数理解析研究所講究録
第300巻 1977年 40-53

Affine symmetric space における境界値問題

東大 教養 大島利雄
京大 数理研 関口次郎

§1 Helgason - Okamoto 予想

偏微分方程式の境界値問題で最も基本的な例として，"単位円 $D \equiv \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ 内の調和函数 $u(z)$ は，単位円周 $B \equiv \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ 上の境界値が $\varphi(e^{i\theta})$ であれば，

$$u(z) = (\mathcal{P}\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \varphi(e^{i\theta})\, d\theta$$

と Poisson 積分により表示される" という事実がある．また Poisson 変換

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} : \text{"B 上の函数の空間"} & \longrightarrow & \text{"D 上の調和函数全体の空間"} \\ \varphi & \longmapsto & \mathcal{P}\varphi \end{array}$$

を考えたとき，B 上の函数の空間として hyperfunction 全体をとったときのみ上の Poisson 変換が bijective になる（この事実は hyperfunction の定義から直ちに従う）。逆に任意の調和函数に対し，その B 上の境界値が存在し，それは hyperfunction になる。

これは，表現論的に次のような意味をもっている：
Dは等質対称リーマン空間 $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ で，Bはその Martin境界 $SL(2,\mathbb{R})/\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})\}$ である．そして，調和函数というのは，D の Poincare metric に対する Laplace-Beltrami operator Δ の固有値 0 に属する固有函数に他ならない。自然に，B，D 上の hyperfunction 全体の空間 $\mathcal{B}(B)$, $\mathcal{B}(D)$ を

$$\mathcal{B}(B) \simeq \{\varphi \in \mathcal{B}(SL(2,\mathbb{R}));\ \varphi(g\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}) = \varphi(g)\}$$

$$\mathcal{B}(D) \simeq \{f \in \mathcal{B}(SL(2,\mathbb{R}));\ f(gk) = f(g),\ {}^{\forall}k \in SO(2)\}$$

とみなしたとき，Poisson積分は，$SO(2)$ の正規化されたHaar measure dk により

$$(\mathcal{P}\varphi)(g) = \int_{SO(2)} \varphi(gk)\,dk$$

と表示される。よって，Poisson 変換は Lie 群 $SL(2,\mathbb{R})$ の（無限次元）表現空間 $\mathcal{B}(B)$ から D 上の調和函数の空間への全単射の intertwining operator であるということができる。

Δ は $SL(2,\mathbb{R})$ の作用と可換なので，Δ の一般の固有値 μ に属する固有空間 $C^{\infty}(D,\mu)$ も $SL(2,\mathbb{R})$ の表現空間となっている。Helgason [2] は，次の Poisson 変換

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{P}: \mathcal{B}(B,s) & \longrightarrow & C^{\infty}(D,\chi_s) \equiv \{f \in C^{\infty}(D);\ \Delta f = \chi_s f\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \varphi & \longmapsto & (\mathcal{P}\varphi)(g) \equiv \int_{SO(2)} \varphi(gk)\,dk \end{array}$$

が *bijective* になることを示した（ただし，$s \notin -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \cdots$）。
ここで，

$$\begin{cases} \mathcal{B}(B, s) \equiv \left\{ \varphi \in \mathcal{B}(SL(2;\mathbb{R}));\ \varphi\left(g \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & \\ & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = y^{\frac{1}{2}-s} \varphi(g) \right\} \\ \Delta \equiv (1-|z|^2)^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \mu \equiv \chi_s \equiv (s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2}) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

これはさらに次の予想へと発展した．

<u>Helgason - Okamoto 予想</u>　"リーマン対称空間 X 上の任意の球函数（＝X 上の不変微分作用素の同時固有函数）は，X の Martin 境界 M 上の *hyperfunction* の Poisson 積分として表示される"

