数理解析研究所講究録
第302巻 1977年 58-78

細長い物体のまわりのおそい流れ

東大 生研　　成瀬文雄

§1 あらまし

細長い物体のまわりのおそい流れについて、つぎの仮定で研究する。1. 基礎方程式はストークス方程式，2. 物体の形は任意で、代表的長さを ℓ とする，3. 物体の断面の形も任意（円への写像関数が既知）で、代表的長さを b とする，4. 物体の速度 $\mathbb{U}_B(s)$ は任意で，物体にそって変ってよい，ここで s は物体の中心線にそって、ある点から測った長さとする，5. 物体がないときの速度 $\mathbb{U}(\mathbb{r})$，圧力 $P(\mathbb{r})$ はストークス方程式をみたす範囲内で任意に与えられている。ここで $\mathbb{r}$ は位置ベクトルである，6. $k\,(= b/\ell) \ll 1$ を仮定する。

以上のような仮定のもとに、$O(k^\nu,\ 0<\nu<1)$ まで正しい積分方程式を、きりつなぎ法で導出し、つぎのような場合に、この積分方程式の厳密解が得られることを示す。(† 次頁下注)

(i) 断面の大きさが s にそって、ある特別の分布をしている

ときの直線状物体の運動。(ii) 断面が一様なリングの運動。(iii) 断面が一様でかつ無限に続く螺旋状物体の回転してしかも適当な速度での直進運動。

細長い物体のまわりのおそい流れについては、断面が円の場合には、Hancock[1], Tchen[2], Cox[3], Keller + Rubinow[4] などによって、また断面が円または楕円でかつ直線状物体の場合にはBatchelor[5]によって、積分方程式による方法またはパラメータ $\varepsilon\left(=(\log 1/\kappa)^{-1}\right)$ による展開の方法で研究されてきた。本稿の研究は上記文献と比較して、つぎの点に特徴がある。(1) 得られた積分方程式または ε による展開の方法、いづれも、断面の形が任意(円柱への写像関数が既知)である場合に適用できること。(2) 断面が一様なリングの運動の解は、リング面に直角な運動を除いて、断面が円の場合についても、$O(\kappa^{\nu}, 0<\nu<1)$ の精度まで正しい解は得られていないと思われるが、断面が任意の場合についてこの精度まで正しい解が得られたこと。(3) 無限に続く螺旋の運動については、断面が円の場合、積分方程式の解が Lighthill (Flagellar Hydrody-

---

† 積分方程式の厳密解は $\varepsilon\left(=(\log 1/\kappa)^{-1}\right)$ による展開の解を ε^{∞} まで重ね合わすことによっても得られる。筆者が本研究集会でなした講演のときには、このような方法によって本稿にのべられている結果と同一の結果を示した。

namics, Lecture Note, 1975) によって得られているが、断面が任意の場合に拡張されていること。

§2. 基礎方程式ときりつなぎ法

いま無次元化変数として

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^*/U_0 , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^*/l , \quad p^* l/\mu U_0 = p \qquad (1)$$

をえらぶとき、ストークス方程式は

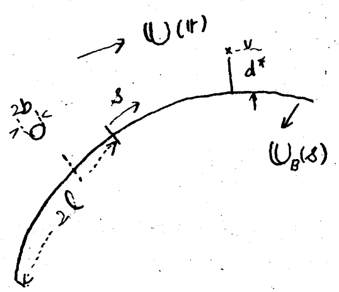
$$\Delta \mathbf{q} - \nabla p = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \qquad (2)$$

となる。また境界条件はつぎのようになる。

$$\text{物体上}: \quad \mathbf{q} = \mathbb{U}_B(s) \qquad (3)$$

$$\text{物体がないとき}: \quad \mathbf{q} = \mathbb{U}(\mathbf{r}) , \quad p = P(\mathbf{r}) \qquad (4)$$

この問題には代表的長さが2つある。1つは物体の長さの尺度を表わす l と、他の1つは物体の断面の尺度を表わす b である。したがってこれらを使って2つの変数を作ることができる。いま考えている点から物体までの距離を d^* とするとき、



第1図

$$d = d^*/l , \quad \bar{d} = d^*/b \qquad (5)$$

で定義される d, $\bar{d}$ を考え、$d \sim O(1)$ を外部領域とし、$\bar{d} \sim O(1)$ を内部領域としよう。

§3　外部領域と外部解

細長い物体の中心線上にストークス源、2重ストークス源、---を分布させて、外部解として用いることができる。2重ストークス源、----は物体上の境界条件を満足させようとするときには必要であるが、外部解で果す役割はストークス源と比較して $O(K)$ だけ少さくなる。したがって、$O(K^{\nu},\ 0<\nu<1)$ まで正しい結果を求めようとする現在、中心線上にストークス源だけを分布させたので充分である。

