数理解析研究所講究録
第 300 巻 1977 年 71-84



# 不変ベクトルを持つ閉部分群

京大 理　辰馬伸彦

1.　$G$を局所コンパクト群，$H(\neq G)$をその閉部分群とする．$\Omega$で$G$のユニタリ表現の同値類の全体の集合，$\hat{G}$で$\Omega$中既約な元全体を示す．以下$\Omega$や$\hat{G}$の元にはその同値類の代表元を1つずつとり，$\Omega$や$\hat{G}$を表現の集合と同一視して示す．$e$で$G$の単位元，$G \ni g \mapsto \pi(g)(\equiv \dot{g}) \in H\backslash G$で標準写像を表わす．

各$\omega = \{\mathfrak{H}^{\omega}, T_g^{\omega}\} \in \Omega$に対して，表現空間$\mathfrak{H}^{\omega}$中の$H$-不変ベクトルの全体 $\mathfrak{H}_H^{\omega} \equiv \{v \in \mathfrak{H}^{\omega} \mid T_h^{\omega} v = v, \forall h \in H\}$ は閉部分空間となる．又 $H_{\omega} \equiv \{g \in G \mid T_g^{\omega} v = v, \forall v \in \mathfrak{H}_H^{\omega}\}$ は$H$を含む$G$の閉部分群となる．

さて$\omega$を$H$に制限して，$H$のユニタリ表現と見る時，$\omega|_H$が$H$の単位表現$1_H$を離散直和成分として含む事は，$\mathfrak{H}_H^{\omega} \neq \{0\}$と同値である．

一方，商空間$H\backslash G$で淡中型双対定理が成立する為の必要条件の1つとして，次が知られている（[2]参照）．

(P-1) $$H = \bigcap_{\omega \in \Omega} H_\omega .$$

これは，H-不変ベクトルの全体が，G中でHを分離する事を意味する．

さて，[2]であげた例では，(1) Hがコンパクト群，(2) HがGの正規部分群の時 (P-1) は成立する．一方たとえば，$G = SL(2, \mathbb{C})$，Hを上三角行列全体から成るGの閉部分群とする時は，$\omega \in \hat{G}$ について，$\mathfrak{H}_H^\omega \neq \{0\} \Leftrightarrow \omega = 1_G$ となる。特にこの最後の例では，

(P-0) $$\exists \omega \in \Omega \quad \text{s.t} \quad H_\omega \neq G ,$$

が成立しない。明らかに，(P-1) ⇒ (P-0) であるから，この例では，(P-1) も成立しない．(P-0) の成立する時，部分群Hが不変ベクトルを持つと云ってよいであろう．

小文では，(P-0) 又は (P-1) の成立つ対 (G, H) の構造を調べ，(G, H) が，(P-0)対，又は (P-1)対となる為の必要条件を出す。結論としては，本質的にHは，上の例 (1)，(2) 及び $\mathbb{R}^n$ の形の組合せである事が示される。

2. <u>定義 1.</u> $H^\sim = \bigcap_{\omega \in \Omega} H_\omega$．Hの (P-1) 閉包と呼ぶ．

(P-1) 閉包は，位相における閉包と似た性質を持つ．即ち，

(i) $H^\sim \supset H$,

(ii) (G, H) が (P-1) 対 $\Longleftrightarrow$ $H^\sim = H$,

(iii) (G, H) が (P-0) 対 $\Longleftrightarrow$ $H^\sim \neq G$,

更に Gelfand-Raikov の正定符号関数の端点分解定理で，

(iv) $\qquad H^{\sim} = \bigcap_{\omega \in \hat{G}} H_\omega$ ,

(v) $\quad \forall \omega \in \Omega$ で $\qquad \mathfrak{H}_H^\omega = \mathfrak{H}_{H^\sim}^\omega$ ,

すなわち，H-不変ベクトルは又 $H^\sim$-不変である.

(vi) $\qquad (H^\sim)^\sim = H^\sim$ ,

特に，$H^\sim \neq G$ 即ち $(G, H)$ が (P-0) 対なら，$(G, H^\sim)$ は又 (P-1) である.

(vii) $\quad H^\sim = \bigcap_\alpha H_\alpha \quad$ ( $H_\alpha \supset H$, $(G, H_\alpha)$ が (P-1) なる $H_\alpha$ を走る).

先に [2] で導いた次の性質は以下の議論に有効である.