この予想は [4] により完全に解決されたが，その結果を述べ，さらに Riemannian でない対称空間の場合の定式化をするため，記号の準備をする．

§2 <u>Notation</u>

G を中心が有限な連結実半単純リー群，K をその極大コンパクト群とし，G，K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ とおく．$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g};\ \theta(X) = -X\}$ の極大アーベル部分空間の1つを $\mathfrak{a}$ とおき，$\mathfrak{a}$ の双対空間を $\mathfrak{a}^*$，$\mathfrak{a}^*$ の複素化を $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ とかく．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関するルート系を Σ とおき，Σ に適当な順序を入れたときの正のルートの全体を Σ^+，正の単純ルートの全体

を $\Psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ とする．さらに，$\alpha \in \Sigma$ とするとき

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \equiv \{X \in \mathfrak{g} \ ; \ [H, X] = \alpha(H)X \ , \ {}^{\forall}H \in \mathfrak{a}\},$$

$$m(\alpha) \equiv \dim \mathfrak{g}^{\alpha},$$

$$\mathfrak{n} \equiv \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^{\alpha}, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \theta(\mathfrak{n})$$

$$\Sigma_0^+ \equiv \{\alpha \in \Sigma^+ \ ; \ \frac{\alpha}{2} \notin \Sigma\}$$

とおき，リー環$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{n}$に対応するGの連結部分リー群をA，Nとする．このとき，G = KANは岩沢分解となり，P = MANはGの極小放物型部分群となる． $\mathfrak{a}$ のKにおける中心化群，正規化群をそれぞれM，M^*であらわし，Mのリー環を$\mathfrak{m}$とおく．商群 $W = M^*/M$ は Weyl 群となり，自然に$\mathfrak{a}$に作用する． $\mathfrak{g}$ の Killing form から定義される$\mathfrak{a}$の内積 $\langle \ , \ \rangle$によって，$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{a}^*$ とが同一視できる．この同一視を用いれば，$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上にも内積が定義できるので，それも $\langle \ , \ \rangle$ であらわす．同様に，Wの作用が $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上にも定義される．

一般に，実解析的多様体X上の hyperfunction，Schwartz の超函数，C^{∞}-級函数の全体の空間をそれぞれ，$\mathcal{B}(X)$，$\mathcal{D}'(X)$，$C^{\infty}(X)$ であらわす．

§3　リーマン対称空間の場合

等質空間G/Kは，非コンパクト型対称リーマン空間となり，等質空間G/Pは，そのMartin境界とよばれる．$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{a}$ の複素

化の universal enveloping algebra を $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{a})$ とかく. $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{a})$ は, G, A 上の(左)-不変微分作用素の全体 $\mathbb{D}(G)$, $\mathbb{D}(A)$ と同一視できる. すると,

$$\mathbb{D}(G)^K = \{D \in U(\mathfrak{g})\,;\ \ Ad(k)D = D,\ \ {}^\forall k \in K\}$$

とおくことにより, G/K 上の不変微分作用素の全体 $\mathbb{D}(G/K)$ は, 自然に

$$(1)\qquad \mathbb{D}(G/K) \simeq \mathbb{D}(G)^K / \mathbb{D}(G)\mathfrak{k} \cap \mathbb{D}(G)^K$$

とみなせる. 一方, $U(\mathfrak{g})$ の元 D に対し,

$$D - D'_{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$$

となる $D'_{\mathfrak{a}} \in U(\mathfrak{a})$ がただ1つ定まるので,

$$e^{\rho}(a) = e^{\rho \log a} \qquad (a \in A)$$

という A 上の函数 e^{ρ} を用いて

$$(2)\qquad \tilde{\gamma} : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}(G)^K & \longrightarrow & U(\mathfrak{a}) \\ \Psi & & \Psi \\ D & \longmapsto & D_{\mathfrak{a}} \equiv e^{\rho} \circ D'_{\mathfrak{a}} \circ e^{-\rho} \end{array}$$

