数理解析研究所講究録
第302巻 1977年 23-42



# 渦列における渦の合併

東京農工大　　高木 隆司
ジョンス・ホプキンス大　　L.S. コバスナイ

## 1. はしがき

すり流れにおける秩序構造は，乱流や騒音の研究家の間で興味をよんでいる。いくつかの流れ ── 乱流境界層，後流，ジェット，自由すり流 ── の中で，秩序構造を観察した論文がある。Crow & Champagne (1971) には，良い解説がのっているし，研究の現情については，Davies & Yule (1975) による報告を読むとよい。

円形ジェットや2次元自由すり流の構造は，固体境界の影響を受けないので，比較的単純である。このふたつの内でも，後者の方がより顕著な構造を持ち，Winant & Browand (1974) や Brown & Roshko (1974) らによってなされたように，可視化によってはっきりわかる。以下，2次元自由すり流に限る。

乱流の秩序構造は，層流における構造とは，レイノルズ数が高く構造がレイノルズ数にほとんど依らない点で異なって

いる。Brown & Roshko の実験では，速度差と層の厚さで作ったレイノルズ数が $O(10^4)$ で，レイノルズ数を4倍変えても，スケールの大きい構造はほとんど変わらなかった。Winant & Browand においては，レイノルズ数は 45〜850 の範囲であるが，構造に相似性が見られた。どちらの実験でも，平均流の測定値は従来のものと一致した。レイノルズ数に依存しないことは，この構造を理論的に扱う際に完全流体の仮定が許されることを示唆している。

大きなスケールの構造における2次元性は，実験条件の内では保たれている。とくに，Brown & Roshko の Figure 8 には，大きな渦が基本的に2次元であり，小さな渦は流されるにつれて3次元性を獲得していくことが示されている。このことは，乱れた円形ジェットと異なる点である。そこでは，強い規則的な3次元構造が，Yule et al (1974) によって示され，圧力変動の周方向モードが有効な音源になることが Michalke (1972) によって主張された。

自由ずり流の特徴は，しきり板の近くを除くと厚さが直線的に増加していくことで，渦の相似な配列によって強い秩序構造が見られる。増加の速さは，$x$ を流れ方向の座標，$\delta_\omega$ を

$$\delta_\omega = \Delta U \big/ (d\bar{U}/dy)_{max} \qquad (1.1)$$

で定義される渦度厚さとすると，$d\delta_\omega/dx$ で表わされる。ここで，$\Delta U$ は速度差，$\bar{U}(y)$ は平均流速である。増加の速さはいろいろな人によって測られたが，$U_1, U_2$ を層の両側の速度とすると，大部分のデータは

$$d\delta_\omega/dx = (0.181 \pm 0.015)\ \Delta U/(U_1+U_2) \qquad (1.2)$$

という関係を満している（Brown & Roshko の figure 10 参照）。$\bar{U} \equiv (U_1+U_2)/2$ で動く座標系から見ると，層の厚さは時間的に増し，その速さは次元解析より $\Delta U$ に比例するから，(1.2) のようなふるまいは容易に理解できる。Winant & Browand の実験では，(1.2) の比例係数が 0.18 でなく 0.1 になり，少し低い。このくい違いの原因は不明だが，レイノルズ数が彼らの実験でかなり低いためかも知れない。

厚さの増加の機構は，渦が次々と合併することに帰せられる。合併は多勢の人に指摘されていたが，装置の関係で，ふたつ以上の合併は Brown & Roshko 以前には報告されなかった。Winant & Browand の可視化では，ふたつの渦が近ずき，引きのばされ，たがいに他に巻きつくのが示された。この過程で，いくらかの外部の流体が引きこまれて巻きつくので，新しく生れた渦はずっと大きくなる。引きこまれた流体の量について，あまりデータはないが，Winant & Browand の

報告した例では，合併した渦は，もとの3倍のスケールになった。Davies & Yule (1975) によって述べられたように，レイノルズ応力や乱れの発生や流体の引きこみは，合併の際にもっとも強くなる。