<u>補題 2.</u> $(G, H)$ が (P-1) 対なら $H\backslash G$ 上に G-不変測度がある.

此処で [2] で与えた，対 $(G, H)$ の更に強い条件を考える.

(P-2) $\quad H\backslash G$ の点 $\hat{e}\ (\equiv \pi(e))$ の基本近傍系で，H-不変集合のみから成るものが取れる.

誘導表現 $\sigma \equiv \mathrm{Ind}_{H\uparrow G} \mathbb{1}_H$ を考えると，$H\backslash G$ のコンパクト H-不変集合 E の特性関数 $\chi_E$ は，表現空間 $L^2_\mu(H\backslash G)$ ($\mu$ は G-不変測度) 中の H-不変ベクトルを与えるから，(P-2) $\Rightarrow$ (P-1) がわかる.

さて以下の話に重要な次の性質を示そう. ([2] 参照).

今 $(G, H)$ を (P-1) 対とし，$\forall v \in \mathfrak{H}_H^\omega$, $\varepsilon > 0$ に対し，集合 $E(v, \varepsilon) \equiv \{ g \in G \mid \| v - T_g^\omega v \| \leq \varepsilon \}$ ($\subset G$) を考えよう.

$E(v, \varepsilon)$ は，$e \in G$ の閉近傍で，次は明らかである.

(*) $\qquad \bigcap_{(\omega, v, \varepsilon)} E(v, \varepsilon) = H$ ,

$$(**)\qquad HE(v,\varepsilon)H = E(v,\varepsilon).$$

<u>補題3.</u> $\dot{e}(\in H\backslash G)$の任意のコンパクト近傍$C$を1つとると，$\{C\cap\pi(E(v,\varepsilon))\mid \omega\in\Omega, v\in \mathfrak{g}_H^{\omega}, \varepsilon>0\}$ は，$\dot{e}$の基本近傍系を生成する。 ┘

<u>証明</u> $\dot{e}$の任意の開近傍$W$について，$C-W$はコンパクトで，$\dot{e}$を含まない。(*)及び(**)より$\{\pi(E(v,\varepsilon))^c\}$は$C-W$の開被覆となるから，有限個の$(\pi(E(v_j,\varepsilon_j)))^c$により，$C-W\subset \bigcup_j^N(\pi(E(v_j,\varepsilon_j)))^c$．すなわち，

$$C\cap\left(\bigcap_j^N \pi(E(v_j,\varepsilon_j))\right)\subset W.$$ ┘

<u>補題4.</u> $(G,H)$を$(P-1)$対とし，$C_1$を$H$の任意のコンパクト集合とする。$C_\infty\equiv\bigcup_n(C_1)^n\ (\subset H)$とおくと，$\dot{e}$の$H\backslash G$中の基本近傍系で，$C_\infty$不変集合より成るものがある。 ┘

<u>証明</u> $G\ni e$のコンパクト近傍$V$を1つ固定する。$C=\pi(V\cdot C_1)$は$\dot{e}\in H\backslash G$のコンパクト近傍を与えるから，これを前補題の$C$と思う。このとき

$$\{E\equiv(C\cap\pi(E(v,\varepsilon)))\mid\subset\pi(V)\quad \omega\in\Omega, v\in\mathfrak{g}_H^{\omega}, \varepsilon>0\}$$

が求めるものである。

実際前補題により，この集合系は，$\dot{e}$の基本近傍系を与えるから，各$E$が$C_\infty$不変なる事を云えばよいが，その為には$C_1$-不変を示せば十分である。所で，

$$E\cdot C_1\subset\pi(V)\cdot C_1=\pi(VC_1)=C$$

$EC_1 \subset \pi(E(V,\varepsilon))C_1 \subseteq \pi(E(V,\varepsilon))H = \pi(E(V,\varepsilon))$,

であるからEの定義により、　$EC_1 \subset E$となる。

**補題5**　$(G,H)$を$(P-1)$対とすると、Hの閉部分群$H_0$で、$(G,H_0)$が$(P-2)$対となるものが存在する。

**証明**　eのH中のコンパクト近傍$W$を1つ定め、それで生成されるHの閉部分群を$H_1$とし、G中の$H_1$の$(P-1)$閉包$H_1^{\sim}$を$H_0$とかく。$(G,H)$が$(P-1)$の仮定から、2(VII)より$H \supset H_0$で、又$H_0 \supset H_1$だから、$H_0$はHの閉部分群である。