という写像が定義できるが, これら(1)と(2)は

$$(3)\qquad \gamma : \mathbb{D}(G/K) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{a})^W$$

という algebra homomorphism をひきおこす(Chevalley の定理). ここで,

$$U(\mathfrak{a})^W \equiv \{D \in U(\mathfrak{a})\,;\ \ Ad(\bar{w})D = D,\ \ {}^\forall w \in W\}$$

($\bar{w}$ は $w \in W$ の M^* における代表元の1つ)

である. $\mathbb{D}(G/K)$ は l (= Σ の元の数 = G/K の階数) 個

の不定元をもつ$\mathbb{C}$上の多項式環と同型になる。

$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$の元$\lambda$が与えられたとき，それは$\mathrm{Hom}_{alg}(U(\mathfrak{a});\mathbb{C})$の元$\tilde{\lambda}$に唯一に拡張されるので，$\chi_\lambda \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{D}(G/K);\mathbb{C})$が，$\chi_\lambda(D) = \tilde{\lambda}(\gamma(D))$ $(D \in \mathbb{D}(G/K))$によって定義できる。このとき，任意の$\chi \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{D}(G/K);\mathbb{C})$に対し，$\chi_\lambda = \chi$となる$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$が存在すること，および，任意の$w \in W$に対し，$\chi_{w\lambda} = \chi_\lambda$となることに注意しておく。

G上のhyperfunctionの空間$\mathcal{B}(G)$は，

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{B}(G) & \longrightarrow & \mathcal{B}(G) \\ \Psi & & \Psi \\ (g, f(x)) & \longmapsto & (\tau_g f)(x) \equiv f(g^{-1}x) \end{array}$$

により，G-加群となるが，以下，これのG-部分加群をいくつか定義する．

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$に対し，$G/P$上の線形束値函数の空間：

$$\mathcal{B}(G/P;\lambda) \equiv \{\varphi \in \mathcal{B}(G);\ \varphi(xman) = e^{(\lambda-\rho)\log a} f(x),$$
$$\forall x \in G, \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N\}$$

これは，自然にFS-空間（cf. [6]）の位相が入る．

$\chi \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{D}(G/K), \mathcal{M}(\chi))$に対し，$G/K$上の球函数の空間：

$$C^\infty(G/K;\mathcal{M}(\chi)) \equiv \{f \in C^\infty(G/K);\ \Delta f = \chi(\Delta) f,\ \forall \Delta \in \mathbb{D}(G/K)\}$$

これも自然に，FS-空間$C^\infty(G/K)$の閉部分空間として，FS-空間となる。

さて，Poisson変換を

$$(4)\qquad \mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/P,\lambda) \to \mathcal{B}(G/K)$$
$$\varphi(x) \longmapsto (\mathcal{P}_\lambda\varphi)(xK) \equiv \int_K \varphi(xk)\,dk$$

により定義する（dk は K 上の正規化された Haar 測度）．
これは，$H(g) = \log a \quad (g \in KaN)$ により定義される G 上の函数 $H(g)$ を用いて，

$$(5)\qquad (\mathcal{P}_\lambda\varphi)(xK) = \int_K \varphi(k)\, e^{-(\lambda+\rho)H(x^{-1}k)}\,dk$$

と表わすこともできる。

定理.［4］．Poisson 変換 (4) は，FS－空間の間の連続な G－準同型写像

$$(6)\qquad \mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/P;\lambda) \to C^\infty(G/K;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))$$

をひきおこす．(6) が，上への位相同型となるための必要十分条件は，

$$(7)\qquad e_\lambda \equiv \left\{ \prod_{\alpha\in\Sigma_0^+} \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m(\alpha)}{2}+1+\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m(\alpha)}{2}+m(2\alpha)+\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right)\right)\right\}^{-1} \neq 0$$

で与えられる．

注意　特に，

$$(8)\qquad -2\langle\lambda,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle \notin \{1,2,3,\cdots\},\quad \forall\alpha\in\Sigma^+$$