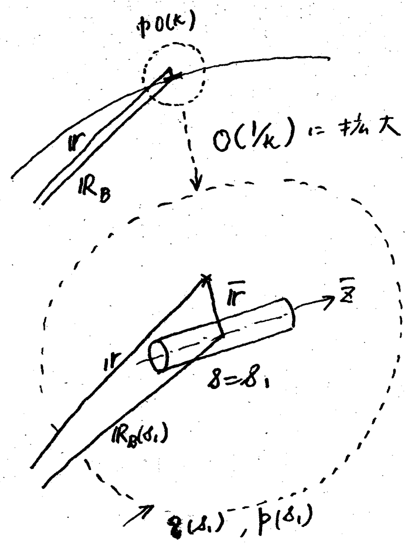
$d = d^*/\ell \sim O(1)$ が外部領域であるから、外部変数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/\ell$ とし、s 上に強さ、方向とも未定のストークス源 $C(s)\,\boldsymbol{\ell}'(s)$ を分布させたものを外部解としてとる。このとき外部解の速度 $\mathbf{q}$、圧力 p はつぎのように表わされる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) - \int_{s_0}^{s_2} C(s)\left\{\frac{\boldsymbol{\ell}'(s)}{R} + \frac{(\boldsymbol{\ell}'(s)\cdot\mathbf{R})}{R^3}\mathbf{R}\right\} ds \qquad (6)$$

$$p = P(\mathbf{r}) - 2\int_{s_0}^{s_2} C(s)\,\frac{(\boldsymbol{\ell}'(s)\cdot\mathbf{R})}{R^3}\,ds \qquad (7)$$

ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_B(s)$ であり、また $\mathbf{R}_B(s)$ は ds の位置ベクトルである。なおストークス源の強さ $C(s)$、方向 $\boldsymbol{\ell}'(s)$ は内部解とのマッチングによりきまる量である。

§4　内部領域と内部解



第２図

内部領域は $\bar{d}=d^*/b \sim O(1)$ であるから、内部変数 $\bar{\mathbb{r}}$ として

$$\bar{\mathbb{r}} = (\mathbb{r} - \mathbb{R}_B(s_1))/K \qquad (8)$$

のようにとる。この場合内部領域の中 $O(K)$ の部分が $O(1)$ に拡大されることになる。いま $O(K)$ の量を省略するとき、内部領域ではつぎのようなことが成立する。

(1) 物体の形は２次元物体（z方向に変化しない）として取扱ってよい。

(2) 物体より遠く、共通領域（$\bar{r}\sim O(1/K^s)$, $0<s<1$）は外部変数 $d\sim 0$ の領域と考えてよいから、共通領域での速度、圧力は外部解より $q(s_1)$, $p(s_1)$ の形で与えられる。したがって内部領域の問題としては、$q(s_1)$, $p(s_1)$ の一様流中に２次元物体がおかれたときの解をもってくればよい。

(3) 細長い物体がある流れの中にあるとき、物体近傍まで流れの状態はあまり変化しないで、物体近傍つまり内部領域で急速に速度の変化がおこる。したがって、粘性応力，圧力とも $O(\frac{1}{K}\cdot\frac{\mu U_0}{\ell})$ の量で，大変大きい力が表面に働くことになる。

以上の様なことを考慮して、内部変数はつぎのように選ばれる。

$$\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} - \mathbf{R}_B(s_1))/k \quad , \qquad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \quad , \qquad \bar{p} = k(p - P_B) \tag{9}$$

いま $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\mathbf{t}$ は $\bar{z}$ 方向の単位ベクトルとし、つぎのように $\mathbf{t}$ に平行な流れと $\mathbf{t}$ に直角な流れに分割する。

$$\bar{\mathbf{q}} = w\mathbf{t} + \mathbf{v} \tag{10}$$

$$\mathbf{U}_B(s_1) = W_B(s_1)\mathbf{t} + \mathbf{V}_B(s_1) \quad , \qquad \mathbf{U}(s_1) = W(s_1)\mathbf{t} + \mathbf{V}(s_1) \tag{11}$$

(10), (11) を (2), (3) に代入して $\partial/\partial z = 0$ を用いるとき、$w = w(x,y)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y)$ に対する方程式及び境界条件として

$$\left.\begin{aligned} &\Delta w = 0 \\ &\text{物体上}\ ;\quad w = W_B(s_1) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \mathbf{v} - \nabla \bar{p} = 0 \quad , \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \\ &\text{物体上}\ ;\quad \mathbf{v} = \mathbf{V}_B(s_1) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

が得られる。ここで Δ, ∇ ともに2次元 $(\bar{x}, \bar{y})$ に関するオペレーターである。

(i) $\mathbf{v}$ に対する解

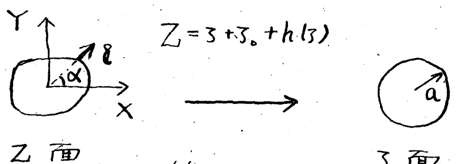
2次元物体のまわりのおそい流れにおける内部解(文献(6))がそのまま適用できる。$\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2} = \bar{\rho}$ で $\bar{\rho}$ を定義して、$\bar{\rho} \gg 1$ のとき $\mathbf{v}$, $\bar{p}$ はつぎのような漸近解をもつ。

$\bar{\rho} \gg 1$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v} &= B\left[\left(\log\frac{\bar{\rho}}{a_1} - b_1(\mathbf{l})\right)\mathbf{l} - \frac{(\mathbf{l}\cdot\bar{\boldsymbol{\rho}})\bar{\boldsymbol{\rho}}}{\bar{\rho}^2} - C_1(\mathbf{l})\,\mathbf{f}\right] + \mathbf{V}_B(s_1) + O\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) \\ \bar{p} &= -\frac{2B(\mathbf{l}\cdot\bar{\boldsymbol{\rho}})}{\bar{\rho}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{\rho}^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ここでストークス源の強さ及び方向を表わす B, $\mathbf{l}$ は未定