$(G,H_0)$が$(P-2)$である事を示す為に、$H_0$を補題4のH、$WUW^{-1}$を$C_1$と見ると、$H_1$は$C_\infty$に対応し、すなわち、$H_0\backslash G \ni \pi_0(e)$の基本近傍系で$H_1$-不変な集合より成るものがある。その各々の$H_1$不変な集合は、閉集合の閉包で且コンパクトにとり直すことが出来る。それをEとかく。

この集合Eの特性関数$\chi_E$は$L^2_\mu(H_0\backslash G)$の元と考えると、ユニタリ表現$\mathrm{Ind}_{H_0\uparrow G} \mathbb{1}_{H_0}$の$H_1$-不変ベクトルを与えて居るが、$H_0 = (H_1)^{\sim}$であったから、2(V)より同時に$H_0$-不変である。すなわち、$\forall h \in H_0$で、$\mu(E \triangle Eh) = 0$。

一方、$\mathring{E}h \subset E$なら$Eh = \overline{\mathring{E}h} \subset \overline{E} = E$だから、若し、$Eh - E \neq \phi$なら、$\mathring{E}h - E \neq \phi$である。$\mathring{E}h - E$は開集合で、$H_0\backslash G$上のG-不変測度$\mu$で、$\mu(\mathring{E}h - E) \neq 0$。これは上記の事に反する。

4. 次に，$(G,H)$ が $(P\text{-}2)$ 対である時の性質を調べる。所で，$H\backslash G$ 中の $H$-不変集合 $A$ に対しては，ある $E\subset G$ があって，$\pi^{-1}(A)=HEH$ の形に書けるから，$A^{-1}\equiv \pi(HE^{-1}H)\subset H\backslash G$ を一意的に定義出来る。

<u>定義6。</u> $A=A^{-1}$ の時，$A$ は対称であるという． ┘

全ての任意の近傍 $A$ に対して，$A$ に入る対称近傍 $A\cap A^{-1}$ が常に存在する。

<u>補題7.</u> $(P\text{-}2)$ 対 $(G,H)$ に対して，$H$ を含む $G$ の開部分群 $G_0$ があって，$H\backslash G$ 中の任意の有限測度 $H$-不変対称集合 $E$ に対して，

$$\mu(\pi(G_0)\cap E)=\mu(E)\quad .$$ ┘

<u>証明。</u> 任意の有限測度 $H$-不変対称集合 $E$ について，

$\varphi_E(g)\equiv\langle T_g^{\circ}\chi_E,\chi_E\rangle$ は $H\backslash G$ 上の連続関数と考えられて，

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_1&=\int_{H\backslash G}d\mu(\pi(g))\left|\int_{H\backslash G}\chi_E(xg)\chi_E(x)\,d\mu(x)\right|\\&=\int_{H\backslash G}\int_{H\backslash G}\chi_E(x)\chi_E(xg^{-1})\,d\mu(x)\,d\mu(\pi(g))\\&=\int_{H\backslash G}\int_{H\backslash G}\chi_E(\pi(g_1))\chi_E(\pi(gg_1^{-1}))\,d\mu(\pi(g))\,d\mu(\pi(g_1))\\&=\int_{H\backslash G}\chi_E(\pi(g_1))\left\{\int_{H\backslash G}\chi_E(\pi(g))\,d\mu(\pi(g))\right\}d\mu(\pi(g_1))=(\mu(E))^2<+\infty,\end{aligned}$$

より，$\forall\varepsilon>0$ に対して，

$F(E,\varepsilon)\equiv\{g\in G\mid \varphi_E(g)>\varepsilon\}$ とおくと，$\pi(F(E,\varepsilon))$ は，有限測度 $H$-不変対称開集合である。$F(E)\equiv\bigcup_{\varepsilon>0}F(E,\varepsilon)$ とかく。$G_0\equiv\bigcup_E F(E)$ が求めるものである事を示そう。

任意の有限測度 $H$-不変対称集合 $E_1,E_2$ で，特に $E_1$ を開

集合で，$\hat{e}$を含むとする。$E \equiv E_1 \cup E_2$ とすると，容易に

$\varphi_E(g) \geqq \langle T_g^\sigma \chi_{E_1}, \chi_{E_2} \rangle = \mu(E_1 \cap E_2 g)$ がわかるから，

