

非定常よどみ点流れと壁効果

慶大物理 松信入十男

§ 1. 序

血管内の血流を論ずるとき，血液流路の異常形態によって引き起こされる流れの異常が血管病の主な原因となり得るといふ考え方が最近注目を浴びている¹⁾。血管病といふのは，たとえば動脈硬化の初期症状と見られるアテロームの発生とか，血管狭窄部の下流側に生ずる動脈瘤（しばしば，狭窄後部膨張とよばれる）のことである。これらの病変の発生する個所は，比較的高レイノルズ数領域の管内層流に生ずる渦と関連しているものと考えられている。たとえば，血管の分岐部や狭窄部において剥離した流れが血管壁に再付着するあたりに前述のアテロームや膨張が起こりやすいと言われている。

Matunobu and Arakawa²⁾は簡単なモデル実験により，鋭い狭窄を有する角断面の管内に流体を拍動的に流すとき，狭

床の後部の壁面にいちじるしい損傷効果があうわれ、その効果は狭窄の度合を示すパラメータと、相動の周期に強く依存することとを示した。損傷のもっとも強くおこる箇所は、ほぼ再付着点の時間的平均位置であることが推定された。また、川口・浜野³⁾はこれと同じタイプの2次元狭窄流と、非定常 Navier-Stokes 方程式を用いて数値的に解析した。それによると、相動の1周期の間で壁面すり応力の変動幅は、再付着点の平均位置のあたりでいちじるしいピークをもつことが示され、前述のモデル実験による推定が定量的に裏付けられたわけである。

これらの研究から、非定常よどみ点流れがよどみ点近傍で異常な壁面効果を生ずることが強く示唆されている。本報告ではこの点を解析的に明らかにするために、非定常よどみ点流れの最も簡単な例として、無限に広い平板に何かう2次元非定常流を考える。平板に垂直に何かう定常流の場合は、古典的な Hiemenz⁴⁾の流れとしてよく知られており、定常 Navier-Stokes 方程式の厳密解が得られる数少ない例の1つとして多くの教科書に解説されている^{5,6,7)}。ここでは、2次元非定常流に対する Navier-Stokes 方程式を線形化して、Hiemenzの流れを非定常でかつ、平板に斜めに当る場合(以下、これを斜め Hiemenz 流とよぶ)。それに対して垂直の場合を垂直 Hi-

menz 流とよぶことにする)に拡張することと試みる。この線形化は Oseen 近似に似たもので、対流項の効果も考慮される。後で示すように、この線形方程式は、定常な垂直 Hiemenz 流に適用した場合、Hiemenz の厳密解に非常に近い解析解を与えるので、非定常な流れに対してもかなりよい近似解を与えるものと期待される。実際、このことは別の観点から検証することができる。

この報告では、とくに振幅の小さい拍動的な Hiemenz 流と扱い、振動数が壁面せん断力に及ぼす効果について調べることとする。

§2. 線形基礎方程式の導出

無限平板を x 軸にとり、上半面 ($y \geq 0$) を流れの場として、平板に垂直に当る流れと考える (図 1)。流速の x, y 成分を u, v とし、 $y \rightarrow \infty$ で u, v は x, y および時間 t の与えられた関数 u_∞, v_∞ にそれぞれ近づくものとする。

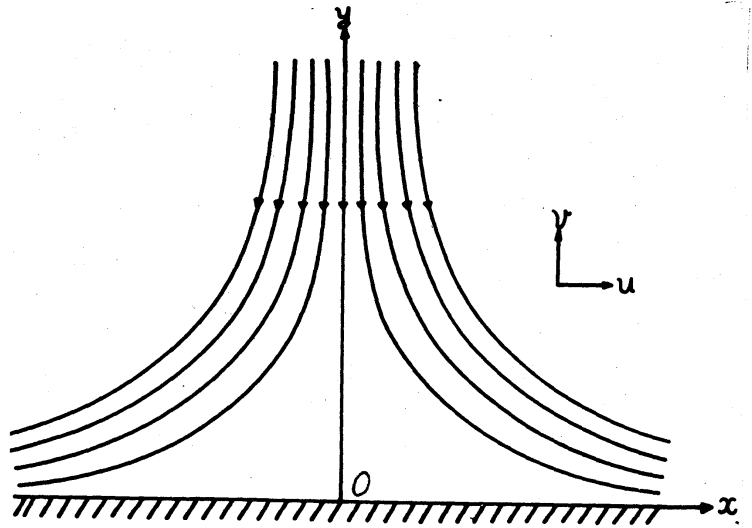


図1 垂直 Hiemenz 流

また, u, v は $y=0$ で滑りなしの条件: $u=0, v=0$ を満たさなければならぬ。

平板は剛体であり, 流体は縮まないニュートン流体であるとしてその密度および運動粘性率をそれぞれ ρ, ν とする。

ここで採用する無次元化による運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} + v_{\infty} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} + v_{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (2.2)$$

