数理解析研究所講究録
第 299 巻 1977 年 142-159

An application of a piecewise linear homotopy to an algebraic equation*

東工大　理学部　小島政和

§1. はじめに

Brouwerの不動点定理: φをn次元Euclid空間R^nの有界閉凸集合X上で定義されXの値をとる連続写像とする。このとき，φの不動点，すなわち，

$$\varphi(x) = x$$

なる$x \in X$が存在する。

数理計画，ゲームの理論，数理経済等のさまざまな問題の解の存在がこの定理によって証明されており，Brouwerの不動点を近似計算することによって，それらの問題の近似解を得ることができる。例として，非線形最適化問題

---

* 有馬，西野（慶大工学部）と共同研究中．詳細については共同論文として発表予定．

(1) $\quad \min \quad \theta(x)$

$\quad\quad$ subject to $\quad x \in X$

を考える。ただし，$\theta: R^n \longrightarrow R$は連続微分可能な非線形写像，$X \subset R^n$は有界閉凸集合とする。連続写像$\varphi: X \longrightarrow X$を

$$\varphi(x) = \{ y \in X : \| y - x + \nabla\theta(x) \| \leqq \| y' - x + \nabla\theta(x) \| \ (\forall y' \in X) \}$$

で定義すると

$$x：(1)\text{の局所最小解} \Longrightarrow x：\varphi\text{の不動点}$$

が成立する[1]。したがって，φのすべての不動点を求めることができたとすると，そのなかから問題(1)の大域的な最小解を選びだすことができる。

Brouwerの不動点を求める問題は，非線形方程式系

(2) $\quad \psi(x) = 0 \quad (\psi: U \longrightarrow R^n$連続，$U \subset R^n)$

の特殊な場合と考えることができる。一般に，非線形方程式系(2)に対して，条件

(a) 大域的な収束性をもつ，

(b) すべての解を近似計算できる

の2つ（あるいは(a)だけ）を満足する解法を開発することは非常にむずかしい。上述のBrouwerの不動点を求める問題と相補計画問題[6]（特殊な形の非線形方程式系に帰着され

る。[15]参照）に対しては，[14]と[18]を原点にして発展した「不動点と相補性の理論」のなかで，(a)を満たす多くの手法[2, 3, 7, 11, 12, 13, 16]が生まれている（[9]参照）。しかしながら，不動点が単独であることが保証されるような自明な場合を除いては，「すべての不動点を近似計算する」ことは未解決の問題である。以下で述べる代数方程式に対する解法は不動点と相補性の理論に基づいており，条件(a)，(b)の両方を満足している。この理論に基づいた方法としてはKuhnの方法[13]が発表されているが，Kuhnの方法では条件(b)の理論的保証が確立されていない。

複素係数$A_1, A_2, \ldots, A_n$をもったn次多項式

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \cdots + A_{n-1} z + A_n$$

を$F(z)$で表わし，代数方程式

(3) $$F(z) = 0$$

を考える。代数学の基本定理により，(3)はちょうどn個（m重根はm個と数える）の根をもつことが知られている。複素平面Cを2次元平面R^2と同一視すると，(3)は2変数と2本の実方程式よりなる非線形方程式系とみなすことができる。

§2. Homotopy の導入．

$G(z)$ を既知の n 単根をもち，z^n の係数が 1 である n 次多項式とする。条件

$$H(z,t)=z^n+B_1(t)z^{n-1}+\cdots+B_{n-1}(t)z+B_n(t)$$

$$B_j(t):[0,1]\longrightarrow C,\ 連続\ (j=1,2,\dots,n)$$

$$H(z,0)=F(z)\quad(\forall z\in C)$$

$$H(z,1)=G(z)\quad(\forall z\in C)$$

を満たす連続写像 $H:C\times[0,1]\longrightarrow C$（$F$ と G の間の homotopy）を考える。$t\in[0,1]$ を1つ固定したとき，$H(z,t)$ は n 次の多項式となる。代数方程式の根の係数に関する連続性により，集合

$$P=\{(z,t)\in C\times[0,1]:H(z,t)=0\}$$

は $C\times[0,1]$ 内の n 本の arc

$$P_j=\{(z_j(t),t):t\in[0,1]\}\ (j=1,2,\dots,n)$$

よりなる。ここで

$$z_j(1):G(z)=0\ の根，既知\ (j=1,2,\dots,n)$$

$$z_j(0):F(z)=0\ の根，未知\ (j=1,2,\dots,n)$$

となっている。したがって，各 $(z_j(1),1)$ を初期点として arc P_j をたどって $(z_j(0),0)$ に到達できれば $F(z)$ の根はすべて求められることになる。

§3. arc P_j をたどる際のいくつかの困難.