$F(E) \supset \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$ であって，今

$\mu(E_2) = \mu(E_2 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$ を示せば，

$\mu(\pi(G_0) \cap E_2) \geqq \mu(F(E) \cap E_2) \geqq \mu(E_2 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$

$= \mu(E_2)$ となる。これを示す為には，

$E_3 \equiv E_2 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$，$E_0 \equiv E_2 - E_3$

とおくと，$E_3' \equiv E_0 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_0 g) > 0\}) \subset E_0$

は $E_0 \subset E_2$ より，$E_3$に入るから，$E_0$の定義より，$E_3' = \phi$。

従って，$\mu(E_3') = 0 \Rightarrow \mu(E_0) = 0$ を云えばよい。

そこで，$\mu(E_0) \neq 0$ として，（ $\pi(g) \equiv \hat{g}$ とかく ）

$\mu(E_1 \cap E_0 g) = \int \chi_{E_0}(xg^{-1}) \chi_{E_1}(x) \, d\mu(x)$ ，より，

$$
\begin{aligned}
\mu(E_3') &= \mu(E_0 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_0 g) > 0\}) \\
&= \int \chi_{E_0}(\hat{g}) \left\{ \int \chi_{E_0}(xg^{-1}) \chi_{E_1}(x) \, d\mu(x) \right\} d\mu(\hat{g}) \\
&= \iint \chi_{E_0}(\hat{g}) \chi_{E_0}(\hat{g} g_1^{-1}) \chi_{E_1}(\hat{g}_1) \, d\mu(\hat{g}_1) \, d\mu(\hat{g}) \\
&= \int \langle T_{g_1}^\sigma \chi_{E_0}, \chi_{E_0} \rangle \chi_{E_1}(\hat{g}_1) \, d\mu(\hat{g}_1) .
\end{aligned}
$$

仮定より，$\langle T_e^\sigma \chi_{E_0}, \chi_{E_0} \rangle = \mu(E_0) \neq 0$ で $\langle T_g^\sigma \chi_{E_0}, \chi_{E_0} \rangle$

は $H \backslash G$ 上の正値連続関数である。$E_1$を$\hat{e}$を含む開集合とし

たから，$G$-不変測度$\mu$では全ての開集合が正測度をもつ事を

用いると，$\mu(E_3') \neq 0$，すなわち，$\mu(E_0) \neq 0 \Rightarrow \mu(E_3') \neq 0$

がえられた。

次に $E_1, E_2$ が共に開集合の時、上と同様にして、$G_0 \supset F(E) \supset \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$ であるが、$\forall \hat{g} \in E_2^{-1}E_1$ を、$\hat{g}_1 \in E_1$, $\hat{g}_2 \in E_2$ なる $G$ の元で、$g = g_2^{-1} g_1$ とかくと、$E_1 g_1^{-1} \ni \tilde{e}$, $E_2 g_2^{-1} \ni \tilde{e}$ で、$E_1 g_1^{-1}, E_2 g_2^{-1}$ は共に開集合だから、$0 \neq \mu(E_1 g_1^{-1} \cap E_2 g_2^{-1}) = \mu(E_1 \cap E_2 g_2^{-1} g_1) = \mu(E_1 \cap E_2 g)$. $F(E) \supset E_2^{-1} E_1$ がえられた。

$F(E, E)$ 等を $E_1, E_2$ と思えば、"$G_0$ が開部分群" が示された。

次に、$H \backslash G$ 上の測度有限の $H$-不変対称集合 $E$ をとり、$\forall f \in L^2_\mu(H\backslash G)$ に対して、

$$(T_E f)(g) \equiv \int_{H\backslash G} f(xg)\, \chi_E(x)\, d\mu(x) = \langle T_g^\sigma f, \chi_E \rangle$$

で、$L^2_\mu(H\backslash G)$ 上の作用素 $T_E$ を定義すると、

$\| \langle T_g^\sigma f, \chi_E \rangle \|_2 \leq \|f\|_2\, \mu(E)$ より $T_E$ は有界作用素となる。

更に、$0 < \mu(F) < +\infty$ となる $H$-不変集合 $F$ ($\subset H\backslash G$) をとると、$L^2_\mu(F)$ は $L^2_\mu(H\backslash G)$ の $H$-不変部分空間であるが、