ならば，(7) が成立するので，(6) は位相同型となる．

任意の $\chi \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{D}(G/K);\mathbb{C})$ に対し，(8) を満たす $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ で $\chi = \chi_\lambda$ となるものの存在が容易にわかるので，Helgason-Okamoto 予想は，この定理から従う．

$e_\lambda = 0$ のときは，$\mathcal{P}_\lambda$ は単射でも全射でもない．$\mathcal{P}_\lambda$ の核と像については [4] を見よ．

$C^\infty(G/K;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$ が既約となるための必要十分条件は，$e_\lambda \cdot e_{-\lambda} \neq 0$ となることである [3]．

次に，$\mathcal{B}(G/P;\lambda)$ の部分空間の場合を述べる．

$$\mathcal{D}'(G/P;\lambda) \equiv \mathcal{B}(G/P;\lambda) \cap \mathcal{D}'(G)$$

とおくと，これは自然に DFS - 空間 (cf. [6]) となる．

さらに，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^*(G) \equiv \{ f \in C^\infty(G);\ {}^\forall D \in \mathbb{D}(G),\ {}^\exists c, \ell > 0 \\ \text{s.t. } |(Df)(kak')| \leqq c\, e^{\ell \langle \log a, \log a \rangle^{1/2}} \\ \text{for } {}^\forall k, k' \in K,\ a \in A \}\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^*(G/K;\mathcal{M}(\chi)) \equiv C^\infty(G/K;\mathcal{M}(\chi)) \cap \mathcal{E}^*(G)$$

とおくと，$\mathcal{E}^*(G/K;\mathcal{M}(\chi))$ は，DFS - 空間 $\mathcal{E}^*(G)$ の閉部分空間として DFS - 空間になる．

このとき，前定理は，$\mathcal{B}(G/P;\lambda)$，$C^\infty(G/K;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$，FS - 空間を，それぞれ $\mathcal{D}'(G/P;\lambda)$，$\mathcal{E}^*(G/K;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$，DFS - 空間に置き換えて，そのまま成立する．これは，

前定理を使うことにより，容易に証明できる．

Lewis [7] は，$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{D}'(G/P,\lambda)) \subset \mathcal{E}^*(G/K;\mathfrak{m}(\chi_\lambda))$ となること，および，G/K の階数が1の場合に，$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{D}'(G/P,\lambda)) = \mathcal{E}^*(G/K;\mathfrak{m}(\chi_\lambda))$ となる為の十分条件を求めている．

§4 一般の対称空間の場合

Riemannian とは限らない一般の対称空間（= affine symmetric space）は infinitesimal には Berger [1] によって分類されている．ここでは，そのうち最も扱い易い次の場合に限ろう．すなわち，G/K' という等質空間であって，K' のリー環の複素化が $\mathfrak{k}$ の複素化と一致するような場合である．例えば，$SL(n,\mathbb{R})/SO(p,n-p)$，$Sp(n,\mathbb{R})/U(p,n-p)$，$Sp(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$，….

<u>定義1</u>　$\varepsilon : \Psi \to \{-1,1\}$ という任意の写像を

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha_1)^{m_1} \cdots\cdots \varepsilon(\alpha_\ell)^{m_\ell} \quad \text{for } \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i \in \Sigma$$

により，$\varepsilon : \Sigma \to \{-1,1\}$ という写像に拡張し，それを"ルートの符号"と呼ぶ．ルートの符号 ε に対し，$\mathfrak{g}$ の involutive automorphism θ_ε が，

$$\begin{cases} \text{(i)} & \theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha)\,\theta(X), \quad X \in \mathfrak{g}^\alpha \quad (\alpha \in \Sigma) \\ \text{(ii)} & \theta_\varepsilon(X) = \theta(X), \quad X \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a} \end{cases}$$

によって定義できる.