である。ここで, p は圧力であり, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ である。

(u, v) および (u_{∞}, v_{∞}) に対する流れの関数を ψ, ψ_{∞} とすれば, 非定常 Hiemenz 流では $\psi_{\infty} = K(t)xy$ と書くことが出来る。すなわち,

$$u_{\infty} = K(t)x, \quad v_{\infty} = -K(t)y \quad (2.3)$$

となるので, (2.1), (2.2) に代入して圧力項を消去すると,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - K(t)y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.4)$$

が得られる。ただし, $K(t)$ は時間 t の与えられた関数であり, $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ は渦度である。

式(2.4)が以下の議論における基礎方程式である。厳密な渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.5)$$

の Oseen 近似ともいえるべき線形方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.6)$$

と比べて、左辺が 2 項 $u_{\infty} \partial \omega / \partial x$ が欠けていることがわかる。後で示すように、この項は壁面 ($y=0$) で 0 にはならないので、(2.6) は (2.4) に比べてかなり大きな誤差を生ずる。

さて、Niemenz の厳密解を導くときと同じように

$$\psi = x f(y, t) \quad (2.7)$$

とおく。そうすれば $u = x \partial f / \partial y$, $v = -f$, $\omega = -x \partial^2 f / \partial y^2$ となるので (2.4) は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} - K(t) y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \nu \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \quad (2.8)$$

と変形される。さらに、 $g = \partial^2 f / \partial y^2$ とおくとこの方程式は 2 階の偏微分方程式に帰着する。境界条件は

$$y=0 \text{ で } f = \partial f / \partial y = 0 \quad (2.9)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ で } \partial f / \partial y \rightarrow K(t) \quad (2.10)$$

と導くことができる。

さて、 k, ε, Ω を定数として正弦的に拍動する流れ

$$K(t) = k (1 + \varepsilon \sin \Omega t) \quad (2.11)$$

を考えよう。さらに、つぎの変換:

$$y = \sqrt{\nu/k} \eta, \quad t = \tau/\Omega, \quad (2.12)$$

$$f = \sqrt{\nu k} F(\eta, \tau), \quad g = \sqrt{k^3/\nu} G(\eta, \tau) \quad (2.13)$$

によって無次元変数 η, τ, F, G を導入し, さらに無次元
振動数 $\beta = \Omega/k$ (2.14)

を定義すれば, (2.8) ~ (2.10) は

$$\beta \frac{\partial G}{\partial \tau} - (1 + \varepsilon \sin \tau) \eta \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}, \quad G = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (2.15)$$

$$\eta = 0 \quad \tau \quad F = \partial F / \partial \eta = 0 \quad (2.16)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \tau \quad \partial F / \partial \eta \rightarrow 1 + \varepsilon \sin \tau, \quad G \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

となる。これから, 相動的な Hiemenz 流は β と ε によって
基本的に決定されることがわかる。

上式を解くために, 振幅 ε が 1 に比べて十分に小さいとして,

$$G = G_0(\eta) + \varepsilon G_1(\eta, \tau) + \varepsilon^2 G_2(\eta, \tau) + \dots \quad (2.18)$$

$$F = F_0(\eta) + \varepsilon F_1(\eta, \tau) + \varepsilon^2 F_2(\eta, \tau) + \dots \quad (2.19)$$

$$G_n = \partial^2 F_n / \partial \eta^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の展開を仮定しよう。これを (2.15) ~ (2.18) に入れて ε
の係数を比較すれば

$$G_0'' + \eta G_0' = 0 \quad (' \text{ は } \eta \text{ についての微分}) \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) G_n = -\eta \frac{\partial G_{n-1}}{\partial \eta} \sin \tau \quad (n \geq 1) \quad (2.21)$$