渦のスケールや間隔は，厚さに比例して増加していくので，平均間隔 $\bar{l}$ と $\delta_w$ の比は普遍定数である。この比の実験値は Brown & Roshko によって説明されている。彼ら自身のデータは，層の両側の流体の密度比が 7 と 1/7 のとき，この比はそれぞれ 2.9 と 3.5 であった。密度が同じであれば，平均値の 3.2 が適当であろう。Winant & Browand の実験では 3.3，Spencer & Jones (1971) では 3.3〜3.8 であった。結局，比の値としては，3.3 あたりが適当と思われる。

Brown & Roshko は渦間隔のふらつきの2乗平均の平方根が，$\bar{l}$ の約33% であることを示した。渦の配置や合併は乱雑におきるが，ひとつの合併の機構は決定論的である。これは Browand (1975) によっても示された。彼は，条件サンプリング法によって渦の中の渦度分布を求めたが，合併の前も最中も，分布は層流の渦のようであった。

大きなスケールの渦の軌跡が，映画によって求められた。渦の速度には15%くらいのふらつきがあり，平均速度は，$(U_1+U_2)/2$ よりも 20%くらい小さかった。すなわち，渦は，

層の中心から低い流速の側へ引きこまれている。

大きな渦の平均寿命で動く距離は，Brown & Roshkoによって測られた。密度比が7と1/7の両方の場合に，$\delta_\omega$の約4.3倍で，ふらつきは56%あった。この距離は$\bar{l}$と同じ程度になる。

各々の渦は扁平で，長軸を流れ方向に向けた楕円に近い。測定によると，この軸比は約1.5である。一方，Winant & Browandによると，合併中は軸比が2くらいまで増す。Browandの測定によれば，ひとつの渦の中の渦度は決して一様ではなく，中心でかなり高いピークを持つ。合併中は，渦度分布にはふたつのピークが生じている。

自由ずり流の秩序構造の理論的研究は必要である。その目的のひとつは，実験データから引き出されたいくつかのパラメータを予言することである。たとえば，比$\bar{l}/\delta_\omega$，そのふらつき，渦の楕円の軸比，層の成長速度，云々。理論のほとんどは，Stuart (1971)にまとめられたように，層流の自由ずり流の線形および非線形安定性の議論である。乱流の秩序構造に関するものはわずかである。

Winant (1972)は，層の厚さの増加を，渦の2列の配置によって考えようとした。しかし，渦は規則的に配列されていて，乱雑さはまったくとり入れていない。

Moore & Saffman (1975)は，一様な渦度$\omega$を持つひとつ

の渦が，一定のずり速度 $\gamma$ の中で安定に存在する条件を求めた。彼らによれば，渦は，ずり速度を生むもとになる他の渦の列の方向に長くなるような楕円形で，軸比 $\alpha = a/b$ は，比 $\gamma/\omega$ と次式によって関係ずけられる。

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\alpha-1}{\alpha^2+1} \tag{1.3}$$

右辺は，$\alpha = 2.9$ のとき最大値 0.15 を取る。一方，$\gamma$ は渦列の各渦が一様な間隔と循環を持つと仮定して求めることができる。$\gamma$ の最大値が $l$ の最小値を与え，$l/\delta\omega$ の最小値が 3.5 と求まる。$\gamma$ が最大値を越したとき，渦は2つに分裂することが，数値計算によって示された。

実際の現象では，渦が不安定になったとき，分裂しないでほとんどいつも隣りの渦と合併する。このくい違いは，彼らが渦間隔のふらつきを考慮していなかったためである。したがって，最も簡単な方法であれ，ふらつきの効果をとり入れた理論をつくることが価値がある。

本論の目的は，渦列の不規則性を考慮に入れて，渦列のふるまいを理論的にしらべることである。ふらつきを考慮したときの，現象の描像は次のとうりである。ふらつきのために，渦のうちのあるものが強いずり速度，あるいは位置のずれを受け，隣りに合併する。すると，新らしく，間隔や循環にふ

