

Stokeslet とその応用

東大理 橋本 英典

§1 はしがき

ストークス源 (Stokeslet) は低いレイノルズ数の粘性流体に働く集中力による流れをあらわすストークスの方程式の解である。粘性流体中を運動する物体による流れにおいてストークス近似が成り立つ範囲 (ストークス域) での物体から遠距離での流れの様子はこれによってあらわされ、物体に働く力はこれさえ求めればただちに定まる。また、ストークス域にある外部境界の効果や、外部の慣性域への接続による慣性⁽¹⁻⁴⁾の効果を見いだすにも重要な役割を演ずるものである。ここでは、3の例題をとり、境界の存在する場合のその求め方や、その応用について論じることにする。

§2 ストークス源

点 $X = X_0$ に集中力 $F\delta(X - X_0)$ (δ はデルタ関数) が働くときの流速 V と圧力 p に対するストークスの方程式

$$\mu\Delta V = \text{grad}p - F\delta(X - X_0), \quad (1)$$

$$\text{div}V = 0 \quad (2)$$

の無限領域における解は、次のようにして求まる。まず (1) の div をとり、(2) を用いれば

$$\Delta p = F\delta(X - X_0), \quad (3)$$

これらの一般解は $r = |X - X_0|$ とすれば

$$\Delta\phi_0 = \delta(X - X_0) \quad (4)$$

の基本解

$$\phi_0 = -1/(4\pi r) \quad (3\text{次元}) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log r \quad (2\text{次元}) \quad (5')$$

を用いて、 F の方向の 2 重向き出しとして

$$p = \text{div}(F\phi_0) = (F \cdot \text{grad})\phi_0 \quad (6)$$

によって表わされる。これを (4) に代入し、(4) と $(X - X_0) \cdot \delta(X - X_0) = 0$ から得られる算式

$$\Delta[(X - X_0) \cdot F\phi_0] = 2(F \cdot \text{grad})\phi_0 \quad (7)$$

に着目すれば

$$\mu V = \frac{1}{2} \text{grad}[(X - X_0) \cdot F\phi_0] - F\phi_0 \quad (8)$$

が得られる。(6), (8) がストークスレットの表式である。

一般にストークスの方程式の流れの場合は、このような集中力の分布によってあらわされると考えられる。これからストークスの方程式の一般解が $\frac{1}{2} \mathbf{F} \phi$ の重量としての調和関数ベクトル $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ を用いて、Imaiの表式²⁾

$$\mathbf{v} = \text{grad}[\mathbf{x} \cdot \phi] - 2\phi \quad (9)$$

$$p = 2\mu \text{div } \phi \quad (10)$$

に書けることも自然に導ける。

§3 2次元くさび域でのストークス源

2次元の流れについては、速度成分 (u, v) に対して (z) を満足するように流れの関数

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

を導入し、(1)の両辺を ψ に対して

$$\mu \Delta^2 \psi = (F_1 \frac{\partial}{\partial y} - F_2 \frac{\partial}{\partial x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2)$$

が得られる。 x 軸と $\theta = \pm \alpha$ の角をなす平板にかこまれたくさび状領域を考えるために円柱座標 (r, θ) , $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を導入し、ストークスベクトルの位置を $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ とすれば

$$\Delta^2 \psi = \frac{-1}{2r_0} F_y \delta(r-r_0) \delta'(\theta-\theta_0) + \frac{1}{r_0} F_\theta \delta'(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) \quad (3)$$

を得る。ただし

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ \frac{1}{\mu} F_r &= F_1 \cos \theta_0 + F_2 \sin \theta_0, \\ \frac{1}{\mu} F_\theta &= -F_1 \sin \theta_0 + F_2 \cos \theta_0,\end{aligned}\quad (4)$$

(3)の解を求めるときは

$$\Delta^2 \Phi \equiv \delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) \quad (5)$$

の解を求めておくと便利である。

いま Φ の Mellin 変換とその逆変換

$$\hat{\Phi}_s = \int_0^\infty r^{s-1} \Phi dr \quad 0 < \text{Res} < 1 \quad (6)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\Phi}_s r^{-s} ds \quad (7)$$

を導入すれば、(5)に r^{s+2} を乗じて積分することにより

$$L_{s+1} L_{s-1} [\hat{\Phi}_{s-1}] = r_0^{s+2} \delta(\theta-\theta_0) \quad (8)$$