各arc P_j は $C\times[0,1]$ 内の曲線になっている。したがって, arc P_j を正確にたどることは数値計算上不可能であり, 実際には, arc P_j を近似計算することになる。2つ以上のarcが交叉する可能性もある。ある $(\tilde{z},\tilde{t})\in C\times[0,1]$ をちょうど m 本のarcが通るための必要十分条件は $\tilde{z}$ が n 次多項式 $H(z,\tilde{t})$ の m 重根になることである。1つのarc P_j が他のarc P_k と交わる, あるいは, 近接する点においては次の2つが起らないようにしなければならない。

(i) arc P_j からはずれてarc P_k の出発点 $(z_k(1),1)$ にいってしまう(図1)。

(ii) arc P_j からはずれて, すでに近似計算したarc P_k の終点 $(z_k(0),0)$ へいってしまう(図2)。

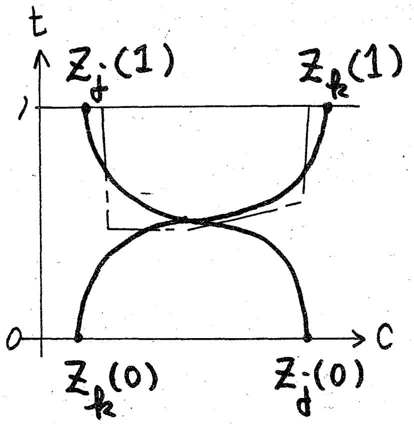


図1

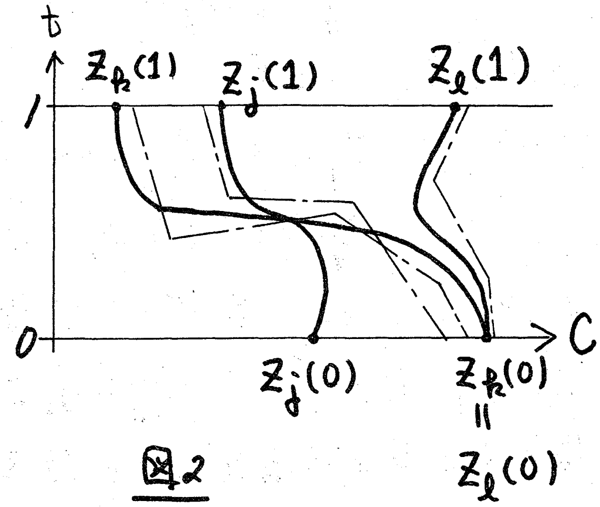


図2

ここでは，

$$(4)\quad H(z,t)=\begin{cases}(2-2t)(F(z)+C_2)+(2t-1)G(z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t\in[1/2,1]) \\ F(z)+2C_2t \qquad\qquad\qquad (t\in[0,1/2])\end{cases}$$