<u>補題 8.</u> i) $T_E$ は $L^2_\mu(H\backslash G)$ 上の対称作用素であり、

$$T_E \cdot T_g^\sigma = T_g^\sigma \cdot T_E \qquad \forall g \in G,$$

ii) $T_E|_{L^2_\mu(F)}$ は $L^2_\mu(F)$ から $L^2_\mu(H\backslash G)$ の中への、Hilbert-Schmidt 型の作用素である。

<u>証明.</u> i) の後半は

$$T_{g_1}^\sigma (T_E f)(g) = (T_E f)(g g_1) = \langle T_{g g_1}^\sigma f, \chi_E \rangle = \langle T_g^\sigma T_{g_1}^\sigma f, \chi_E \rangle$$
$$= T_E (T_{g_1}^\sigma f)(g),$$ より出る。

又 $T_E$ の対称性は、$\forall k, f \in L^2_\mu(H\backslash G)$ について、

$$\langle T_E f, k\rangle = \int\left\{\int f(xg)\,\chi_E(x)\,d\mu(x)\right\}\overline{k(\hat{g})}\,d\mu(\hat{g})$$
$$= \iint f(\hat{g}_1)\,\chi_E(\hat{g}_1 g^{-1})\,\overline{k(\hat{g})}\,d\mu(\hat{g}_1)\,d\mu(\hat{g})$$
$$= \int\overline{\left\{\int \chi_E(\hat{g}\hat{g}_1^{-1})\,k(\hat{g})\,d\mu(\hat{g})\right\}}\,f(\hat{g}_1)\,d\mu(\hat{g}_1)$$
$$= \int f(\hat{g}_1)\,\overline{\left\{\int k(xg_1)\,\chi_E(x)\,d\mu(x)\right\}}\,d\mu(\hat{g}_1) = \langle f, T_E k\rangle .$$

ii) $L^2_\mu(F)$ の正規直交基 $\{f_\alpha\}$ を一つとる。又 $L^2_\mu(H\backslash G)$ から、$L^2_\mu(F)$ への射影を $P_0$ とすると、これは $f\in L^2_\mu(H\backslash G)$ に対し $\chi_F$ を掛ける作用素により与えられる。そこで、

$$\sum_\alpha |(T_E f_\alpha)(\hat{g})|^2 = \sum_\alpha |\langle T^\sigma_g f_\alpha, \chi_E\rangle|^2 = \sum_\alpha |\langle f_\alpha, T^\sigma_{g^{-1}}\chi_E\rangle|^2$$
$$= \|P_0 T^\sigma_{g^{-1}}\chi_E\|^2 = \int_{H\backslash G}\chi_F(x)\,\chi_E(xg^{-1})\,d\mu(x) .$$
$$|||T_E|||^2 = \sum_\alpha \|T_E f_\alpha\|^2 = \sum_\alpha\int |(T_E f_\alpha)(\hat{g})|^2\,d\mu(\hat{g}) = \int \|P_0 T^\sigma_{g^{-1}}\chi_E\|^2\,d\mu(\hat{g})$$
$$= \iint \chi_F(\hat{g}_1)\,\chi_E(\hat{g}_1 g^{-1})\,d\mu(\hat{g}_1)\,d\mu(\hat{g})$$
$$= \iint \chi_F(\hat{g}_1)\,\chi_E(\hat{g}\hat{g}_1^{-1})\,d\mu(\hat{g}_1)\,d\mu(\hat{g}) = \mu(F)\,\mu(E) < +\infty \quad \rfloor$$

補題 9. $\bigcap_E T_E^{-1}(0) = \{0\}$ （$E$ : $H$-不変対称開集合）

証明。 $\bigcap_E T_E^{-1}(0) \ni {}^\exists f \neq 0$ とする。前補題の i) から、

${}^\forall k\in C_0(G)$ で、$\int_G k(g) f(xg)\,dg = \int_G k(g)\,T^\sigma_g f\,dg \in \bigcap_E T_E^{-1}(0)$

だから、はじめから $f$ を連続としてよい。又要すれば常数倍して、ある $g_0\in G$ で、$f(\hat{g}_0) \gneqq 0$ としてよい。$(G, H)$ が $(P\text{-}2)$ との仮定から、$\hat{e}$ の $H$-不変対称コンパクト近傍 $E$ を、${}^\forall x\in E$ について、$|f(xg_0) - f(\hat{g}_0)| < \frac{1}{2} f(\hat{g}_0)$ ととると、

$$\mathrm{Re}\,[(T_E f)(\hat{g}_0)] = \mathrm{Re}\left[\int f(xg_0)\,\chi_E(x)\,d\mu(x)\right] \geqq \frac{1}{2}\mu(E)\,f(\hat{g}_0)$$

