

Schmid の指標の関係式について

広大理 堀田良之

G を連結半単純 Lie 群で, コンパクトなカルタン部分群 T をもつものとし, 更に, ある複素半単純群 $G(\mathbb{C})$ の部分群になっているものとする. $G(\mathbb{C})$ のボレル部分群 B を $T = B \cap G$ となるように固定する. Ψ を B が定める (G, T) に関する正のルート系; 即ち

$$\text{Lie } B = (\text{Lie } T) \otimes \mathbb{C} + \sum_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

(\mathfrak{g}^{α} はルート α の固有空間)

とする. $\Psi = \Psi_k \cup \Psi_n$; $\Psi_k = \{\text{コンパクトルート}\}$
 $\Psi_n = \{\text{非コンパクトルート}\}$ とおく. T のユタリ指標 λ は自然に B の複素指標に拡張されるので, λ はコンパクト複素多様体 $X = G(\mathbb{C})/B$ 上の line bundle \mathcal{L}_{λ} を与える. 一方 X の G -orbit 分解の中で,

$$D = G \cdot B \simeq G/T \subset G(\mathbb{C})/B$$

は開集合. W. Schmid の一連の仕事より次の事柄はわかっている:

1) $\langle \lambda, \alpha \rangle$ 十分大 ($\alpha \in \Phi_k$) なら層係数 Γ は Γ ジー-1 に関して

$$H^i(D, \mathcal{L}_\lambda/D) = 0 \quad i \neq n = |\Phi_k|.$$

2) G -加群 $H^0(D, \mathcal{L}_\lambda/D)$ は Blattner 型の K -type を持つ.

3) $\langle \lambda - \rho, \alpha \rangle > 0$ ($\alpha \in \Phi$) なら L^2 は Γ ジー

$$H_{(2)}^0(D, \mathcal{L}_\lambda/D) \subset H^0(D, \mathcal{L}_\lambda/D)$$

は discrete series $\omega(\lambda - \rho)$ を与える (ρ は Φ の和の半分).

さて問題となるのは, Schmid の Blattner 予想を証明するにあたり用いた (必ずしもユニタリとは限らぬ virtual な) 指標の間関係式

$$\Theta(\Psi, \lambda) + \Theta(s_\alpha \Psi, \lambda) = \Theta_{\Psi, \alpha, \lambda}$$

(Inv. Math., 1975) をこの図式の中で解けなうかという問題である.

$\alpha \in \Phi_n$ を単純ルート, w_α を対応する reflection, c_α を所謂 Cayley 変換:

$$c_\alpha = \text{Ad } e^{\frac{\pi}{4}(Y_{-\alpha} - Y_\alpha)}$$

($Y_{\pm\alpha}$ は適当なルート基底)

とする. $X = G(\mathbb{C})/B$ の 3 つの G -orbit

$$D = G \cdot B$$

$$\partial_\alpha = G \cdot c_\alpha B$$

$$D_\alpha = G \cdot w_\alpha B$$

を考へる. D, D_α は X の中で開, ∂_α は実余次元が 1 の実部分多様体で, D, D_α の境界には入る.

期待:

I) ∂_α は適当な部分複素構造をもつゆへ, 之れに関してコホモロジー一群

$$H_2^*(\partial_\alpha, \mathbb{R} | \partial_\alpha)$$

を定義し, 制限写像

$$\begin{array}{ccc} H^*(D, \mathbb{R} | D) & \longrightarrow & H_2^*(\partial_\alpha, \mathbb{R} | \partial_\alpha) \\ H^*(D_\alpha, \mathbb{R} | D_\alpha) & \longrightarrow & \end{array}$$

が得られるようにせよ. 左側は dense 部分空間 Λ としてよい.

II) I) の下で, $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ ($\alpha \in \Phi_+$) ならば

$$H^\Delta(D, \mathcal{L}_\lambda | D) \oplus H^\Delta(D_\alpha, \mathcal{L}_\lambda | D_\alpha) \simeq H^\Delta(D \cup D_\alpha, \mathcal{L}_\lambda | D \cup D_\alpha)$$

$$\xrightarrow{\text{rest}} H_2^\Delta(\partial_\alpha, \mathcal{L}_\lambda | \partial_\alpha)$$

は“本質的”に同型 (例えば K -finite vectors の空間に於いて).

よって, $G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき前になる.