$$G(z)=z^n-C_1^n,\quad C_1\neq 0$$

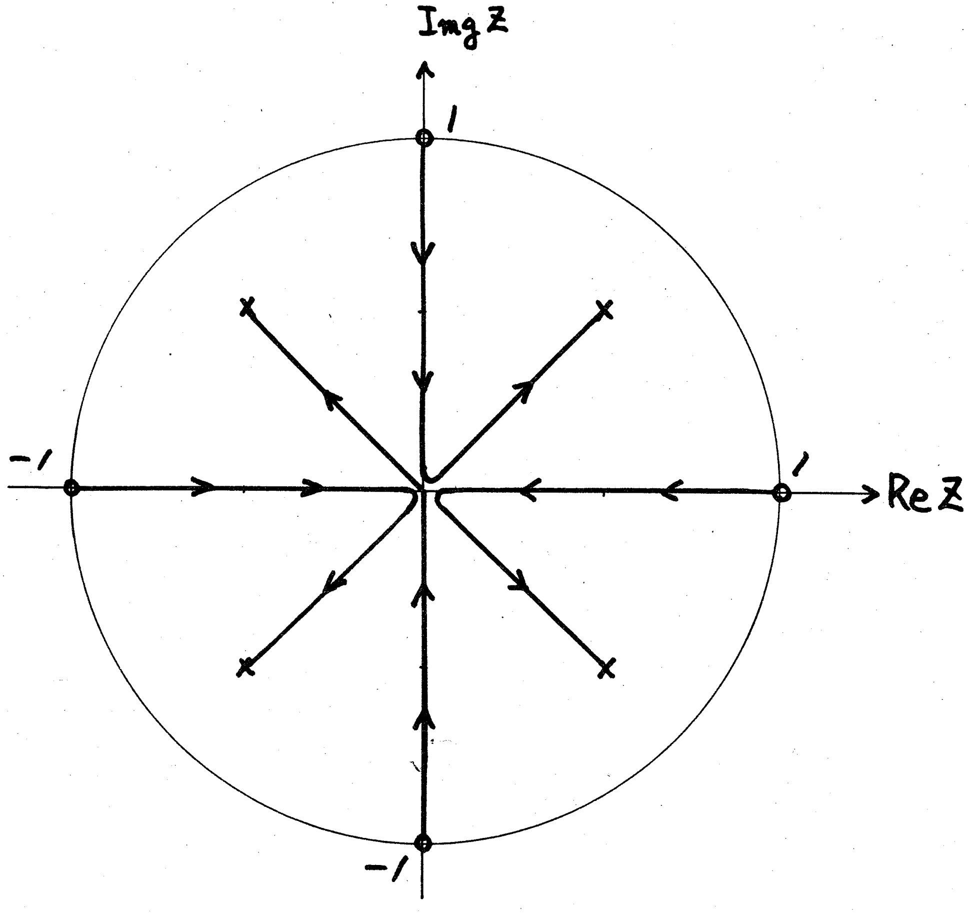
なる形のhomotopy $H: C\times[0,1]\longrightarrow C$を採用する。図3，図4は，$C_1=1$，$C_2=0$にとった場合の集合Pを複素平面Cに射影した例を示している。$G(z)$は半径$|C_1|$の円周上に等間隔にn個の単根

$$z_j(1)=|C_1|\exp\left\{\left(\frac{2\pi j}{n}+\theta_1\right)i\right\}\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$\theta_1=\arg C_1$$

をもっている。C_2は任意の微小な複素数である。あらかじめ，$F(z)$の根がすべて単根であることがわかっている場合には$C_2=0$にとれる。$F(z)$に重根がある場合には，$2C_2t\neq 0$ $(t>0)$は，この項を加えることによって$F(z)$の根をずらして単根にさせる役割を果している。実際，高々$(n-1)$個の$t\in[0,1/2]$においてだけ，$F(z)+2C_2t$は重根をもつ可能性がある。このことは，$t\in[0,1/2]$においてarc P_j $(j=1,2,\ldots,n)$が高々$(n-1)$個の点でしか交わらないことを意味している。$t\in[0,1]$では高々$4(n-1)$個