$\mathfrak{k}_\varepsilon \equiv \{X \in \mathfrak{g}\,;\ \theta_\varepsilon(X) = X\}$ とおき, K_ε^0 を $\mathfrak{k}_\varepsilon$ に対応するGの連結部分リー群とし, $K_\varepsilon \equiv M K_\varepsilon^0$ とおく.
(このとき, "K_ε が compact $\Leftrightarrow$ $\varepsilon(\alpha) = 1$ ($\forall \alpha \in \Sigma$)")
さらに, $M_\varepsilon^* \equiv M^* \cap K_\varepsilon$, $W_\varepsilon \equiv M_\varepsilon^* \cap M$ とおき, $w_1 = e$, $w_2, \dots, w_r$ を $W_\varepsilon \backslash W$ の代表系とする ($r = [W : W_\varepsilon]$).

<u>補題2.</u> i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\varepsilon + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ (direct sum)
ii) $G \supset \bigcup_{i=1}^{r} K_\varepsilon \overline{w_i} A N$ (open dense, unique, disjoint)

<u>補題3.</u> $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ を, 対称等質空間 G/K_ε 上の不変微分作用素全体のなす環とすると, §3 の (1), (2), (3) が, K, $\mathfrak{k}$ を K_ε, $\mathfrak{k}_\varepsilon$ に代えてそのまま成立し, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して $\chi_\lambda \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{D}(G/K_\varepsilon); \mathbb{C})$ が定義される.

$\chi \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{D}(G/K_\varepsilon); \mathbb{C})$ に対して

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi)) \equiv \{f \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon);\ \Delta f = \chi(\Delta) f,\ \forall \Delta \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon)\}$$

というG-加群を定義し, さらに $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, G上の函数 $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ ($g \in G$) を

$$e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))} = \begin{cases} e^{\lambda \log a} & \text{if } g \in K_\varepsilon \overline{w_i} a N \quad (a \in A) \\ 0 & \text{if } g \notin K_\varepsilon \overline{w_i} A N \end{cases}$$

によって定義する.

<u>補題4.</u> $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ は, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ を meromorphic parameter とするG上の超函数である. しかも,

(9) $\quad -2\langle\lambda,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle \notin \mathbb{Z}, \quad \forall\alpha\in\Sigma$

を満たすλは，その pole にはならない．

このとき，部分 Poisson 変換を

(10)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^i_{\lambda,\varepsilon} : \mathcal{B}(G/P;\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{B}(G/K_\varepsilon) \\ \Psi & & \Psi \\ \varphi & \longmapsto & (\mathcal{P}^i_{\lambda,\varepsilon}\varphi)(gK_\varepsilon) \equiv \int_K \varphi(k) e^{-(\lambda+\rho)H^i_\varepsilon(g^{-1}k)} dk \end{array}$$

によって定義する．

<u>定理</u> [11]． $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ が (9) を満たせば，(10) によって定義される次の Poisson 変換が，上への G - 同型写像になる．

(11)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\lambda,\varepsilon} : \overset{r}{\oplus}\mathcal{B}(G/P;\lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda)) \\ \Psi & & \Psi \\ (\varphi_1,\cdots,\varphi_r) & \longmapsto & \sum_{i=1}^r \mathcal{P}^i_{\lambda,\varepsilon}\varphi_i \end{array}$$

ε が trivial な符号のとき (i.e. $\varepsilon(\alpha)=1$, $\forall\alpha\in\Sigma$) は，§3 に対応するが，条件 (9) は条件 (8) よりも強い．

次に，$\mathcal{D}'(G/P;\lambda)$ の場合を考えよう．

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_*(G/K_\varepsilon) \equiv \{ f\in C^\infty(G)\ ;\ & f(gk') = f(g)\ (\forall g\in G,\ \forall k'\in K_\varepsilon) \\ & \text{かつ},\ \forall D\in\mathbb{D}(G),\ \forall \ell>0,\ \exists C_{\ell,D}>0 \ \text{s.t.} \\ & |(Df)(ka)| \leqq C_{\ell,D}\, e^{-\ell\langle\log a,\log a\rangle^{1/2}}\ (\forall k\in K,\ \forall a\in A)\} \end{aligned}$$