で，マッチングからきまる。またZ面（zに直角な面）における断面の形が、写像関数



第3図

$Z = \zeta + \zeta_0 + h(\zeta)$ $(\zeta \to \infty \ ; \ h(\zeta) \to 0)$

でζ面の半径 a の円に写像されるとき、a_1、$b_1(\ell)$，$c_1(\ell)$ はつぎのようにきまる。

$$a_1 = a, \quad b_1(\ell) = -\frac{1}{2}\left(1 + \gamma\cos(\beta + 2\alpha)\right), \quad c_1(\ell) = \frac{\gamma}{2}\sin(\beta + 2\alpha)$$

ここで

$$\gamma e^{i\beta} = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta}h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}\left(1 + h'(ae^{i\theta})\right)}\, d\theta \qquad (15)$$

また α は ℓ と X軸とのなす角である。

ストークス源の強さ及び方向 B，ℓ がきまるとき、単位長さ当り物体に働く力の z に直角な成分 $\mathbb{F}'$ は

$$\mathbb{F}' = 4\pi\mu U_0 B \ell \qquad (16)$$

で与えられる。

(ii) w に対する解

$w = f(\zeta) + g(\bar{\zeta})$ を用いて (14) 式に相当する解を求めるとき

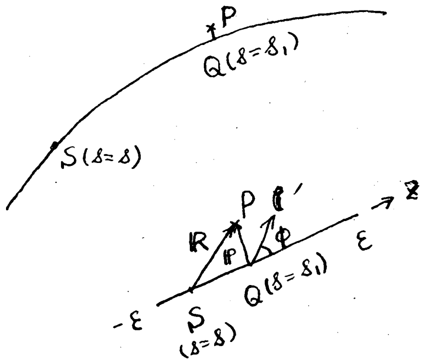
$$\bar{\rho} >> 1 \ ; \quad w = A \log\frac{\bar{\rho}}{a_1} + w_B(\theta_1) + O\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) \qquad (17)$$

が得られ、また単位長さ当り物体に働く力の z 成分 F_z は

$$F_z = 2\pi\mu U_0 A \qquad (18)$$

のようにきまる。

§5 共通領域における外部解の表示



第4図

共通領域の点をPとし、Pから最も近い物体上の位置を $Q(s=s_1)$ とする。$\overrightarrow{QP}=\mathbf{p}$ とおくとき、$p\sim O(k^{1-\delta},\ 0<\delta<1)$ となる。

(6)式のつぎの積分に注目しよう。

$$I=\int_{s_0}^{s_2} c(s)\left\{\frac{\mathbf{l}'(s)}{R}+\frac{(\mathbf{l}'(s)\cdot\mathbf{R})}{R^3}\right\}ds$$

この積分に含まれるRは $s=s_1$ の付近で $O(k^{1-\delta},\ 0<\delta<1)$ の量となるため、s_1の付近だけこの積分を分離して取扱う。

$$I=\int_{s_0}^{s_1-\varepsilon}+\int_{s_1-\varepsilon}^{s_1+\varepsilon}+\int_{s_1+\varepsilon}^{s_2} c(s)\left\{\frac{\mathbf{l}'(s)}{R}+\frac{(\mathbf{l}'(s)\cdot\mathbf{R})}{R^3}\mathbf{R}\right\}ds=I_1+I_2+I_3 \quad (7)$$

のごとくわけて、第2番目の積分I_2に対し、$p\ll\varepsilon\ll l$ のようにεをとり、その部分の物体を図のごとく直線でおきかえる。また $\mathbf{l}'(s)$ のz軸となす角をϕ、$\mathbf{l}'(s)$ のzに直角な面への射影の方向をx'方向にとり、x'方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_{x'}$ とおく。また現在の近似の程度では、I_2 の積分においては $\mathbf{R}=\overrightarrow{SP}$ として計算しなければならないが、$I_1,\ I_3$ においては $\mathbf{R}=\overrightarrow{SQ}$ とおいたのでよい。

以上のような注意をして、共通領域Pにおける外部解の速度 $\mathbf{v}$ を計算するとき、$\mathbf{v}$ は

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{q} &= \mathbf{U}(s_1) + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left[4C(s_1)\cos\phi\left(\log\rho - \log 2 + \tfrac{1}{2}\right)\right]\mathbf{t}} \\
&\quad + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2C(s_1)\sin\phi\left\{(\log\rho - \log 2)\mathbf{e}_{x'} - \frac{(\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_{x'})}{\rho^2}\mathbf{P}\right\}} + \mathbf{K}(s_1),
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

ここで

$$\mathbf{K}(s_1) = \int_{s_0}^{s_1-\varepsilon} + \int_{s_1+\varepsilon}^{s_2} \left\{ -C(s)\left(\frac{\mathbf{l}'(s)}{R} + \frac{(\mathbf{l}'(s)\cdot\mathbf{R})}{R^3}\mathbf{R}\right)\right\} ds$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{- 4C(s_1)\cos\phi\,\mathbf{t}\log\varepsilon - 2C(s_1)\sin\phi\,\mathbf{e}_{x'}\log\varepsilon}$$

のように得られる。ここで $\mathbf{R}$ は s と s_1 を結ぶベクトルである。また上式で $\sim\sim\sim$ の部分は、(19) の I_2 の計算の結果でてきたものである。

§6 共通領域におけるマッチングと積分方程式

共通領域 P の内部解の表示は、(14), (17) に $\bar{\rho} = \rho/k$ を代入し、かつ $\lambda = \log 1/k$ とおいて

$$\mathbf{q} = A(\log\rho + \lambda - \log a_1)\mathbf{t} + B\left[(\log\rho + \lambda - \log a_1 - b_1(\mathbf{l}))\mathbf{l} - \frac{(\mathbf{P}\cdot\mathbf{l})\mathbf{P}}{\rho^2} - C_1(\mathbf{l})\mathbf{j}\right] + \mathbf{U}_B(s_1) \cdots (21)$$