$> 0$ となり、$f\in\bigcap_E T_E^{-1}(0)$ に矛盾する。 $\rfloor$

補題 10. $\sigma \equiv \mathrm{Ind}_{H\uparrow G} \mathbb{1}_H$ をHに制限して得られるHのユニタリ表現で，$L^2_\mu(H\backslash G_0)$ $(\subset L^2_\mu(H\backslash G))$ 上に実現される部分表現は，有限次元表現の離散直和として分解される．

証明．補題7 での定義から，$H\backslash G_0$ は有限測度H-不変対称開集合 $\pi(F(E,\varepsilon))$ の和としてかける。たとえば，$G_0$を $\sigma$-コンパクトな開部分群の coset の和にわけ，更にその各々の coset を $F(E,\varepsilon)$ の形の集合の可算和で cover する事により，$H\backslash G_0$ を $\pi(F(E,\varepsilon))$ のH-不変有限測度部分集合の和に分割し，それに基いて $L^2_\mu(H\backslash G_0)$ を，$\pi(F(E,\varepsilon))$ の部分集合の中に台を持つ関数の作る部分空間の直和に分解する事が出来る．すなわち，$H\backslash G_0 = \sum_\alpha A_\alpha$，$A_\alpha$ はある $\pi(F(E,\varepsilon))$ に入るH-不変で $0<\mu(A_\alpha)<+\infty$ となる集合で，これにより，

$$L^2_\mu(H\backslash G_0) = \sum_\alpha L^2_\mu(A_\alpha).\ (\text{各 } L^2_\mu(A_\alpha) \text{ は } H\text{-不変}).$$

さて，補題8 の仮定をみたす $E_0$ に対して，$T_{E_0}$ を作りこれを $L^2_\mu(A_\alpha)$ 上に制限すると，$L^2_\mu(A_\alpha)$ から $L^2_\mu(H\backslash G_0)$ への作用素と見て，Hilbert-Schmidt 型であり，$\{T^\sigma_h \mid \forall h\in H\}$ と可換である。これを $T_\alpha$ とかくと，$(T_\alpha)^* T_\alpha$ は跡作用素となり，$\sigma_\alpha \equiv \{L^2_\mu(A_\alpha), T^\sigma_h\}$ なるHのユニタリ表現の intertwining operator を与える。通常の議論によって，$(T_\alpha)^{-1}(0)$ の $L^2_\mu(A_\alpha)$ 内の直交空間は，$\{T^\sigma_h\}$-不変な有限次元部分空間の直和として分解されるが，補題9 により $E_0$ を走らせると，$\sigma_\alpha$ は有限次

元の，Hのユニタリ表現の直和として完全に分解され，上の分解とあわせて補題10の結果が示された． ┘

さて，補題10．で得られた，Hの$L^2(H\backslash G_0)$上での表現の分解を，$\tau_{G_0} \equiv \{L^2(H\backslash G_0), T_h^0\} = \sum_\alpha^\oplus \tau_\alpha \quad (\dim \tau_\alpha < +\infty)$．とする．こゝでH中の，この表現の核$N \equiv \ker \tau_{G_0} = \bigcap_\alpha \ker \tau_\alpha$を考えよう．

<u>補題11.</u> $N = \bigcap_{g \in G_0} gHg^{-1}$

特に，Nは$G_0$の正規部分群である． ┘

<u>証明</u>．$\tau_{G_0}$の核は，$L^2(H\backslash G_0)$の元を，元毎に不変にするHの部分群として特徴づけられる．すなわち，$\forall x \in H\backslash G_0$で$xh = x$．これをH-cosetで書くと，$\forall g \in G_0$で，$Hgh = Hg$．従って，$N = \{h \in H \mid ghg^{-1} \in H, \forall g \in G_0\}$

此の右辺が上の形に示される事は明らかである． ┘

補題11より，$\tau_{G_0}$は$N\backslash H$の忠実な表現と考えられるが，更に補題10より，これは有限次元表現の直和である．すなわち$N\backslash H$はコンパクト群の中に忠実に表現されて居るわけで，次の結果が使える．

