数理解析研究所講究録
第300巻 1977年 98-101

Lie環の歪対称表現作用素に関する一注意

京大 理　野村隆昭

Gを実(又は複素)Lie群，$\mathfrak{g}$をGのLie環，$\{U,\mathfrak{h}\}$をGのユニタリ表現とする。$\mathfrak{h}_\infty(U)$，$\mathfrak{h}_0(U)$をそれぞれ，Uに対するC^∞-vectorsの全体，Gårdingの部分空間とする。$X\in\mathfrak{g}$，$x\in\mathfrak{h}_\infty(U)$ (resp. $x\in\mathfrak{h}_0(U)$)に対して，$U_\infty(X)x$ (resp. $dU(X)x$)を次の様に定義する。

$$\left.\begin{array}{l} U_\infty(X)x \\ dU(X)x \end{array}\right\} = \frac{d}{dt}U(\exp tX)x\Big|_{t=0}$$

ここに$\exp$は$\mathfrak{g}$からGへの指数写像を表す。よく知られている様に，$X\longmapsto U_\infty(X)$ (resp. $X\longmapsto dU(X)$)は$\mathfrak{g}$の歪対称作用素($A^*\supset -A$)による表現になる。一方でStoneの定理から，(一意的に)自己共役作用素Hがあって，$U(\exp tX)=$ $=e^{-itH}$となる。明らかに$dU(X)\subset U_\infty(X)\subset -iH$であるが，実は$\overline{dU(X)}=\overline{U_\infty(X)}=-iH$が成立する。(barは作用素の閉包)この事実はよく知られている(Warner [4, p. 269]

ただし証明はなし）。しかしこれだけを取りあげた簡単な証明は見当たらない．そこでこれの初等的な証明を与える。

$X\in\mathfrak{g}$ を固定し，$G_0=\{\exp tX\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ とおく．V を U の G_0 への制限とし，V に対しても $dV(X)$ を定義しておく。明らかに $dV(X)\subset -iH$ であるが次の補題が成立する．（以下 Haar 測度はすべて左不変とする）

<u>補題1</u>．$\overline{dV(X)}=-iH$.

証明．G_0は可換であるから，$\forall x\in\mathfrak{H}$，$\forall\varphi\in C_0^\infty(G_0)$に対して

$$V(\exp tX)\int_{G_0}\varphi(g)V(g)x\,dg=\int_{G_0}\varphi(g)V(g)V(\exp tX)x\,dg$$

今 $x\in\mathrm{Dom}(H)$ とすると

$$\left\|\frac{V(\exp tX)-1}{t}\int_{G_0}\varphi(g)V(g)x\,dg+i\int_{G_0}\varphi(g)V(g)Hx\,dg\right\|$$

$$\leq\int_{G_0}|\varphi(g)|\,dg\,\left\|\frac{V(\exp tX)-1}{t}x+iHx\right\|\to 0$$

ゆえに

(1) $dV(X)V_\varphi x=-iV_\varphi Hx\quad(x\in\mathrm{Dom}(H))$,

ここに $\quad V_\varphi x=\int_{G_0}\varphi(g)V(g)x\,dg$.

$\varphi_m\in C_0^\infty(G_0)$ を Dirac sequence とし $x_m=V_{\varphi_m}x$ とおく．明らかに $x_m\in\mathfrak{H}_0(V)=\mathrm{Dom}(dV(X))$ であり，$x_m\to x$ である。

さらに(1)より, $dV(X)x_m = dV(X)V_{\varphi_m}x = -iV_{\varphi_m}Hx \longrightarrow -iHx$. よって $\overline{dV(X)} \supset -iH$. (証明終)

G'を実(又は複素)Lie群, $\mathfrak{g}'$をG'のLie環, $\{T, \mathfrak{X}\}$をG'の強連続な, 有界作用素による表現とする. ($\mathfrak{X}$はBanach空間)前と同じくdTを定義する。

<u>補題2</u> (Nelson and Stinespring [3, Theorem 1.1])

$Y \in \mathfrak{g}'$とし, Sを次の(i), (ii)を満たすclosable作用素で, $\mathrm{Dom}(S)$は$\mathfrak{X}$で稠密とする.

(i) $T_\varphi \cdot \mathrm{Dom}(S) \subset \mathrm{Dom}(S)$ for $\forall \varphi \in C_0^\infty(G')$.

(ii) $ST_\varphi x = T_{Y\cdot\varphi}x$ for $\forall x \in \mathrm{Dom}(S)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(G')$.

(ただし, $Y\cdot\varphi(g) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(-tY)g)|_{t=0}$)

このとき, $\overline{S} \supset dT(Y)$.

<u>定理</u> $\overline{dU(X)} = \overline{U_\infty(X)} = -iH$.

換言すれば, $i\cdot dU(X)$, $i\cdot U_\infty(X)$は本質的に自己共役.

証明. Vを補題1に云うものとする. 補題2を$\{T, \mathfrak{X}\} = \{V, \mathfrak{H}\}$, $S = dU(X)$, $Y = X$として適用する. 条件(i)を検証しよう. すなわち, $x \in \mathfrak{H}_0(U)$ i.e. $x = U_\psi y$ (なる元の有限一次結合) ($\psi \in C_0^\infty(G)$, $y \in \mathfrak{H}$)に対して, $V_\varphi x \in \mathfrak{H}_0(U)$ ($\forall \varphi \in C_0^\infty(G_0)$)を云う.

$$V_\varphi x = \int_{G_0} \varphi(g_0) V(g_0) \left\{ \int_G \psi(g) U(g) y \, dg \right\} dg_0 =$$

$$= \int_{G_0}\int_{G} \varphi(g_0)\psi(g_0^{-1}g)\, U(g)y \, dg\, dg_0$$

$$= \int_{G}\left\{\int_{G_0} \varphi(g_0)\psi(g_0^{-1}g)\, dg_0\right\} U(g)y \, dg \in \mathfrak{H}_0(U)$$

条件(ii)は $V=U|G_0$ よりただちにわかる．ゆえに補題2から $\overline{dU(X)} \supset dV(X)$．両辺の閉包を考えて補題1から $\overline{dU(X)} \supset -iH$．（証明終）

References

[1] Gårding, L., Note on continuous representations of Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33(1947), 331-332.

[2] Jørgensen, P. E. T., Representation of differential operators on a Lie group, J. Funct. Anal. 20(1975), 105-135.

[3] Nelson, E. and Stinespring, W. F., Representation of elliptic operators in an enveloping algebra, Amer. J. Math. 81(1959), 547-560.

[4] Warner, G., Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.