おなじみ境界条件

$$\eta = 0 \quad \tau \quad F_n = \partial F_n / \partial \eta = 0 \quad (n \geq 0) \quad (2.22)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \tau \quad F_0' \rightarrow 1, \quad \partial F_1 / \partial \eta \rightarrow \sin \tau, \quad \partial F_n / \partial \eta \rightarrow 0 \quad (n \geq 2)$$

$$\partial G_n / \partial \eta \rightarrow 0 \quad (n \geq 0) \quad (2.23)$$

が得られる。(2.18), (2.19) の展開は, $\varepsilon=0$ で定常解が得られることを期待している。一方, $\beta=0$ に対する解は薄定常な Niemenz 流を与える。

§ 3. 無限遠方と壁面上における流れの挙動の関係

この報告でもっとも関心のある量は壁面上における剪り応力 τ_w である。これは

$$\tau_w = \rho \nu (\partial u / \partial y)_{y=0} = \rho \sqrt{\nu k^3} x G(0, \tau) \quad (3.1)$$

で与えられる。一方, 壁面上における圧力勾配は, (2.1) に (2.7) などの関係を入れ, 境界条件を用いると

$$(\partial p / \partial x)_w = \rho k^2 x (\partial G / \partial \eta)_{\eta=0} \quad (3.2)$$

のように表わされる。これらの量を, 平板から十分遠方の流れの挙動と関係づけることができる。

すなわち, (2.11) を一般化して

$$K(t) = k S(\tau) \quad (3.3)$$

と書けば, (2.15) は

$$\beta G_{\tau} - S \eta G_{\eta} = G_{\eta \eta}, \quad G = F_{\eta \eta} \quad (3.4)$$

(下の添字は偏微分の意味) となり, (2.17) は

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad F \rightarrow S(\tau) \eta - \delta(\tau), \quad G \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

と書きかえられる。ここで, $\delta(\tau)$ は時間だけの関数で, δ/S は境界層の排除厚さに相当する。境界条件 (2.16) を考慮し

と、(3.4) を η について 0 から η まで 2 回積分すると、

$$\beta F_\tau - S(\eta F_\eta - 2F) = G - G(0, \tau) - \eta G_\eta(0, \tau)$$

となる。ここで条件 (3.5) を使って $\eta \rightarrow \infty$ とし、 η の係数

$$\text{と比べて} \quad G(0, \tau) = \beta \dot{\delta} + 2S\delta \quad (3.6)$$

$$G_\eta(0, \tau) = -\beta \dot{\delta} - \delta^2 \quad (3.7)$$

が得られる。ここで、 $\dot{}$ は τ についての微分である。

したがって、壁面上での力の分布 (3.1) および (3.2) は、 $S(\tau)$ と $\delta(\tau)$ を使って表わすことができる。とくに、(3.2) は方程式を解かなくても、 $S(\tau)$ から直接に求めることができるが、(3.1) の τ_w は方程式を解いて F を決定し、

$$\delta(\tau) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [S(\tau)\eta - F(\eta, \tau)] \quad (3.8)$$

によって $\delta(\tau)$ を求めてからでないと得られない。

相対流の場合、 $S(\tau) = 1 + \varepsilon \sin \tau$ となるので、(2.18) などと同じように

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (3.9)$$

と展開しておけば、(3.6)、(3.7) から

$$\begin{aligned} G'_0 &= -1, \quad (G_1)_\eta = -2\sin\tau - 3\cos\tau, \quad (G_2)_\eta = -\sin^2\tau, \\ (G_n)_\eta &= 0 \quad (n \geq 3); \quad G_0 = 2\delta_0, \quad G_n = \beta \dot{\delta}_n + 2\delta_n \\ &\quad + 2\delta_{n-1} \sin\tau \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

存在が壁面上で成立することがわかる。これらの結果は、後の計算のチェックに使われる。

§4. 第一近似 (定常解)

式 (2.20) および $n=0$ のときの境界条件 (2.22) および (2.23) は容易に解くことができる。すなわち,

$$G_0(\eta) = \sqrt{2} \operatorname{Erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \quad (4.1)$$

$$F_0'(\eta) = \int_0^\eta G_0(\eta) d\eta = \sqrt{2} \left[\eta \operatorname{Erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - e^{-\frac{\eta^2}{2}}) \right], \quad (4.2)$$

$$F_0(\eta) = \int_0^\eta F_0'(\eta) d\eta = \eta \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Erf} \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta^2 \operatorname{Erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \quad (4.3)$$