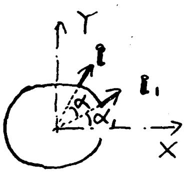
のように得られる。(20), (21) のマッチングから

$$\left.\begin{aligned}
&4C(s_1)\sin\phi = A, \quad 2C(s_1)\sin\phi = B, \quad \mathbf{e}_{x'} = \mathbf{l} \\
&C(s_1)\mathbf{l}'(s_1) = C(s_1)\cos\phi\,\mathbf{t} + C(s_1)\sin\phi\,\mathbf{e}_{x'} = (A/4)\mathbf{t} + (B/2)\mathbf{l}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

が得られる。また (20) と (21) を等置して、(22) を代入するとき、$A(s)$, $B(s)\mathbf{l}(s)$ の3箇の未知関数に対するつぎの積分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{K}(s_1) &= A\left(\lambda + \log 2 - \tfrac{1}{2} - \log a_1\right)\mathbf{t} + B\left[\left(\lambda + \log 2 - b_1(\mathbf{l}) - \log a_1\right)\mathbf{l} - c_1(\mathbf{l})\,\mathbf{g}\right] + \mathbb{U}_B(s_1) - \mathbb{U}(s_1)\\ &\text{ここで}\\ \mathbb{K}(s_1) &= \int_{s_0}^{s_1-\varepsilon} + \int_{s_1+\varepsilon}^{s_2}\left[-\frac{\frac{A}{4}\mathbf{t} + \frac{B}{2}\mathbf{l}}{R} - \frac{\left\{\frac{A}{4}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{t}) + \frac{B}{2}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{l})\right\}}{R^3}\mathbf{R}\right]ds - (A\mathbf{t} + B\mathbf{l})\log\varepsilon\end{aligned}\right\}(23)$$

積分方程式(23)は未定のベクトル $\mathbf{l}$ を含み、かつ $b_1(\mathbf{l})$、$c_1(\mathbf{l})$ などが $\mathbf{l}$ の方向によって変るから取扱い難い。この点を改良するため、$\mathbf{l}$, $\mathbf{g}$ の代りに $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{g}_1$ を導入し、$\mathbf{l}_1$, $\mathbf{g}_1$ の方向はあらかじめ定っているとして、積分方程式の書き換えをする。



乙面

第5図

$$B\mathbf{l} = I\mathbf{l}_1 + J\mathbf{g}_1, \quad b_1(\mathbf{l}) = -\tfrac{1}{2} + \bar{b}_1(\mathbf{l}) \qquad (24)$$

とおき、また乙面でXと $\mathbf{l}_1$ のなす角を α_1、$\mathbf{l}$ と $\mathbf{l}_1$ のなす角を α とおくとき、(15), (24)より

$$\bar{b}_1(\mathbf{l}) = -\frac{\gamma}{2}\cos(\beta + 2\alpha_1 + 2\alpha), \quad c_1(\mathbf{l}) = \frac{\gamma}{2}\sin(\beta + 2\alpha_1 + 2\alpha)$$

$$\bar{b}_1(\mathbf{l}_1) = -\frac{\gamma}{2}\cos(\beta + 2\alpha_1), \quad c_1(\mathbf{l}_1) = \frac{\gamma}{2}\sin(\beta + 2\alpha_1)$$

$$\cos\alpha = \frac{I}{B}, \quad \sin\alpha = \frac{J}{B}$$

が成立する。上式よりつぎの関係式が得られる。

$$B\left(\bar{b}_1(\mathbf{l})\,\mathbf{l} + c_1(\mathbf{l})\,\mathbf{g}\right) = \left(I\,\bar{b}_1(\mathbf{l}_1) + J\,c_1(\mathbf{l}_1)\right)\mathbf{l}_1 + \left(-J\,\bar{b}_1(\mathbf{l}_1) + I\,c_1(\mathbf{l}_1)\right)\mathbf{g}_1$$

上式を(23)に代入し、$s_1 \to s$, $s \to s'$ の変数変換をして、

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{K} &= A\left(\lambda + \log 2 - \tfrac{1}{2} - \log a_1\right)\mathbf{t} + \left[\left(\lambda + \log 2 + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(\mathbf{l}_1) - \log a_1\right)I - c_1(\mathbf{l}_1)J\right]\mathbf{l}_1\\ &\quad + \left[-c_1(\mathbf{l}_1)I + \left(\lambda + \log 2 + \tfrac{1}{2} + \bar{b}_1(\mathbf{l}_1) - \log a_1\right)J\right] + \mathbb{U}_B(s) - \mathbb{U}(s)\\ &\text{ここで}\\ \mathbb{K} &= \int_{s_0}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{s_2}\left[-\frac{\frac{A}{4}\mathbf{t} + \frac{1}{2}(I\mathbf{l}_1 + J\mathbf{g}_1)}{R} - \frac{\frac{A}{4}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{t}) + \frac{1}{2}\left\{I(\mathbf{R}\cdot\mathbf{l}_1) + J(\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}_1)\right\}}{R^3}\mathbf{R}\right]ds'\\ &\quad - (A\mathbf{t} + I\mathbf{l}_1 + J\mathbf{g}_1)\log\varepsilon\end{aligned}\right\}(25)$$