<u>補題12.</u> (A. Weil [1]) コンパクト群の忠実に表現されている連結局所コンパクト群は，Kをコンパクト群として，

$\mathbb{R}^n \times K$ の形に限る。 ┘

<u>系</u> $N\backslash H$の$e$の連結成分は，$\mathbb{R}^n \times K$の形である． ┘

5. 此処でこれ迄に判った事をまとめる。

a) 局所コンパクト群$G$とその閉部分群$H$に対し，$H$の(P-1)閉包$H^{\sim}$($\supset H$)を作ると，$H^{\sim} \neq G$，すなわち$(G, H)$が(P-0)なら，$(G, H^{\sim})$は(P-1)対となる．特に，$(G, H)$が(P-1)対である事は，$H = H^{\sim}$と同値である．

b) 次に$H^{\sim}$の閉部分群$H_0$を適当にとり，$(G, H)$を(P-2)対とする事が出来る．

c) 更に$H_0$を含む$G$のある閉部分群$G_0$をとると，$H_0$に入る$G_0$の正規部分群$N$があって，$\forall g \in G_0$, $\forall n \in N$に対して，$H_0 gn = H_0 g$で，$N \backslash H_0$の単位元の連結成分$(N \backslash H_0)^0$は$\mathbb{R}^m \times$(コンパクト群)の形となる。 ┘

さて，先ず$H$が連結群の場合を考える．この時$H_0 \supset H$となるから$H^{\sim} = H_0$，すなわち$(G, H^{\sim})$が(P-2)対となり，$N$は$H^{\sim} \backslash G_0$の各元をとめる。特に$G$も連結なら，$G = G_0$となり，$N$は$G$自身の正規部分群である事に注意する．

(イ) $N \not\subset H$の時，$N_0 \equiv N \cap H$と書くと，$N_0 \backslash H$は自明でない連結群で，$N \backslash H^{\sim}$の部分群と見られるから，$N_0 \backslash H$も又，$\mathbb{R}^m \times$(コンパクト群)($\neq$単位元)の形である。

特に$(G, H)$が(P-1)対なら，$H = H^{\sim}$より又(P-2)対となり，$H \supset N$で，$H$自身が$G$のある閉部分群の正規部分群$N$を含んで，$N \backslash H$が上の形でなくてはならない。

(ロ) $N \supset H$ の時は，$\forall f \in L^2(H^\sim \backslash G_0)$ は $H$-不変であるから，又 $H^\sim$-不変である．この事は $H^\sim = N$ を意味する．そしてこの時，$(G, H)$ が $(P-1)$ 対である事は，正しく $H$ が $G$ のある閉部分群の正規部分群である場合に他ならない．　┘

これ等の結果から，たとえば次が導かれる．

<u>命題 13.</u>　$G$ を連結単純群，$H$ を $G$ の連結閉部分群とする。この時，$(G, H)$ が $(P-0)$ 対である為には，

$H = \mathbb{R}^m \times$（コンパクト群）　が必要である．　┘

これは，1節であげた3つの例の最後のものが，$(P-0)$ をみたさない事の証明にもなっている．

一般の場合，$H$ がコンパクト群なら不変ベクトルを持つことは容易に示される．しかし $\mathbb{R}^m$ の形の時には判らない．唯，$H \cong \mathbb{R}$ の時，不変ベクトルを持つ例は，所謂 "Mautner の例" として知られる群で与えられる．すなわち，

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z_1 \\ 0 & e^{i\alpha t} & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; -\infty < t < \infty ;\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; -\infty < t < \infty \right\} \qquad (\alpha ; \text{無理数})$$

とすれば，$(G, H)$ は $(P-2)$ 対となる。

次に，$H$ が連結でない場合は，条件は $H$ の $e$ の連結成分についてのみ得られる．この時，$H$ の $e$ の連結成分 $H^0$ は，$H^\sim$ の

e の連結成分に入り，従って $H^{\sim}$ の開部分群 $H_0$ の連結成分に入る事に注意する。$N_0 = N \cap H^0$ とすれば，$N_0 \backslash H^0$ は $(N \backslash H_0)^0$ の部分群になるから，やはり $\mathbb{R}^m \times$ (コンパクト群) の形となる．

## 文　献

[1] A. Weil ; L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann (1940).

[2] 辰馬伸彦 ; 等質空間に対する淡中型双対定理，数理解析研究所講究録. 280 (1976) pp 65－84.