の点でしかarc P_j $(j=1,2,\dots,n)$ は交わらない。これは，ここで採用したhomotopy Hの1つの特徴になっている。

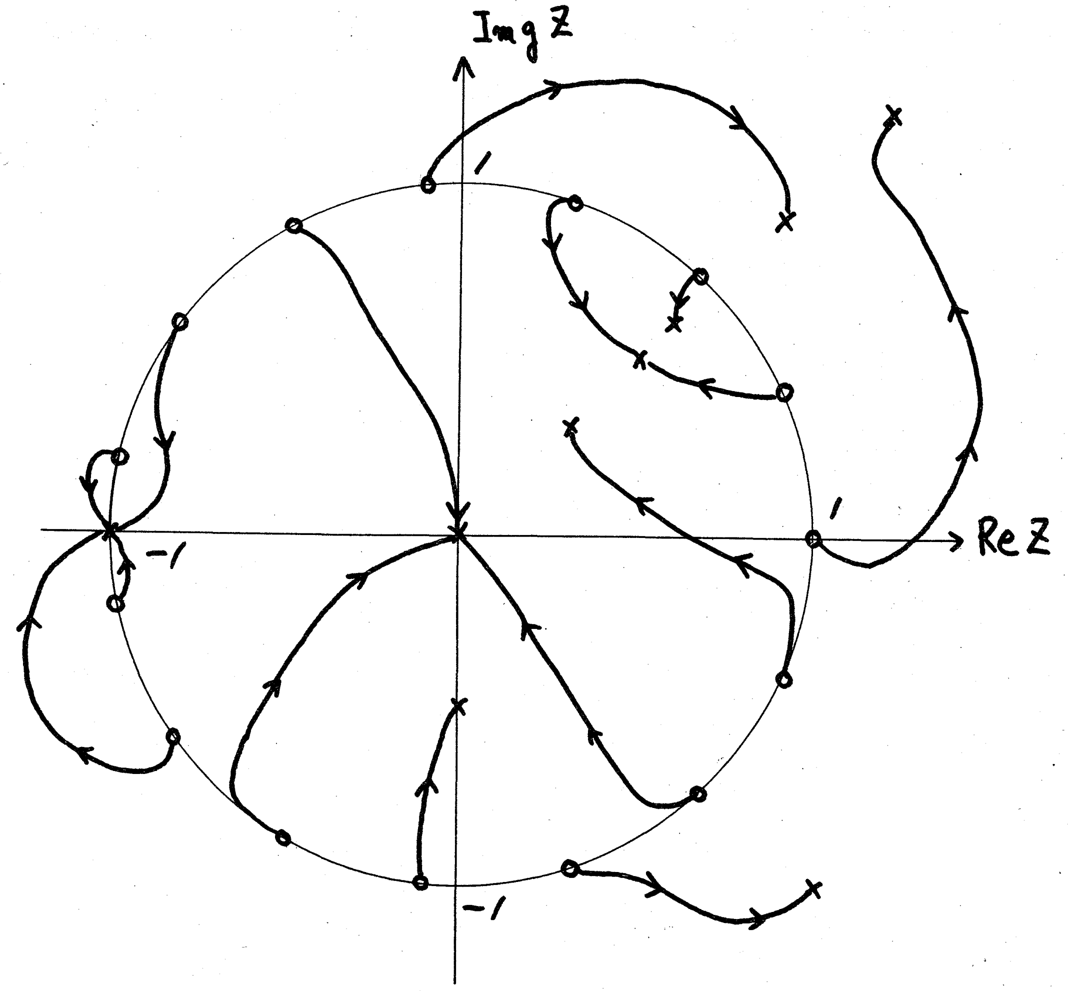


o ： $G(z) = z^4 - 1$ の根

x ： $F(z)$ の根

$\longrightarrow$ ： P_j ただし近似.

図3　$n = 4$



○ ; $G(z) = z^{15} - 1$ の根

× ; $F(z)$ の根

⟶⟶ ; P_j　ただし，近似。

図4　$n = 15$

§4 homotopyの区分的線形近似.

(4)で定義されたhomotopy $H: C \times [0,1] \longrightarrow C$ を特殊な単体分割 J_3 (Todd [19]) を用いて区分的線形近似する。J_3 のすべての頂点は $t = 2^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) なる平面上にあり，各平面は図5のように合同な直角二等辺三角形で分割されている。