が得られる。未知関数 $A(s)$, $I(s)$, $J(s)$ に関する積分方程式(25)がとけるとき、物体に働く力が決定できる。いま ds 部分に働く力を $\mathbf{f}\,ds$ とするとき

$$\mathbf{f} = 2\pi\mu U_0 \left(A\mathbf{t} + 2B\mathbf{l} \right) = 2\pi\mu U_0 \left(A\mathbf{t} + 2I\mathbf{l}_1 + 2J\mathbf{g}_1 \right) \tag{26}$$

となり、物体に働く力 $\mathbf{F}$ および原点のまわりのトルク $\mathbf{G}$ は

$$\mathbf{F} = l\int_{s_0}^{s_2} \mathbf{f}\,ds \quad , \quad \mathbf{G} = l^2\int_{s_0}^{s_2} \mathbf{r}(s)\times\mathbf{f}\,ds \tag{27}$$

のようにきまる。

特別の形の物体の運動に対しては、この積分方程式の解は容易にみつかるが、この解を直接求めることが難しい場合も多い。このときは解を $\varepsilon = (1/\lambda)$ について展開する方法で求めることができる。すなわち

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n A_n \ , \quad I = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n I_n \ , \quad J = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n J_n \ , \quad \mathbf{K} = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n \mathbf{K}_n \tag{28}$$

のごとく展開して(25)式に代入し、$\mathbf{l}_1$ の方向を $\mathbf{W} - \mathbf{w}_0 = \mathbf{W}_0$ の方向にとるとき、つぎの漸化式が得られる。

$$A_1 = W - w_B = W_0 \ , \quad I_1 = |\mathbf{W} - \mathbf{w}_0| = V_0 \ , \quad J_1 = 0$$

$n \geq 2:$

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\log\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\right) A_{n-1} + K_{n-1} \\ I_n &= \left(\log\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} + \bar{b}_1(\mathbf{l}_1)\right) I_{n-1} + c_1(\mathbf{l}_1) J_{n-1} + d_{n-1} \\ J_n &= \left(\log\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} - \bar{b}_1(\mathbf{l}_1)\right) J_{n-1} + c_1(\mathbf{l}_1) I_{n-1} + e_{n-1} \end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbb{K}_{n-1}\boldsymbol{t} + d_{n-1}\boldsymbol{l}_1 + e_{n-1}\boldsymbol{f}_1 = \mathbb{K}_{n-1} = \left(\int_{s_0}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{s_2}\right)\Big[-\frac{\frac{A_{n-1}}{4}\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}(I_{n-1}\boldsymbol{l}_1 + J_{n-1}\boldsymbol{f}_1)}{R} \\
&-\frac{\frac{A_{n-1}}{4}(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{t}) + \frac{1}{2}\{I_{n-1}(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{l}_1) + J_{n-1}(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{f}_1)\}}{R^3}\mathbb{R}\Big]ds' - (A_{n-1}\boldsymbol{t} + I_{n-1}\boldsymbol{l}_1 + J_{n-1}\boldsymbol{f}_1)\log\varepsilon
\end{aligned}\right\} (30)
$$

まず(29)を用いて境界条件より A_1, I_1, J_1 がきまる。つぎに(30)の $\mathbb{K}_1$ を計算して K_1, d_1, e_1 がきまり、さらに(30)より A_2, I_2, J_2 がきまる。以下この手順をくりかえせば高次の項まで求めることができる。

本稿では、以下において、積分方程式(25)の厳密解を求めてみよう。

§7 直線状物体の運動

(i) 積分方程式の簡単化

(25)の積分 $\mathbb{K}$ が簡単な形になり、かつ $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{t}$ に直角方向に分離できる。その結果軸方向の流れについての積分方程式と軸に直角方向の流れに対する積分方程式がそれぞれつぎのように得られる。

(a) 軸方向の流れに対する積分方程式

$$
\left.\begin{aligned}
&K = A\left(\lambda + \log 2 - \frac{1}{2} - \log\frac{a_1}{\sqrt{1-s^2}}\right) + w_B(s) - W(s) \\
&\text{ここで} \quad K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{A(s) - A(s')}{|s'-s|}ds'
\end{aligned}\right\} (31)
$$

が軸方向の流れに対する積分方程式として得られ，なお代表的長さ l は物体の長さの半分にとってある。(31) をといて $A(s)$ がきまれば、軸方向に働く力 F_t は次式できまる。

$$F_t = 2\pi\mu U_0 l \int_{-1}^{1} A\,ds \qquad (32)$$

(b) 軸に直角方向の流れに対する積分方程式

境界条件 $\mathbf{V}-\mathbf{V}_B=\mathbf{V}_0$ は s によらないと考え、$\mathbf{k}_1$ の方向を $\mathbf{V}_0$ の方向にとる。このとき軸に直角方向の流れに対する積分方程式として次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{d} &= \left(\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(k_1) - \log\frac{a_1}{\sqrt{1-s^2}}\right) I - c_1(k_1) J - V_0 \\
\mathbf{e} &= -c_1(k_1) I + \left(\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(k_1) - \log\frac{a_1}{\sqrt{1-s^2}}\right) J \\
\text{ここで}\quad \mathbf{d} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{I(s)-I(s')}{|s'-s|}\,ds', \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{J(s)-J(s')}{|s'-s|}\,ds'
\end{aligned}\right\} (33)$$