となる。ここで Erf , Erfc は誤差関数で

$$\operatorname{Erf} x = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{Erfc} x = \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \operatorname{Erf} x \quad (4.4)$$

で定義される。(4.2) から無限遠方の境界条件 (2.23) が満たされていることは容易にわかる。したがって

$$G_0(0) = \sqrt{\pi/2} = 1.2533, \quad G_0'(0) = -1 \quad \left. \vphantom{G_0(0)} \right\} (4.5)$$

$$\delta_0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - F_0) = \sqrt{\pi/8} = 0.6267$$

が得られる。これらの値は厳密解と比較されるべきもので、厳密解とは (4.5) に対応して 1.2326, -1, 0.6479 となる。

したがって、(4.5) の結果は簡単な解析的表現から得られたにもかかわらず、驚くほどよい近似を与えることがわかる。

とくに、 $G_0'(0)$ は完全に一致する。また、速度成分 u が u_∞ の 99% に等しくなるという条件で求めた境界層の厚さは、

(4.2) から求めると $\sqrt{\nu/k}$ の 2.3 倍であるが, 厳密解では 2.4 倍となり⁷⁾, これもまた満足すべき結果である。

式(4.1)~(4.3)の結果は図2に示されている。 $F_0, -F_0$ が無次元化された u, v の定常部分に相当する。図の下に↑で示した漸近線は厳密解に対応するものである。

近似の程度をさらに詳しく見るために, $\Delta = F_0'^2 - F_0 F_0'' - F_0''' - 1$ の値を η に対してプロットしたのが図3である。厳密解では $\Delta = 0$ となるが,

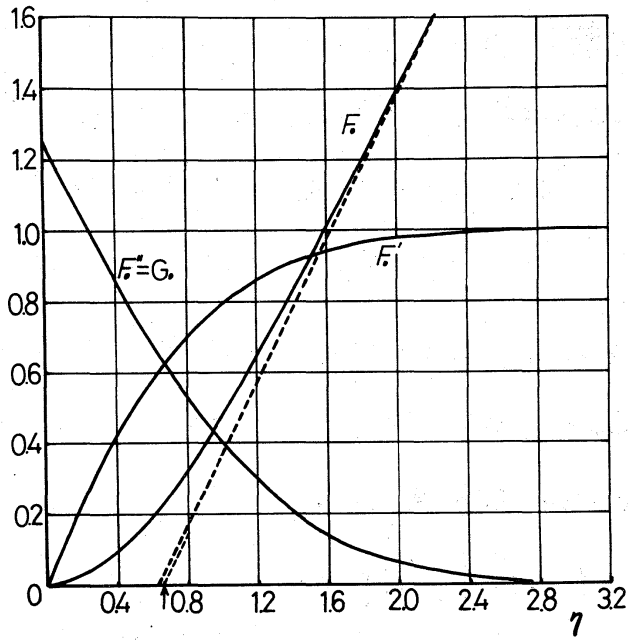


図2. 定常解

(2.4) に基づく近似解では, Δ の値は $\eta \approx 1$ の近傍でたかだか 0.05 以下に過ぎない。比較のため, (2.6) から求めた Δ の値も示してあるが, $\eta = 0$ の近くで近似はよくない。