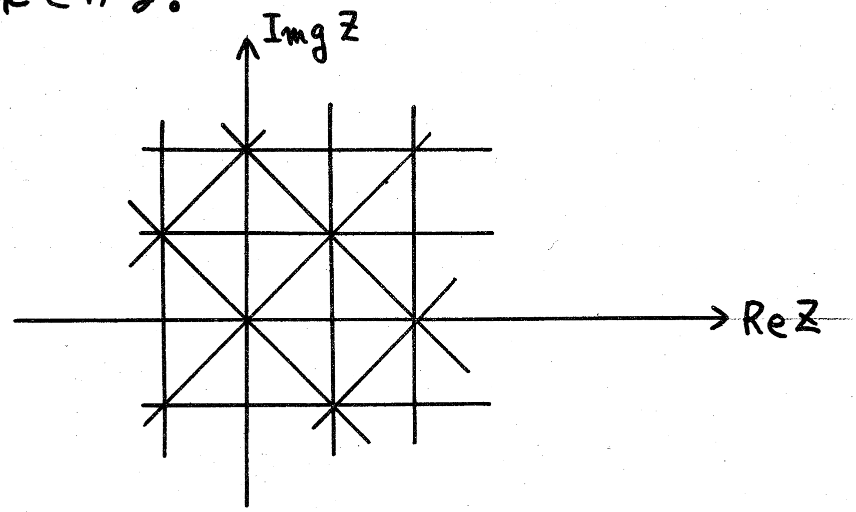


図5

各三角形 τ の最長の辺（斜辺）の長さを diam τ で表わすと，ある正数 ρ に対して

$$\mathrm{diam}\ \tau = \rho 2^{-k} \quad \text{if } \tau \subset \{(z,t) : t = 2^{-k}\}$$
$$(k = 0, 1, 2 \ldots)$$

が成立している。$t = 2^{-k}$ 上にある三角形は図6のように

四等分されて $t=2^{-(k+1)}$ 上の三角形になる。

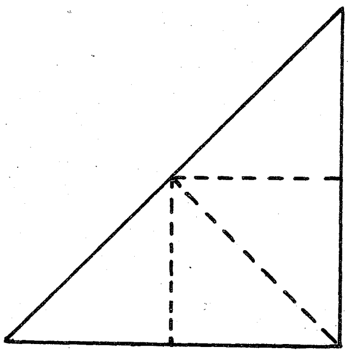


図6

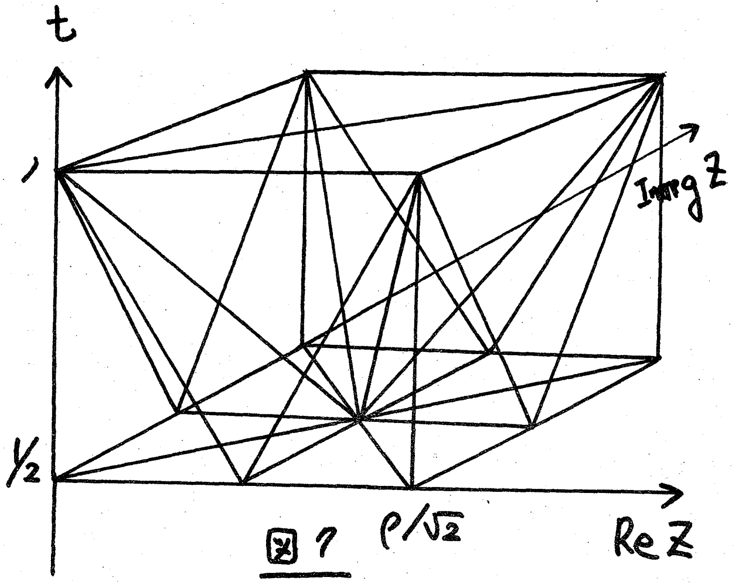


図7

図7は集合

$$\{(z,t):\ z=z_1+iz_2,\ 0\leqq z_j\leqq \rho/\sqrt{2}\ \ (j=1,2)$$
$$1/2\leqq t\leqq 1\qquad\}.$$

がJ_3によってどのように分割されているかを示している。

J_3に属する各3－単体(四面体)σをその頂点

$$(v^m,t^m)\quad(m=0,1,2,3)$$

の凸胞

$$\sigma=co\{(v^m,t^m)\ ;\ m=0,1,2,3\}$$

で表わすことにする。このとき，各$(z,t)\in\sigma\in J_3$はσの頂点(v^m,t^m) $(m=0,1,2,3)$の凸結合

$$(z,t)=\sum_{m=0}^{3}\lambda_m(V^m,t^m),\ \sum_{m=0}^{3}\lambda_m=1$$
$$\lambda_m\geqq 0\quad (m=0,1,2,3)$$