を得る。ただし

$$L_\nu \equiv \frac{d^2}{d\theta^2} + \nu^2, \quad (9)$$

(8)の解は

$$L_\nu [\sin \nu |\theta|] = 2\nu \delta(\theta) \quad (10)$$

に着目すれば、補足関数を除いて

$$\hat{\Phi}_{s-1} = \frac{r_0^{s+2}}{8s} (S_- - S_+), \quad S_\pm = \frac{1}{s\pm 1} \sin(s\pm 1) |\theta-\theta_0|, \quad (11)$$

と書けることがわかる。 $\hat{\Phi}_{s-1}$ を用いれば(3)の解は

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{s-1} &= -\left(\frac{1}{r_0^2} F_r \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r_0} F_\theta \frac{\partial}{\partial r_0}\right) \hat{\Phi}_{s-1} \\ &= -\frac{r_0^s}{8s} [F_r (C_- - C_+) + (s+2) F_\theta (S_- - S_+)]\end{aligned}\quad (12)$$

ただし

$$C_\pm = \operatorname{sgn}(\theta - \theta_0) \cos[(s \pm 1)(\theta - \theta_0)] \quad (13)$$

となる。

$\theta_0 = 0$ の場合について、 $\theta = \pm \alpha$ で、 $V = 0$ すなわち $\psi = \partial\psi/\partial\theta = 0$ となるように補足関数を決定しよう。

i) F_r の項,

対称性から、補足関数が $\sin(s \pm 1)\theta$ となることは明らかである。

$$\hat{\Psi}_{s-1} = -\frac{r_0^s}{8s} F_r [C_- - C_+ + a_+ \sin(s+1)\theta + a_- \sin(s-1)\theta] \quad (14)$$

とおけば境界条件から a_+ , a_- に対する連立方程式が得られこれを解けば

$$a_\pm = -[s(1 - \cos 2\alpha)_\mp (1 - \cos 2s\alpha)]/D_- \quad (15)$$

ただし

$$D_- = s \sin 2\alpha - \sin 2s\alpha \quad (16)$$

が得られる。また(7)により逆変換すれば、 D_- の0点での極からの寄与だけで ψ を表わすことができ

$$\Psi = \frac{r_0 F_1 \sin \alpha}{4\mu} \sum_j A_j \Psi_j(r, \theta) \quad (17)$$

ただし

$$A_j = \frac{1}{(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\lambda_j) \cos \lambda_j \alpha}, \quad (18)$$

$$\psi_j = \{\sin(\lambda_j - 1)\alpha \sin(\lambda_j + 1)\theta - \sin(\lambda_j + 1)\alpha \sin(\lambda_j - 1)\theta\} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda_j - 1} \text{sgn}(r - r_0) \quad (19)$$

を得る。ここで λ_j は

$$D_-(\lambda) = \lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha = 0 \quad (20)$$

の根であり、 $r \geq r_0$ に応じて実数部が正又は負のものゝ全部とる。また ψ が複素数になるときは実数部をとるように定める。実際半頂角 α が約 78° より大きいと有限個の実根が存在するが小さいと複素根が無数個あらわれ、くまびの頂角に向って、大きさ、強さが幾何級数的に減りする無限に続く渦模様が生じることは Moffatt⁷⁾ の予想に合致するものである。

ii) F_0 の項

この時は ψ が $\theta = 0$ に対して対称で、 $\hat{\psi}_{s-1}$ は

$$\hat{\psi}_{s-1} = -\frac{r_0^s}{8s} (s+2) F_2 [S_-(\theta) - S_+(\theta) - b_- \cos(s-1)\theta - b_+ \cos(s+1)\theta] \quad (21)$$

の形をとり、境界条件を満足させると

$$b_\pm = \pm [(1 - \cos 2\alpha)s \pm (1 - \cos 2s\alpha)] / (s \pm 1) D_+ \quad (22)$$

ただし

$$D_+(s) = s \sin 2\alpha + \sin 2s\alpha \quad (23)$$

が得られる。また逆変換によって

* Collins, W. M. & Dennis, S.C.R.: J. Fluid Mech. 76 (1976) 417
によればより正確によ 77.6° である。

$$\Psi = \frac{r_0 F_2}{8\mu \cos \alpha} \sum_j B_j \Psi_j(s, \theta) \quad (24)$$