(33) をといて $I(s)$, $J(s)$ がきまれば、軸に直角に働く力 $\mathbf{F}'$ は

$$\mathbf{F}' = 4\pi\mu U_0 l \left[\mathbf{k}_1 \int_{-1}^{1} I\,ds + \mathbf{j}_1 \int_{-1}^{1} J\,ds \right] \qquad (34)$$

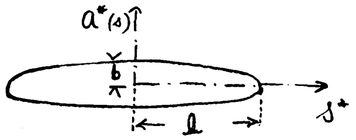
で与えられる。

(ii) 積分方程式をみたす解

(31), (33) を考慮して、つぎのような条件がみたされているときには、積分方程式の解が容易にみつかる。

(1) $W_0 = W(s) - W_B(s)$, V_0 がそれぞれ s によらない定数であるとき。

(2)



第6図

$a_1 = \sqrt{1-s^2}$ すなわち

$$\frac{s^{*2}}{l^2} + \frac{a^{*2}(s)}{b^2} = 1 \qquad (35)$$

が成り立つとき。ここで $*$ は無次元されてない量を表わす。また $b = a^*(0)$ ととることにする。

(3) $\bar{b}_1(k_1)$, $c_1(k_1)$ が s によらないとき。すなわち断面が相似な形をしていて、捩れてないとき。

(a) 軸方向の流れ

(1), (2) の条件をみたすとき、$A(s) =$ 一定 , $k = 0$ の解として

$$A = \frac{W_0}{\log \frac{2l}{a^*(0)} - \frac{1}{2}} \quad , \quad F_t = \frac{4\pi\mu W_0^* l}{\log \frac{2l}{a^*(0)} - \frac{1}{2}} \qquad (36)$$

が得られる。

(b) 軸に直角方向の流れ

(1), (2), (3) がみたされているとき、$I(s) =$ 一定 , $J(s) =$ 一定, $d = e = 0$ の解として、つぎの結果が得られる。

$$I = V_0 \left(\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(k_1)\right)/\Delta \quad , \quad J = V_0 c_1(k_1)/\Delta$$

$$\mathbb{F}' = 8\pi\mu V_0^* l \left[\left(\log \frac{2l}{a^*(0)} + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(k_1) \right) \mathbf{k}_1 + c_1(k_1) \mathbf{j}_1 \right] / \Delta \qquad (37)$$

ここで

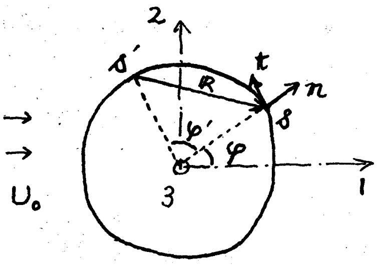
$$\Delta = \left(\log \frac{2l}{a^*(0)} + \frac{1}{2} \right)^2 - \bar{b}_1^2(k_1) - c_1^2(k_1)$$

断面が円の場合には、ストークス方程式の厳密解が分っているから、(36)、(37) の精度を調べることができる。この場合 (36)、(37) の誤差は $O(k^2)$ であることが分る。

§8 断面が一様なリングの運動

つぎの4箇の場合について積分方程式の厳密解が存在する。

(i) 一様なリングのリング面内の運動



第7図

左図のように座標軸をえらび、$(U_0, 0, 0)$ の一様流中に半径 l のリングがおかれた場合について考える。断面が一様の仮定から $\log a_1 = 0$ ととってよい。(25) 式の $\mathbb{U}(s)$ は

$\mathbb{U}(s) = -\sin\varphi\,\mathbf{t} + \cos\varphi\,\mathbf{n}$ となるから、$\mathbf{l}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_3$ ととる。

(25) の A, I, J に対し

$$\left.\begin{array}{l} A = -\sin\varphi\,\bar{A}, \quad I = \cos\varphi\,\bar{I}, \quad J = \cos\varphi\,\bar{J} \\ \bar{A},\ \bar{I},\ \bar{J} \ \cdots\cdots \ \text{一定} \end{array}\right\} \quad (38)$$

を仮定し、$\mathbb{K}$ の被積分項は s' の関数であることに注意して積分するとき

$$\mathbb{K} = -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left[\left(-2\log 2 + \frac{3}{2}\right)\bar{A} - 2\bar{I}\right] + \cos\varphi\,\mathbf{n}\left[(-2\log 2 + 1)\bar{I} - \bar{A}\right] + \cos\varphi\,\mathbf{e}_3\left[(-2\log 2 + 2)\bar{J}\right] \quad (39)$$

が得られる。(39) を (25) に代入して $\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ が決定でき、

このようにして得られた $\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ と (26), (27), (38) より物体に働く力 $\mathbb{F}$ がきまる。$\mathbb{F}$ の主流方向の成分 F_1 は

$$F_1 = \frac{3\pi\mu U_0 L\left[S^2+\left(\frac{2}{3}\bar{b}_1-\frac{13}{3}\right)S+\frac{17}{4}-\frac{7}{3}\bar{b}_1-\frac{1}{3}\left(\bar{b}_1^{\,2}+c_1^{\,2}\right)\right]}{S^3-4S^2+\left(\frac{11}{4}+\bar{b}_1-\bar{b}_1^{\,2}-c_1^{\,2}\right)S+\frac{3}{2}-4\bar{b}_1+2\left(\bar{b}_1^{\,2}+c_1^{\,2}\right)} \tag{40}$$