として書ける。$\hat{H}:C\times(0,1]\longrightarrow C$を次のように定義する。

$$\hat{H}(z,t)=\sum_{m=0}^{3}\lambda_m H(V^m,t^m).$$

このとき，$\sigma\in J_3$の各頂点ではHと$\hat{H}$の値は一致し，各$\sigma\in J_3$内で$\hat{H}$は線形となる。$\hat{H}(\cdot,1)$は$G(\cdot)$の区分的線形近似になっている。$\hat{H}$は連続であり，特に(5)より，

$$(6)\qquad \lim_{t\to 0}\hat{H}(z,t)=F(z)\qquad(\forall z\in C)$$

を満たす．$\hat{H}$はHの区分的線形近似と考えることができる。実際，$\rho\longrightarrow 0$として各単体$\sigma\in J_3$の横巾を0に収束させることによって，$\hat{H}(z,t)$は$H(z,t)$に収束する。このとき，方程式系

$$(7)\qquad \hat{H}(z,t)=0$$

の解の集合$\hat{P}=\{(z,t)\ ;\ \hat{H}(z,t)=0\}$もPに収束する．すなわち，$\hat{P}$はPの近似になっている．(7)は3変数$z_1=\mathrm{Re}\,z$，$z_2=\mathrm{Img}\,z$，tと2本の実方程式$\mathrm{Re}\,\hat{H}(z,t)=0$と$\mathrm{Img}\,\hat{H}(z,t)=0$よりなっている。すなわち，方程式の個数よりも変数の個数が1つだけ多い．したがって，適当な条件のもとでは，その解の集合$\hat{P}$は1次元の自由度をもった集合となる。

<u>非退化の条件</u>：$\hat{P}$はJ_3を構成する頂点および成分とは交わらない。

この条件は不動点と相補性の理論では通常仮定されているもので，線形計画法におけるシンプレックス法で仮定される非退化の条件と同様のものである。この条件のもとでは，$\hat{P}$の各連結成分は，区分的に線形なパス（図8），あるいは，ループ（図9）になる。