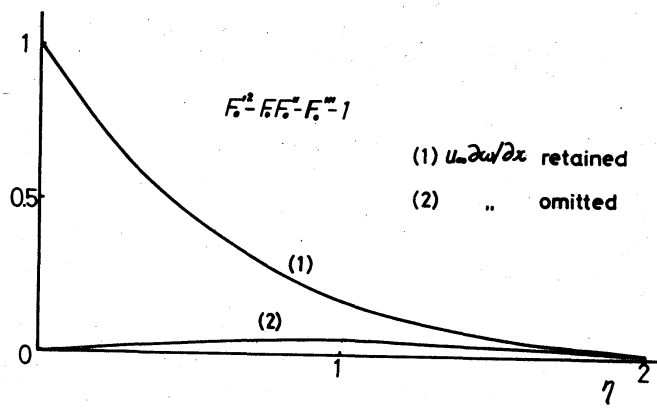


図3. 線型方程式による誤差

§ 5. 関数 $\zeta(\alpha, \eta)$ の導入

方1近以を計算する前に, η の関数 $w(\eta)$ が満足する2階の常微分方程式

$$w''(\eta) + \eta w'(\eta) + 2\alpha w(\eta) = 0 \quad (5.1)$$

の解について述べておこう。ここで, α は定数で, とくに $\alpha = 0$ の場合は定常流に対する方程式 (2.20) に帰着する。上式で, $z = -\eta^2/2$ とおいて独立変数 z に変換すれば,

$$zw''(z) + \left(\frac{1}{2} - z\right)w'(z) - \alpha w(z) = 0 \quad (5.2)$$

となり, この解はよく知られた合流型超幾何関数で表わされる (以下の記号や計算に関して Abramowitz and Stegun⁸⁾, p 503 を参照されたい)。

すなわち, (5.2) の基本解はたとえは

$$M\left(\alpha, \frac{1}{2}, z\right) \quad \text{および} \quad z^{1/2} M\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z\right)$$

で与えられる。ここで M は合流型超幾何関数で

$$M(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \dots + \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (5.3)$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1), \quad (\alpha)_0 = 1$$

で定義される。これは, $|z| \gg 1$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$ の z に対し

$$\begin{aligned} M(\alpha, \gamma, z) \sim & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{i\pi\alpha} z^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\alpha-\gamma+1)_m}{m! (-z)^m} \\ & + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_m (\gamma-\alpha)_m}{m! z^m} \end{aligned} \quad (5.4)$$

の漸近形をもつ。ただし、 Γ はガンマ関数である。

いまの場合、(5.1) の解として $\eta \rightarrow \infty$ で指数関数的に 0 に近づく解に興味がある。このようなものは、上述の基本解の線形結合のうちで (5.4) の右辺の 1 項が消えるものを選ぶことにより得ることが出来る。すなわち、

$$\mathfrak{F}(\alpha, \eta) = M\left(\alpha, \frac{1}{2}, -\frac{\eta^2}{2}\right) - \sqrt{2} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)} \eta M\left(\frac{1}{2}+\alpha, \frac{3}{2}, -\frac{\eta^2}{2}\right) \quad (5.5)$$

($\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$)

を定義すれば、 $\mathfrak{F}(\alpha, \eta)$ は (5.1) の解であり、 $\eta \rightarrow \infty$ で

$$\mathfrak{F}(\alpha, \eta) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1-\alpha) \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)^{2\alpha-1} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_m (\frac{1}{2}-\alpha)_m}{m! (-2/\eta^2)^m} \quad (5.6)$$

となる。とくに、 $\eta = 0$ で $\mathfrak{F} = 1$ である。 α の特別な値に対して、 \mathfrak{F} はよく知られた関数で表される：

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}(0, \eta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}}, & \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, \eta\right) &= e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \\ \mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}, \eta\right) &= (1-\eta^2) e^{-\frac{\eta^2}{2}}, & \mathfrak{F}\left(-\frac{1}{2}, \eta\right) &= e^{-\frac{\eta^2}{2}} - \sqrt{2} \eta \operatorname{Erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \\ & \dots & & \end{aligned} \right\} (5.7)$$

また、正の整数 n に対して

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \mathfrak{F}(n+\alpha, \eta) = -\frac{1}{2^n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!} \eta M\left(n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\eta^2}{2}\right), \quad (5.8)$$

が成立する。つぎの漸化式もまた以下の計算に有用である：

$$\eta \mathfrak{F}(\alpha, \eta) = \sqrt{2} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)} \left\{ \mathfrak{F}\left(\alpha+\frac{1}{2}, \eta\right) - \mathfrak{F}\left(\alpha-\frac{1}{2}, \eta\right) \right\}, \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{z}(\alpha, \eta) = -\sqrt{2} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)} \tilde{z}(\alpha + \frac{1}{2}, \eta) \quad (5.10)$$

$$\eta \frac{d}{d\eta} \tilde{z}(\alpha, \eta) = 2\alpha \{ \tilde{z}(\alpha + 1, \eta) - \tilde{z}(\alpha, \eta) \} \quad (5.11)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \tilde{z}(\alpha, \eta) = -2\alpha \tilde{z}(\alpha + 1, \eta) \quad (5.12)$$

$$\int_0^\eta \tilde{z}(\alpha, \eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} \{ 1 - \tilde{z}(\alpha - \frac{1}{2}, \eta) \} \quad (5.13)$$

$$\int_0^\eta d\eta \int_0^\eta \tilde{z}(\alpha, \eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} \eta - \frac{1}{2(1-\alpha)} \{ 1 - \tilde{z}(\alpha - 1, \eta) \} \quad (5.14)$$

