Roberts, Invariant measures in compact Hausdorff spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1975), 691-718.

- [8] K. Sakamaki-W. Takahashi, Systems of convex inequalities and their applications, to appear.
- [9] D. Schmeidler, On balanced games with infinitely many players, Research Program in Game Theory and Mathematical Economics, RM 28, The Hebrew University of Jerusalem.
- [10] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. of Japan, 28 (1976), 168-181.
- [11] 高橋 渉, 不動点定理をめぐり最近の結果, 数学 28 (1976), 236-247.