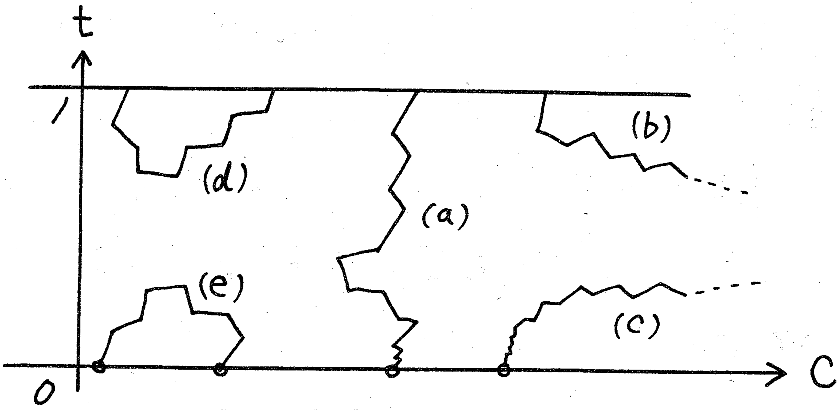


図8　パス

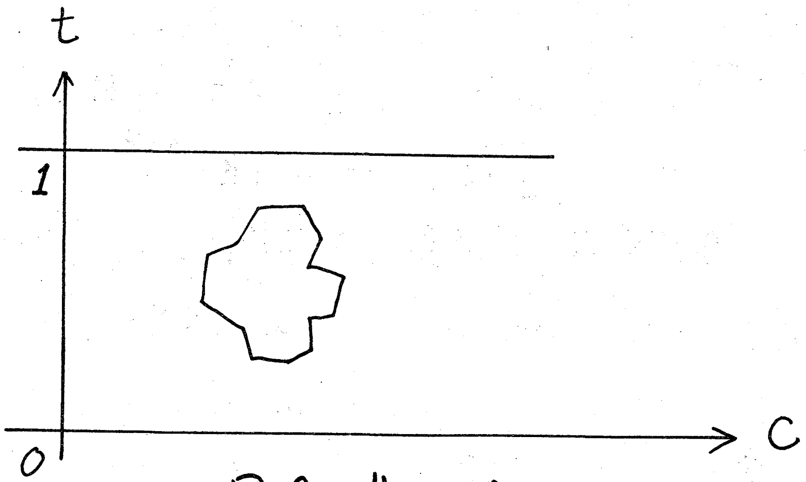


図9　ループ

§5. アルゴリズムとその収束について

$0<\rho \leqq |C_1|/(20n)$ を満たすように ρ をとる。

補題1：ある有界閉集合 $D \subset C$ が存在して,

$$\hat{P} \subset D \times [0,1]$$

略証：$H(z,t)$ を

$$H(z,t)=z^n+(H(z,t)-z^n)$$

と表わすと第2項は $n-1$ 次以下の多項式となる。したがって，ある正数 γ が存在して

$$|H(z,t)| \geqq \frac{1}{2}|z|^n \quad \text{if} \quad |z| \geqq \gamma$$

とできる。他方，$\hat{H}$ が H の区分的線形近似であることより，ある $\omega>0$ に対して

$$|\hat{H}(z,t)-H(z,t)| \leqq \omega |z|^{n-2} \quad (\forall (z,t) \in C \times [0,1])$$

が成立する。したがって，$|z| \geqq \gamma$ のとき,

$$\begin{aligned} |\hat{H}(z,t)| &\geqq |H(z,t)|-|\hat{H}(z,t)-H(z,t)| \\ &\geqq \frac{1}{2}|z|^n-\omega |z|^{n-2}. \end{aligned}$$

ゆえに，十分大きな $|z|$ に対しては $|\hat{H}(z,t)|>0$。

この補題によって図8の(b)，(c)の場合は排除される。

補題2：ある $\hat{z}_j(1)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ が存在して,

$$\hat{P} \cap C \times \{1\} = \{(\hat{z}_j(1),1) : j=1,2,\ldots,n\},$$

$$|\hat{z}_j(1)-z_j(1)| \leqq |C_1|/(40n) \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

略証：$G(z)=H(z,1)$ はその各根 $z_j(1)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ の近傍で $|G'(z)|>0$ かつ1対1になっている。これより，十分小さな ρ に対しては，$\hat{H}(z,1)$ が各 $z_j(1)$ の近傍で1対1,かつ,その近傍内でただ1つの解をもつことが導かれる。実際，$0<\rho\leqq|c_1|/(20n)$ にとったときには，(8) が成立する。

補題2により，$\hat{P}$ は $t=1$ の平面とちょうど n 個の点

$$(\hat{z}_j(1),\ 1) \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

で交わり，各 $\hat{z}_j(1)$ は $G(z)$ の根 $z_j(1)$ の $|c_1|/(40n)$-近傍にある。$(\hat{z}_j(1),1)$ を含む $\hat{P}$ の連結成分を $\hat{P}_j$ とおく。

<u>補題3</u>：$\hat{P}_j\cap\hat{P}_k=\phi$ $(j\neq k)$

略証：$\hat{G}(z)=\hat{H}(z,1)$ は $t=1$ 平面の分割を構成する各3角形 τ 内で線形であるから，その3角形 τ 内で

$$\hat{G}(z)=Mz+b$$

とかける。いま，τ が $\hat{z}_j(1)$ を含むと仮定する。このとき，$\hat{z}_j(1)$ は $G(z)$ の根 $z_j(1)$ の $|c_1|/(40n)$-近傍にあり，かつ，$|G'(z_j(1))|>0$ が成立している。このことより，$\det M>0$ が導かれる。さらに，[4]で示されたIndex Theory を用いると，パス $\hat{P}_j$ が $(\hat{z}_j(1),1)$ と $(\hat{z}_k(1),1)$ を同時に含むと仮定すると，$\hat{z}_j(1)$ と $\hat{z}_k(1)$ を含む3角形 τ_j と τ_k に対応する行列 M_j と M_k の行列式の符号が異っ