らつきが生じる。こうして，渦列は，一定の強さのふらつきを含むある平衡状態に達するであろう。この機構についての統計的あつかいが可能である．しかし，ここでは，現象の素過程，すなわち，ひとつの渦対の合併に着目する．

実験では，層の平均厚さは，空間的に増加し時間的には一定であった。しかし，簡単のために，平均の大きさと間隔は空間的には一様で，時間的に増加する場合を考えよう．この仮定は，空間的な増加の際のひろがりの角度が小さいので許される．

合併の機構の全過程を統一的にあつかう理論は困難なので，過程の各段階を別々に解析し，それらの間のつながりは定性的に理解することにする。

第2節では，Moore & Saffman の理論を，ふらつきがある場合に修正し，ひとつの渦が安定に存在するための条件を求める．それが不安定になったとき，渦は楕円形を保ち得ないで引きのばされるが，その渦の周囲の流れは，ふらつきのために対称形ではないので，渦は分裂せず，どちらかの側に動いていくであろう。

渦が，どちらかの方向に動きはじめたとき，ひとつの渦対が動き，他の渦は静止しているという描像が描ける。渦対の各々は，たがいに他のまわりをまわり，その運動は，近ずき

すぎて最後の段階である融合がはじまるまでは，渦点の運動で近似してよい。ふたつの渦点の解析が，第3節で与えられる。

最後の段階はまったく複雑である。ここでは，保存則や，幾何学的相似性の要請から何が導びかれるかを考えてみることにする。これは，第4節でのべる。

## 2. 幾何学的パラメータの解析

簡単のために，空間的に増大する渦列のかわりに，列の方向には平均として一様で時間的に増大する渦列を考える。

安定性を考察するひとつの渦の中心を原点とし，列の方向に$x$軸をとる。渦の外ではポテンシャル流を仮定する。ふらつきを導入するために，となりのひとつの渦は$x=l$にあり循環$\Gamma$を持つこと，それから，自分も含めて他の渦は$x=n\bar{l}$（$n$は整数）にあり循環$\bar{\Gamma}$を持つことを仮定する。以下で，バーをつけた量は平均量を意味する。自分と$x=l$にある渦が合併するので，$l<\bar{l}$であり，$\bar{l}-l$は間隔のふらつき$\delta l$に等しいとおいてよい。(figure 1 参照)

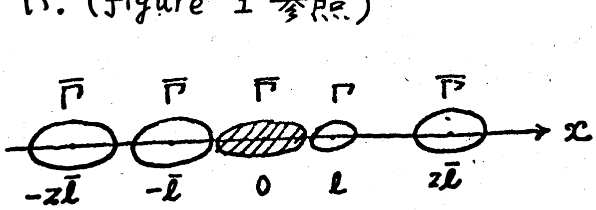



Figure 1.

原点にある渦が安定のとき，他の渦は原点がよどみ点になるようなポテンシャル流を作る。ところで，他の渦が原点に誘導する垂直方向速度は $(\bar{\Gamma}/\bar{l} - \Gamma/l)/2\pi$ に等しい。何故なら，両隣り以外の渦の効果は打消し合うからである。すると，今述べた要請から $\bar{\Gamma}/\bar{l} = \Gamma/l$ になる。これは，合併していく先の渦は平均より小さい循環を持つことになり，観察と矛盾するようである。この事情は，間隔と循環の両方に独立なふらつきを与えなかったことから生じている。渦は楕円形であり，原点の渦では軸比 $\alpha = a/b$ を持ち，他は $\bar{\alpha} = \bar{a}/\bar{b}$ を持つと仮定する。

解析を簡単にするために，さらに次の仮定をする。原点の渦は一様な渦度 $\omega$ を持ち，他は点状の渦とする。原点の渦は，他の渦によって作られるポテンシャル流の中にあり，その強さ $\gamma$ は原点における値で代表させる。

すると，$\bar{l}/\delta\omega$，$\delta l/\bar{l}$，$\bar{\alpha}$ は次のようにして求まる。原点におけるずり速度は

$$\gamma = \frac{\pi\bar{\Gamma}}{6\bar{l}^2}\left\{1 + \frac{6}{2\pi^2}\left(\frac{\bar{l}}{l} - 1\right)\right\}. \qquad (2.1)$$