ここで

$$S = \log(8l/a^*) \quad , \quad L = 2\pi l \tag{41}$$

のようになる。断面が楕円（半長軸の長さ A^*, 半短軸の長を B^*）のときには、n と半長軸の間の角を α とおいて、(15) より

$$a^* = \frac{A^*+B^*}{2} \quad , \quad \bar{b}_1 = -\frac{\sigma^2}{2}\cos 2\alpha \; , \quad c_1 = \frac{\sigma^2}{2}\sin 2\alpha \; , \quad \sigma^2 = \frac{A^*-B^*}{A^*+B^*} \tag{42}$$

のようにとればよいことが分る。

(ii) 一様なリングのリング面に直角方向の運動

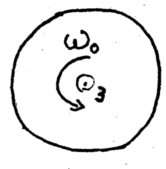
第9図のように座標軸をえらび、$(0, 0, V_0)$ の一様流中に上記のリングがおかれた場合を考える。$\mathbb{U}(8) = \mathbb{e}_3$ となるから、$\mathbb{l}_1 = \mathbb{e}_3$, $\mathbb{g}_1 = \mathbb{n}$ ととって、$A = 0$, $I = \mathrm{const}$, $J = \mathrm{const}$ の解が存在する。(i) と同じような計算をして、物体に働く主流方向の成分 F_3 は

$$F_3 = \frac{4\pi\mu U_0 L\left(S-\frac{5}{2}+\bar{b}_1\right)}{S^2-2S-\frac{5}{4}+3\bar{b}_1-\bar{b}_1^{\,2}-c_1^{\,2}} \tag{43}$$

となる。S, L は (41) と同様で、a^*, $\bar{b}_1$, c_1 も断面が楕円のときは (42) をもってくればよい。ただし α は、ここでは、$\mathbb{e}_3$ と半長軸の間の角になる。とくに断面が円のときには、

Tchen[2] や Masuda[7] の結果と一致する。

(iii) 一様なリングの3軸のまわりの回転



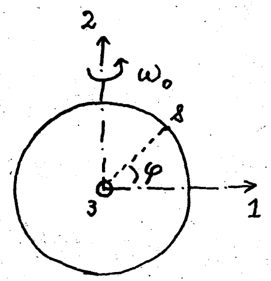
第8図

角速度 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ で回転しているとき、$\mathbb{U}_B = \mathbf{t}$ となり、$A = \mathrm{const}$, $I = J = 0$ の解がある。リングに働く3軸のまわりのモーメント G_3 は

$$G_3 = -\frac{2\pi\mu l^2 \omega_0 L}{S-2} \tag{44}$$

で与えられる。ここで S, L は (41) と同様である。

(iv) 一様なリングの2軸のまわりの回転



角速度 $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega_0, 0)$ で回転しているとき、$\mathbb{U}_B = -\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_3$ となり、$\mathbf{l}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{n}$ ととってよい。(i) の場合と同じように (38) を仮定して $\mathbb{K}$ を計算し、リングに働く2軸のまわりのトルク G_2 は

$$G_2 = -\frac{2\pi\mu l^2 \omega_0 L\left[S^2 + (\bar{b}_1 - \frac{5}{2})S - 1 - 2\bar{b}_1\right]}{S^3 - 4S^2 + (\frac{11}{4} - \bar{b}_1 - \bar{b}_1^2 - c_1^2)S + \frac{3}{2} + 4\bar{b}_1 + 2\bar{b}_1^2 + 2c_1^2} \tag{45}$$

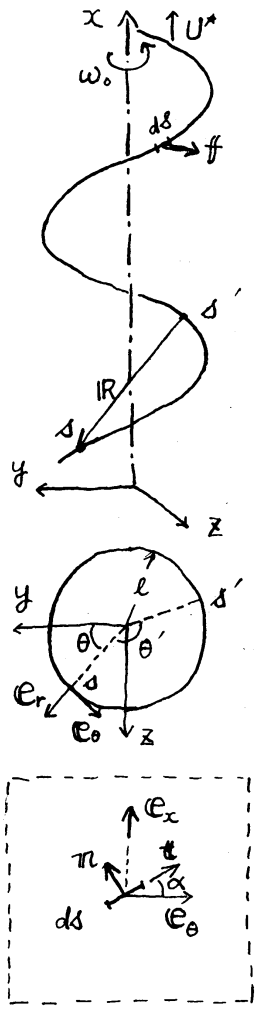
のように得られる。S, L は (41) と同様であり、a^*, $\bar{b}_1$, c_1 については (ii) の場合と同じものをとればよい。

とくに $c_1 = 0$ のときには (45) はつぎのようになる。

$$G_2 = -\frac{2\pi\mu\, l^2 \omega_0 L}{S - \frac{3}{2} - \bar{b}_1} \qquad (46)$$

いま $-\frac{1}{2} \leq \bar{b}_1 \leq \frac{1}{2}$ と考えられるから、(44) と (46) を比較して、$|G_3| \geq |G_2|$ が成立する。$\bar{b}_1 = \frac{1}{2}$（断面が平板状）のとき $|G_3| = |G_2|$ となる。

§9 無限に続き、かつ断面が一様である螺旋状物体の運動



第10図

螺旋の ds 部分に働く力を $f\,ds$ とする。いま $f \cdot e_x \neq 0$ ないとき、ストークス方程式の解は存在しない（軸方向に運動する2次元物体に対しストークス方程式の解が存在しないのと同じ理由）。ストークス方程式の解が存在するためには $f \cdot e_x = 0$ が必要である。この条件は x 軸のまわりに角速度 ω_0 で回転しかつ x 軸方向に適当な速度 U^* で前進しているときに満たされる。以下において丁度このような場合を考える。