ていなければならない。これは矛盾である。

補題3により図8の(d)の場合は起らないことが示された。

<u>定理：</u> $z_p(0)$ を $F(z)$ の m 重根とすると，$(z_p(0), 0)$ に収束するパス $\hat{P}_j$ の本数はちょうど m 本になる。

略証：補題1，2，3により各 $\hat{P}_j$ はある $(z_p(0)\ 0)$ に収束することがわかる。他方補題1の証明を拡張することによって，$z_p(0)$ が $F(z)$ の m 重根である場合には，$z_p(0)$ のある近傍が存在して，十分小さなすべての $t>0$ に対して，$\hat{H}(z, t)$ はその近傍内にちょうど m 個の根をもつことがわかる。よって，$(z_p(0), 0)$ には高々 m 本のパス $\hat{P}_j$ しか収束しえない。パス $\hat{P}_j$ の本数は n 本であり，それらの各々はある $(z_p(0), 0)$ に収束するから，$z_p(0)$ が m 重根である場合にはちょうど m 本のパス $\hat{P}_j$ が $(z_p(0), 0)$ に収束する。

補題1，2，3および定理の詳しい証明には写像度の理論[17]，連続微分可能写像の区分的線形近似の理論[8]，代数方程式の性質[5]，Index理論[4]等を用いる。

以上の考察により，$(\hat{z}_j(1), 1)$ を初期点として，$\hat{P}_j$ をたどることを $j=1, 2, \ldots, n$ についておこなえば，$F(z)$ のすべての根の近似を得ることができる。$\hat{P}_j$ は $\wedge \in J_3$ 内で線形になっているので，$\hat{P}_j$ を正確にたどることができる。この過程は線形計画法における改訂シンプレックス法と似た

ものとなる（ピボット演算をするマトリックスの大きさは3 x 3）。

参考文献

[1] B. C. Eaves, On the basic theorem of complementarity, Math. Prog. 1 (1971) 68-75.

[2] B. C. Eaves, Homotopies for computation of fixed points, Math. Prog. 3 (1972) 1-22.

[3] B. C. Eaves and Saigal, Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions, Math. Prog. 3 (1972) 225-237.

[4] B. C. Eaves and Scarf, The solution of systems of piecewise linear equations, Math. of OR 1 (1976) 1-27.

[5] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, John Wiley, New York, 1974.

[6] M. Kojima, A unification of the existence theorems of the nonlinear complementarity problem, Math. Prog. 9 (1975) 257-277.

[7] M. Kojima, On the homotopic approach to systems of equations with separable mappings, to

appear in Math. Prog.

[8] M. Kojima, Studies on PL approximation of C^1-mappings in fixed points and complementarity theory, Research Reports on Information Sciences B-29 (1976), Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology.

[9] 小島政和，不動点と相補性の理論，オペレーションズ・リサーチ 22 (1977) 掲載予定．

[10] 小島政和，西野寿一，代数方程式のすべての根を求める Algorithm，日本数学会応用数学分科会講演予稿集 1976年10月 1-6．

[11] M. Kojima, H. Nishino and T. Sekine, An extension of Lemke's method to the piecewise linear complementarity problem, SIAM J. on Applied Math. 31 (1976) 600-613.

[12] H. W. Kuhn, Simplicial approximation of fixed points, Proceedings of National Academy of Sciences 61 (1968) 1238-1242.

[13] H. W. Kuhn, A new proof of the fundamental theorem of algebra, Math. Prog. Study 1 (1974) 148-158.

[14] C. E. Lemke and J. T. Howson, Jr., Equilibrium points of bimatrix games, SIAM J. on Applied Math. 12 (1964) 413–423.

[15] N. Megiddo and M. Kojima, On the existence and uniqueness of solutions in nonlinear complementarity theory, to appear in Math. Prog.

[16] O. H. Merrill, Applications and extensions of an algorithm that computes fixed points of certain nonempty convex upper semicontinuous point to set mappings, Ph.D. Dissertation, University of Michigan, 1971.

[17] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[18] H. E. Scarf, The approximation of fixed points of a continuous mapping, SIAM J. on Applied Math. 15 (1967) 1328–1342.

[19] M. J. Todd, On triangulation for computing fixed points, Math. Prog. 10 (1976) 322–346.