平均値は，$l = \bar{l}$ として，

$$\bar{\gamma} = \frac{\pi\bar{\Gamma}}{6\bar{l}^2}. \qquad (2.2)$$

安定の臨界状態では，Moore & Saffman (1975) によって導びかれたように，$\gamma/\omega = 0.15$ である。一方，$\bar{\gamma}/\omega$ は

$$\frac{\bar{\gamma}}{\omega} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}+1}\cdot\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}^2+1}. \tag{2.3}$$

まず，$\bar{\alpha}$ を指定して $\bar{\gamma}/\omega$ を求め，(2.1)と(2.2)から

$$\frac{\gamma/\omega}{\bar{\gamma}/\omega} = \frac{0.15}{\bar{\gamma}/\omega} = 1+\frac{6}{2\pi^2}\left(\frac{\bar{l}}{l}-1\right) \tag{2.4}$$

が求まる。これから $\delta l/\bar{l} = 1-l/\bar{l}$ がわかる。一方，(2.2)から，

$$\frac{\bar{\gamma}}{\omega} = \frac{\pi\bar{\Gamma}}{6\bar{l}^2\omega} = \frac{\pi^2\bar{a}\bar{b}}{6\bar{l}^2} = \frac{\pi^2\bar{b}^2\bar{\alpha}}{6\bar{l}^2} \tag{2.5}$$

となるので，$\bar{l}/\bar{b}$ もわかる。$\bar{b}$ と $\delta_\omega$ の関係は，figure 2に示したようなふたつの経路による循環を計算することにより，

$$\delta_\omega = \Delta U\cdot\Delta y/\{U(\Delta y)-U(0)\} = \frac{\pi}{2}\bar{b} \tag{2.6}$$

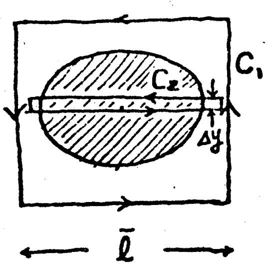



Figure 2.

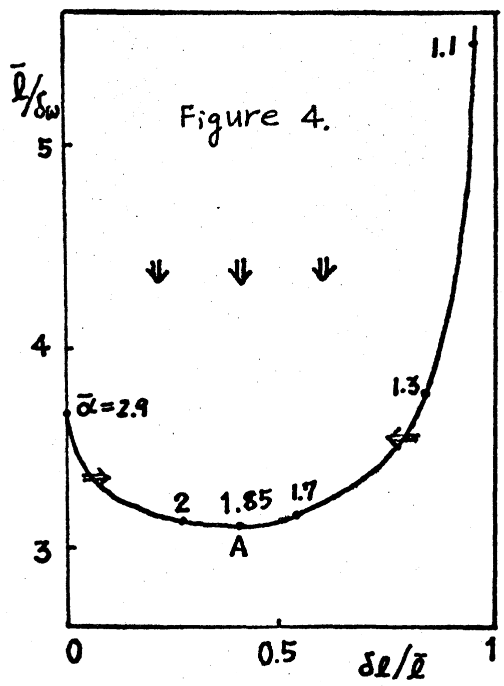



Figure 4.

Figure 3.

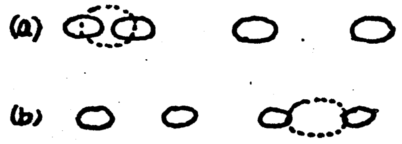
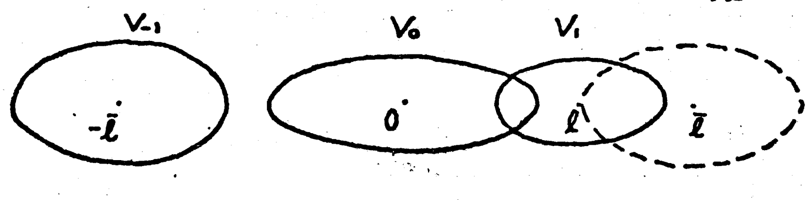



Figure 5.