いま位置ベクトルを螺旋の振幅 l で、速度ベクトルを $l\omega_0$ で無次元化するとしよう。さて第10図のように、ds と e_x を含む平面を考え、n を ds に垂直でかつこの面内

にある単位ベクトル、α を $d\mathbf{s}$ と $\mathbf{e}_\theta$ の間の角とする。いま

$$\mathbb{U}_B = \mathbf{e}_\theta + U\mathbf{e}_x = (\cos\alpha + U\sin\alpha)\,\mathbf{t} + (-\sin\alpha + U\cos\alpha)\,\mathbf{n}$$

であるから $\mathbf{l}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{j}_1 = \mathbf{e}_r$ととる。このとき A, I, J はいづれも s によらない定数と仮定することができる。$\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_x = 0$ の条件から $A\sin\alpha + 2I\cos\alpha = 0$ でなければならない。そこで $A = B\cos\alpha$, $I = -B\sin\alpha/2$ とおいて $\mathbb{K}$ を計算して

$$\mathbb{K} = \frac{B}{2}\left[1 + (1+\cos^2\alpha)\log\cos\alpha - \sin^2\alpha\,R_1 - 2\cos^2\alpha\,R_2\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{B}{2}\cos\alpha\sin\alpha(\log\cos\alpha - R_1]\,\mathbf{e}_x + J\left[1 + \log\cos\alpha - \sin^2\alpha\,R_1 - 2\cos^2\alpha\,R_2 + \cos^2\alpha\,R_3\right]\mathbf{e}_r \quad (47)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} R_i = \int_\varepsilon^\infty \frac{T_i\,dt}{(\sin^2\alpha\,t^2 + 4\cos^2\alpha\sin^2\frac{t}{2})^{\frac{3}{2}}} + \log\varepsilon, \quad & T_1 = t\sin t \\ & T_2 = \sin^2 t \\ & T_3 = 4\sin^2\frac{t}{2} \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

となる。(47) を (25) に代入すると、B, J, U はつぎのようにきまる。

$$\left.\begin{aligned} B &= -\frac{2}{1+\cos^2\alpha}\cdot\frac{Q_1}{\Delta}, \quad J = \frac{c_1\sin\alpha}{(1+\cos^2\alpha)\Delta} \\ U &= \frac{U^*}{l\omega_0} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}\left[1 + \frac{2\{\bar{b}_1 - \frac{1}{2} + \cos^2\alpha(R_1 - R_2)\}Q_1 + 2c_1^2}{(1+\cos^2\alpha)\Delta}\right] \\ \Delta &= Q_1 Q_2 - \frac{c_1^2\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} \\ Q_1 &= \log\frac{2l}{a^*\cos\alpha} - \frac{1}{2} + \bar{b}_1 + \sin^2\alpha\,R_1 + 2\cos^2\alpha\,R_2 - \cos^2\alpha\,R_3 \\ Q_2 &= \log\frac{2l}{a^*\cos\alpha} - \frac{1}{1+\cos^2\alpha}\left(\frac{1+3\cos^2\alpha}{2} + \sin^2\alpha\,\bar{b}_1 - \sin^2\alpha\,R_1 - 2\cos^2\alpha\,R_2\right) \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

また、物体の単位長さに働く力 $\mathbf{f}$ は

$$\mathfrak{f} = 2\pi\mu l \omega_0 (B e_\theta + 2J e_r) \tag{50}$$

となり、a^*, $\bar{b}_1$, c_1 は断面が楕円のときには(42)で与えられる。とくに断面が円($c_1=0$, $\bar{b}_1=0$)のときには、Lighthill (Flagellar Hydrodynamics, Lecture Note, 1975) によって得られた結果と一致する。

§10 まとめ

細長い物体のまわりのおそい流れについては、流体力学的立場から興味があるばかりでなく、微小な生物の運動、レオロジーなどに関連してその研究の推進が望まれている。例えば螺旋状物体の運動のところで得られた(49)式で、$U=U^*/l\omega_0$ の式は、頭部のない微小な生物が螺旋状の波動運動をしながら前進するときの(前進速度/波の伝播速度)× $\tan\alpha$ を与えることになる。微小な生物のべん毛が、螺旋状の波動運動をするとき、表面圧力が非常に大きくなるから、断面の形が円から変形する事も考えられ、そのような場合に同式は用いられてよい。また断面が一様なリングが運動するときの結果など、レオロジー関係でその利用が期待されてよい。

一般に積分方程式(25),(31),(33)の厳密解を見出すことがむつかしい場合が多い。このときは ε による展開の形で解を求めることができる。例えば $a^*(s)$ が§7 (2)の条件をみたさな

い直線状物体、円弧状物体、直進または回転する有限の長さの螺旋などの運動に対しては、εによる展開の方法で流れの状態を解析し、直線状物体に対しては $O(\varepsilon^3)$、その他の場合については $O(\varepsilon^2)$ まで求められている。

文献

(1) G. J. Hancock : Proc. Roy. Soc. Ser. A 217 (1953) 96

(2) C. M. Tchen : J. Appl. Phys. 25 (1954) 463

(3) R. G. Cox ; J. Fluid Mech. 44 (1970) 791

(4) J. B. Keller & S. L. Rubinow : J. Fluid Mech. 75 (1976) 705

(5) G. K. Batchelor : J. Fluid Mech. 44 (1970) 419

(6) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録, 234, 4 (1975)

(7) H. Masuda : Bulletin of Faculty of General Education, Utsunomiya University, No.3 (1970), Sec. 2, 11