とおくと，$\mathcal{E}_*(G/K_\varepsilon)$ は FS-空間となる．その双対空間を $\mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon)$ とあらわすと DFS-空間となるが，その閉部分空間として，

$$\mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi)) \equiv \mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon)\cap\mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi))$$

もDFS-空間となる．このとき，$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ が (9) を満たすならば，Poisson変換(11)は，DFS-空間の間の topological onto G-isomorphism

(12) $$\mathcal{P}_{\lambda,\varepsilon} : \overset{r}{\oplus}\mathcal{D}'(G/P;\lambda) \rightleftarrows \mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

をひきおこす。この結果も，前頁の定理の系として得られる．

§5 補足

§3，§4の定理の証明の本質的な部分は次のとおりである：対称空間を，Gが解析的に作用するあるコンパクト多様体の中へ open に実現し，Martin 境界が実際の"境界"として現われてくるようにすること (cf. [9])．そして，問題を"確定特異点型境界値問題"として捕えて，Poisson変換の逆写像を構成すること (cf. [5]) である。

§3, §4の定理は，任意の球函数とMartin 境界上の函数との対応を与えているので，種々の特殊な球函数を扱うのにその結果が応用できる．特殊球函数として，左からも群Gのある部分群で不変，あるいは相対不変な函数が考えられる．

たとえば，その群として，やはりK_ε型の群をもってきた場合，その様な函数の次元，積分表示，函数等式などがわかる [12]． $G=SL(n,\mathbb{R})$ ならば，$SO(p,n-p)\backslash SL(n,\mathbb{R})/SO(q,n-q)$

上の函数で，$U(sl(n,\mathbb{R}))$ の center の 同時固有函数である．

G の discrete subgroup Γ をもってきたとき，G/K_ε 上の Eisenstein series およびその函数等式が得られる（cf. [12]，[13]）。これは，G/K 上の実解析的 Eisenstein series に対応するものである．一方，holomorphic modular form として，たとえば $Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$ 上には Siegel modular form があるが，$Sp(n,\mathbb{R})/U(p,n-p)$ 上にもそれに対応するものがあって（正則領域上ではないから正則函数としては実現できないが），それから新しい Dirichlet series（函数等式をもつ）が得られる．（cf. [10]，[14]）．

References

[1] M. Berger: Les espace symétriques non compacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 74(1957), 85-177.

[2] S. Helgason: A duality for symmetric space with applications to group representations, Advances in Math., 5 (1970), 1-154.

[3] ———— : ———— II, ibid, 22(1976), 187-219.

[4] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka: Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.

[5] M. Kashiwara and T. Oshima: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value

problems, to appear in Ann. of Math..

[6] H. Komatsu: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. of Math. Soc. Japan, 19 (1967), 366-383.

[7] J. Lewis: Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms, preprint.

[8] K. Minemura and T. Oshima: 確定特異点型境界値問題と表現論, '数学' に掲載予定.

[9] T. Oshima: A realization of Riemannian symmetric spaces, to appear.

[10] ———— : 対称空間の種々の境界に対する境界値問題, 数理解析研究所講究録, 281 (1976), 211-226.

[11] T. Oshima and J. Sekiguchi: Boundary value problem on symmetric homogeneous spaces, to appear in Proc. Japan Acad..

[12] ———————— : 対称空間上の種々の特殊固有函数について, '77.4 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.

[13] F. Sato: 二次形式のゼータ函数と特殊函数, '77. 4月. 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.

[14] T. Suzuki: 変数係数の二次形式のゼータ函数について, '77 4月 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.