となるので，$\bar{\ell}/\delta_w$も求まる。

結果は，figure 3中の曲線で表わせる。この曲線が下に凸で，$\bar{\ell}/\delta_w = 3.143$，$\delta\ell/\bar{\ell} = 0.40$，$\bar{\alpha} = 1.85$ に最小点Aを持つことに注意すべきである。

この曲線の物理的解釈は，次のとうりである。このダイヤグラム中の任意の点は列の状態に対応する。従って，点の移動は状態の変化に対応する。与えられた状態から出発して，どのような変化がおきるかを物理的に考察してみよう。

この曲線の上側の点は下に移動する。なぜなら，その点では，間隔が大きくて合併はおきないので，各渦は徐々に太っていって$\delta_w$が増加するからである。一方間隔は変らないから，$\bar{\ell}/\delta_w$は減少し，$\delta\ell/\bar{\ell}$は不変である。

曲線のずっと下側の点は，現実的な状態には対応しない。なぜなら，そこでは，渦どうしが重なりあっているので，ほぼ一様な渦層を作っているからである。これは，やがて巻き上りがおきて，新しい渦列を作るので，他の点へジャンプすることになる。

曲線のすぐ下の点は，次のふたつの場合にわけて考察する。$\delta\ell/\bar{\ell}$が大きい場合は，左へ動くであろう。なぜなら，figure 4(a)のようにふらつきが大きいと，合併によってふらつきが減少するからである。$\delta\ell/\bar{\ell}$が小さい場合は，4(b)に示し

たように，右へ動くであろう。

結局，すべての点がA点のまわりの比較的せまい領域内に集まることになる。A点における $\bar{l}/\delta_w$，$\delta l/\bar{l}$ の値は，測定値 3.3，0.33 とよく一致する。軸比 1.85 は，測定値 1.5 より少し大きめだが，Moore & Saffman の結果 2.9 よりは良い。しかし，渦度分布を一様と仮定していて，現実とかけはなれているので，この程度のくいちがいは仕方ない。

原点ふきんの渦のスケッチが figure 5 に与えられている。ここで，$V_0$ はこわれて $V_1$ に合併する寸前の渦である。$V_1$ は小さすぎるが，これは前述したように，循環のふらつきを独立に与えなかったためである。間隔と循環の両方のふらつきをとり入れる理論を作ることは，価値があると思われる。そのときは，2番目の隣人が，循環のふらつきを許すために，役目をはたさねばならない。しかし，合併する渦対の両側に，ふたつの隣人が存在するので，どちらが役目を荷なうかという任意性がある。これらの点は将来考えることにする。

## 3. 接近していく渦対の軌跡

ここでは，ふたつの渦点の動きを解析し，不規則性の効果は，初期の位置がふらついているという仮定としてとり入れる。こうして，次のように問題が設定できる：原点がよどみ

点であるようなポテンシャル流の中で，等しい循環$\bar{\Gamma}$を持つふたつの渦点の軌跡を求めよ．ずり変形速度$\gamma$は，他の渦が等しい循環$\bar{\Gamma}$を持ち，規則的な位置　$\bar{\ell}(n+1/2)$ にあるものとして求められる．ただし，合併する渦対の中央を原点に選び，列の方向に$x$軸，それと垂直方向に$y$軸をとった．

＊他の渦の寄与は，複素ポテンシャル

$$f(z) = -\frac{i\bar{\Gamma}}{2\pi}\left[\log\left(\sin\frac{\pi(z-\bar{\ell}/2)}{\bar{\ell}}\right) - \log\left(z-\frac{\bar{\ell}}{2}\right) - \log\left(z+\frac{\bar{\ell}}{2}\right)\right]$$

で表わされ，原点に誘導される速度は，

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\bar{\Gamma}}{2\pi}\left[2\left(4-\frac{\pi^2}{2}\right)\frac{y}{\bar{\ell}^2} + O\left(\frac{r^3}{\bar{\ell}^4}\right)\right], \\ v &= -\frac{\bar{\Gamma}}{2\pi}\left[2\left(4-\frac{\pi^2}{2}\right)\frac{x}{\bar{\ell}^2} + O\left(\frac{r^3}{\bar{\ell}^4}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