ただし

$$B_j = \frac{2\sin 2\alpha - \sin 2\lambda_j \alpha}{\sin 2\alpha + 2\alpha \cos 2\lambda_j \alpha} \cdot \sin \lambda_j \alpha, \quad (25)$$

$$\Psi_j = \left[\frac{\cos(\lambda_j - 1)\theta}{\cos(\lambda_j - 1)\alpha} - \frac{\cos(\lambda_j + 1)\theta}{\cos(\lambda_j + 1)\alpha} \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\lambda_j - 1} \operatorname{sgn}(r - r_0) \quad (26)$$

となる。ただし λ_j は $D_+(\lambda) = 0$ の根で、他のときは i のときと同じである。このときも半頂角 α が約 70° より大きいと有限個の実数根だけだが、それより小さいと、無数の複素根があらわれ Moffatt の渦模様が生じることになる。(17)-(19), (24)-(25) は Kim⁵⁾ が学位論文で特別な工夫によって求めたものと一致していることがわかる。

§ 4 柱状領域^{8),9)}

一般に柱状領域を論じるには一般解として (1.9) に調和関数 ϕ_0 の勾配を加えた

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\phi} - \phi_0) - 2\boldsymbol{\phi} \quad (1)$$

をとおくのが便利である。 x_3 軸が母線方向断面 $C: x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s)$ であらわされる柱で境された領域について、境界で $\mathbf{v} = 0$ 、無限遠の速度 0 の条件を満たす解⁶⁾は、面上での接線速度 0 の条件から C 上で $\phi_s = 0$,

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\phi} = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 = \phi_0, \quad \phi_s = x_1' \phi_1 + x_2' \phi_2 = 0 \quad (2)$$

あるいは, $\omega = x_1 x_2' - x_1' x_2$ とすれば

$$\phi_3 = 0, \omega\phi_1 = x_2'\phi_0, \omega\phi_2 = -x_1'\phi_0 \quad (C\pm) \quad (3)$$

を満足し, また接線速度から

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n} + \frac{1}{\omega}\theta_0 = \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial\phi_j}{\partial n} \quad (C\pm) \quad (4)$$

を満足し, 指定した特異点 ϵ を一調和関数として定まる。半径

L の円管内のストークスレット $X_0 = (p_0, 0, 0)$ に対しては,

$$\mu\phi = \frac{1}{2} \mathbf{E}\phi_G + \tilde{\phi}, \quad \mu\phi_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot X_0)\phi_G + \tilde{\phi}_0$$

ただし $\phi_G = 1/4\pi |X - X_0|$ ととれる。円柱座標を用いてやれば

$\hat{\phi}$ と $\hat{\phi}_0$ をいたるところで解析的な調和関数として定めること

ができる。またこれを用いると円管内を速度 U で任意の方向

に運動する半径 ϵ の微小球に働く力も

$$F_j = -6\pi\mu\epsilon U [1 + \epsilon k_j + O(\epsilon^2)]$$

の形に定められる。任意の3次元微小物体に働く力も自由空

間での運動で働く力がわかっていれば k_j を用いて求まる。特

に中 軸に近い所 ($p_0 \ll 1$) で

$$k_r = 1.80436 + 2.50084\rho_0^2 \dots$$

$$k_\theta = 1.80436 + 0.83983\rho_0^2 + \dots$$

$$k_z = 2.10444 - 0.69793\rho_0^2 + \dots$$

となり, 軸方向に動くときの抵抗に比べ, (k_z と一致する) 軸に

垂直な方向に運動した方が境界の効果も抵抗が小さくなって

いることは新しい著しい結果である。

References

- 1) Hasimoto, H.: Theor. & Appl. Mech. 22 (1972)
- 2) 今井功：流体力学(前編)(裳華房 1973) P 313
- 3) 成瀬文雄：数理研講究録 234 (1975) 4.
- 4) Happel, J. and Brenner, H. : Low Reynolds Number Hydrodynamics (prentice Hall) 1965
- 5) 全文彦：東大理學博士論文(1976)
- 6) 橋本英典：数理研講究録 293 (1977) 3.
- 7) Moffatt, H.K.: J. Fluid Mech. 18 (1964) 1
- 8) Hasimoto, H.: J. Phys. Soc. Japan 41 (1976) 2143
- 9) Sano, O. & Hasimoto, H.: J. Phys. Soc. Japan 40 (1976) 884
42 (1977) 306