ここで，$r^2 = x^2+y^2$，$2(4-\pi^2/2) \fallingdotseq 1.87$．合併する渦については　$r \lesssim \bar{\ell}/2$ だから，　$O(r^3/\bar{\ell}^4)$ を無視することにする．

右側の渦の位置を　$(X(t), Y(t))$ で表わすと，(3.1) のポテンシャル流と，対の片方の寄与の重ね合せによって，

$$\left.\begin{aligned} \dot{X} &= -1.87Y - \frac{Y}{2R^2} \\ \dot{Y} &= -1.87X + \frac{X}{2R^2} \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

ここで，$R^2 = X^2+Y^2$．この式で，長さと時間は，$\bar{\ell}$ と $2\pi\bar{\ell}^2/\bar{\Gamma}$ で規格化されている．注意すべきことは，$x = \pm 1/2$ に渦対

があり，他の渦がないときは，渦が原点のまわりを1/4回転する時間は $\pi/4 = 0.785$ である。

初期位置 $(X(0), Y(0))$ に対する軌跡は，数値計算によって，figure 6のようになる。(3.2)の性格から，軌跡は $x$ 軸や $y$ 軸について対称である。$X(0) \geqq 0.5$ から出発した軌跡は求めていない。なぜなら，その場合は，渦は右側へ進み，右側の渦と合併するからである。渦に誘導される速度が0になる点は，(0.512, 0)であって，(0.5, 0)でない。これは，(3.1)の第2項目を無視したからである。

この図で注目すべきことは，(0.5, 0)の点から，約0.2の距離の内側から出発した渦は，皆(0, 0.25)で $y$ 軸を切ることである。これは，Winant & Browand (1974)の観察と一致する。$y$ 切片は，したがって，ほぼ普遍パラメータと見なしてよい。このことは，渦の融合の本質的な段階，すなわち，引きのばされ巻きつくという現象は，渦の初期条件によらないことを示している。この現象の詳細は将来考えることにする。

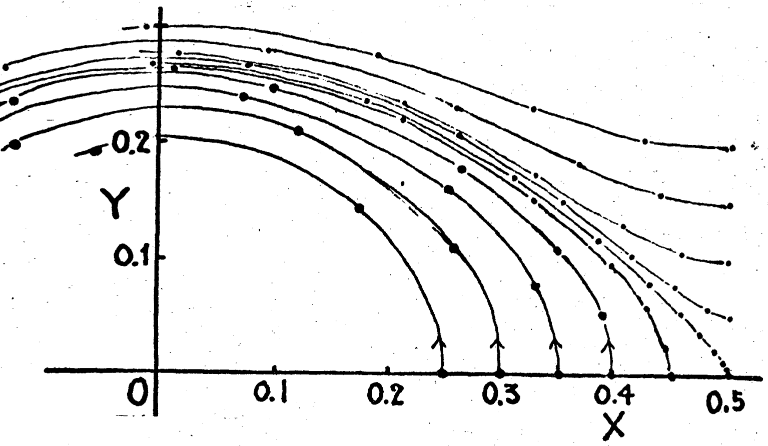



Figure 6.
ドットの間隔は時間間隔0.1に対応する。

## 4. 保存則からの結果

渦度分布 $\omega(x,y,t)$ には，いくつかの保存則がある。全渦度

$$C = \iint \omega\, dA \tag{4.1}$$

は保存する．ただし，$dA$ は面積要素である。ところが，渦列は無限にのびているので，面積積分には注意を要する．一回の合併では，遠くの渦は無関係で，高々数個の渦に変化があるので，(4.1)の積分はそれらを含む有限な領域にとり，他の渦は変化しないと仮定する。

渦の重心は保存する．すなわち，

$$X = \iint x\omega\, dA / C, \quad Y = \iint y\omega\, dA / C \tag{4.2}$$

は一定である。非粘性であれば，渦度の分散 D と，運動エネルギーに相当する量 W，

$$D^2 = \iint \{(x-X)^2 + (y-Y)^2\}\, \omega\, dA / C, \tag{4.3}$$

$$W = -\frac{\rho}{8\pi} \iiiint \omega'\omega \log\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2\}\, dA' dA \tag{4.4}$$

は保存する。(4.3) の積分は有限領域にとることができるが，(4.4) ではそうはいかない。なぜなら，(4.4) の被積分量は $\omega$ について線形でないので，合併の前後の差だけを考えるわけにいかないからである。だから (4.4) を考えるときには，注意が必要である。

これらの保存則の他に，実験から予想される相似則を仮定する。つまり，新しく生まれた渦は，前と同じような渦度分布を持つとする。すなわち，

$$\omega(x,y) = \Omega(a)\, f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right), \quad (\text{渦の内部で}). \qquad (4.5)$$

ここで，$a$ は渦のスケールを表わし，$f$ はまだ未定の関数である。$\Omega(a)$ は，figure 2 の閉曲線 $C_1$ の内部で $\omega$ を積分すると $\Delta U \cdot \bar{l}$ になることと，$a$ が $\bar{l}$ に比例することを使って求めることができる。つまり，

$$\Omega(a) \iint_{(C_1\text{内})} f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) dA = \Delta U \cdot \bar{l} \propto \Delta U \cdot a$$

において，

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/a \qquad (4.6)$$

とおくと， $\Omega(a) \cdot a^2 \cdot G \propto \Delta U \cdot a$ となる。ただし，

$$G = \iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (4.7)$$

は定数になる。こうして，次式が得られる。

$$\Omega(a) = \Omega_0 \cdot a^{-1} \qquad (4.8)$$

以下では，$a_1$ の大きさを持つふたつの渦が，$a_2$ の大きさになるとする。(4.5) と (4.8) を (4.1) に代入すると，(4.7) を使

って，次式を得る．

$$a_2 = 2a_1 \tag{4.9}$$

つまり，合併前の渦の面積の和の2倍したものが，合併後の渦の面積になり，まわりから流体を引きこんだことになる．

Dと$W$が保存するかどうかは明らかでない。なぜなら，渦が巻きついているあいだに，粘性率が有効である可能性があるからである．渦度が遠くで充分はやく減衰するときは（これは，渦の数が有限のとき正しい），

$$\frac{d}{dt}D^2 = +4\nu\ , \quad \frac{d}{dt}W = -\rho\nu\iint\omega^2 dA \tag{4.10}$$

になる．したがって，渦度分布はDの増加には影響しない．とくに，渦度分布がはげしく変動しているときは，$|dW/dt|$は大きくなる．

渦の巻き上りの過程では，$W$は大きく変化し，Dはあまり変化しないことが期待される。これを理解するために，figure 7のように，実際の過程を，ふたつの仮想的な段階で置きかえてみよう。第1では，粘性の効果がないまま渦は何回も巻きついていく．第2では，粘性のためにそれがならされる．第1と第2の段階でDの変化はわずかなのに対し，$W$は大きく変わることが予想できるであろう．そこで，Dが保存すると仮定したときの結果をしらべてみよう．

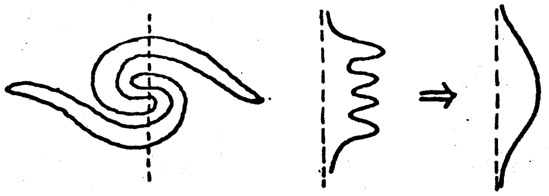


figure 7. (a) (b) 1st stage, (C) 2nd stage

ふたつの渦が合併したとき，Dが一定であるためには，その他のいくつかの渦が移動しなければならない。ここで，すべての渦が，はじめは一様な循環と間隔$\bar{l}$を持っていたとし，対の両隣が，合併の後 $\Delta l$ だけ離れていくとする（figure 8）。

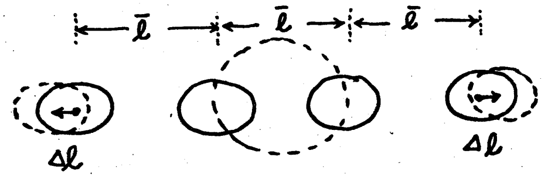



figure 8.

すると，(4.5) と (4.8) を (4.3) に代入して，次の関係式を得る。

$$\frac{\bar{l}^2}{2} a_1 G + 2a_1^3 H = a_2^3 H + (6\bar{l}\Delta l + 2\Delta l^2)\cdot a_1 G. \quad (4.11)$$

ここで，
$$H = \iint (\xi^2+\eta^2)\, f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \quad (4.12)$$

この関係式は，合併前の状態についてのパラメータをふたつ含んでいる。すなわち，$\bar{l}/a_1$ と $H/G$ である。このパラメータを指定すると，$\Delta l/\bar{l}$ が求まる。

ここで，$f$は渦の内部で1，外部で0と仮定し，渦の形は，軸比1.85（2節の結果）を持つ楕円としよう。すると，前節の結果 $\bar{l}/\delta_\omega = 3.14$ から，$\bar{l}/a = (\bar{l}/b)/1.85 = (\pi\bar{l}/2\delta_\omega)/1.85 = 2.67$ となり，一方，$H/G = 0.32$ となる。これと

(4.9) を (4.11) に代入して,

$$\Delta l/\bar{l} = 0.04 \qquad (4.13)$$

を得る。

もし，一様な渦度分布のかわりに，ガウス分布 $f(\xi,\zeta)=\exp(-(\xi^2+a^2\zeta^2/b^2))$，$a/b=1.85$ を使うと，$\Delta l/\bar{l}=0.012$ となる。どちらにしても，$\bar{l}$ の数％の移動が両隣の渦に起きる。Dのわずかな増加を考察すると，この値は多少増えるだろう。

## 5. 結語

以上の解析は，渦の合併の各段階を別々に扱った。それらを結ぶところは，まだ良く理解されていない。それから，層の厚さの増加速度についての理論はまだ作られていない。残された問題をリストアップしてみよう。

◉ ひとつの渦が不安定になったあとのふるまい。

◉ 渦の融合の過程の解析，DやWの変化の程度。

◉ 渦の集合の統計的あつかい。

最後に，有益な議論をして下さった，宇宙研の大島耕一教授および大島研究室の方々に感謝の意を表わします。

## References

Browand,F.K. 1975 Ensemble averaged large scale structure in the turbulent mixing layer, in Turbulent Mixing in Nonreactive and Reactive Flows. ed. by Murthy,S.N.B. Plenum Press.

Brown, G. & Roshko, A. 1974 On density effects and large structure in turbulent mixing layers. J. Fluid Mech.64,775-816.

Crow,S. & champange,F.H. 1971 Orderly structure in jet turburence. J. Fluid Mech. 48,547-691.

Davies,P.O.A.L. & Yule,A.J. 1975 Coherent structures in turbulence. J. Fluid Mech. 69.513-537.

Michalke,A. 1972 An expansion scheme for the noise from circular jets. Z. Flugwiss. 20,229-237: through Davies & Yule(1975).

Moore,D.W. & Saffman,P.G. 1975 The density of organized vortices in a turbulent mixing layer. J. Fluid Mech. 69,465-473.

Spencer,B.W. & Jones,B.G. 1971 Statistical investigation of pressure and velocity in the turbulent two-stream mixing layer. A.I.A.A.Paper,no.71-613.

Stuart,J.T. 1971 Nonlinear stability theory. Ann. Rev. Fluid Mech.3,347-370.

Winant,C.D. 1972 Vortex pairing in a turbulent shear layer at moderate Reynolds numbers. Ph.D. Thesis: through Winant & Browand(1974).

Winant,C.D. & Browand,F.K. 1974 Vortex pairing: The mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number. J. Fluid Mech. 63,237-255.

Yule,A.J., Bruun,H.H., Baxter,D.R.J. & Davies,P.O.A.L. 1974 Structure of turbulent jets. University of Southampton, ISVR Memo.no.506: through Davies & Yule(1975).