§4 で求めた定常解を, \tilde{z} を用いて書けば

$$\left. \begin{aligned} G_0(\eta) &= \sqrt{\pi/2} \tilde{z}(0, \eta), & F_0'(\eta) &= 1 - \tilde{z}(-\frac{1}{2}, \eta) \\ F_0(\eta) &= \eta - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{ 1 - \tilde{z}(-1, \eta) \} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

となる。

§6. 第1近似的

前節の \tilde{z} を用いて, G_1, F_1 を支配する方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) G_1 = -\eta \frac{dG_0}{d\eta} \sin \tau, \quad G_1 = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta^2} \quad (6.1)$$

および境界条件

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 \quad \tau & & F_1 = \partial F_1 / \partial \eta &= 0 \\ \eta \rightarrow \infty \quad \tau & & \partial F_1 / \partial \eta \rightarrow \sin \tau, & G_1 \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

を解くことができる。(5.15) の第1式と(5.11)を用い, さらに(5.8)に注意すれば

$$\eta \frac{dG_0}{d\eta} = \sqrt{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \zeta(\alpha+1, \eta) = -\eta e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$

が得られる。\$G_1, F_1\$ の時間依存性を考慮して

$$G_1(\eta, \tau) = \text{Im} \tilde{G}_1(\eta) e^{i\tau}, \quad F_1(\eta, \tau) = \text{Im} \tilde{F}_1(\eta) e^{i\tau} \quad (6.3)$$

と置き, (6.1), (6.2) に代入すると

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \eta \frac{d}{d\eta} - i\beta \right) \tilde{G}_1 = -\sqrt{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \zeta(\alpha+1, \eta) \quad (6.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \text{ で } \tilde{F}_1 = \tilde{F}_1' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \text{ で } \tilde{F}_1' \rightarrow 1 \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

この解は容易に得られて

$$\tilde{G}_1(\eta) = b_1 \zeta\left(-\frac{i\beta}{2}, \eta\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2+i\beta} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \zeta(\alpha+1, \eta) \quad (6.6)$$

となる。さらに (5.14) を用いれば

$$\tilde{F}_1' = 1 + \frac{1}{2+i\beta} e^{-\frac{\eta^2}{2}} - \frac{3+i\beta}{2+i\beta} \zeta\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\beta}{2}, \eta\right) \quad (6.7)$$

$$\tilde{F}_1 = \eta + \frac{\sqrt{2}}{2+i\beta} \text{Erf} \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{b_1}{2+i\beta} \left\{ 1 - \zeta\left(-1 - \frac{i\beta}{2}, \eta\right) \right\}$$

ここで \$b_1\$ は定数で, (6.5) の第 2 の条件より

$$b_1 = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} + \frac{i\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{i\beta}{2}\right)} \quad (6.8)$$

でなければならぬ。これらにより第 1 擾動解は完全に決定されたことになる。

壁面における値は

$$G_1(0, \tau) = \text{Im} \tilde{G}_1(0) e^{i\tau} = \text{Im} b_1 e^{i\tau} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G_1(0, \tau) = -\operatorname{Im}(z + i\beta) e^{i\tau} \quad (6.10)$$

となる。また

$$\delta_1(\tau) = \operatorname{Im} \frac{b_1 - \sqrt{\pi/2}}{z + i\beta} e^{i\tau} \quad (6.11)$$

と導くことも容易である。これらは (3.10) と完全に一致する。

ここで、 $\beta \gg 1$ のときの解の挙動について述べておこう。
 $|z| \gg 1$ のとき⁸⁾

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &\sim \sqrt{2\pi} \exp\left\{-z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z\right\} \left\{1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \dots\right\} \\ &\doteq \sqrt{2\pi} \exp\left\{-z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + \frac{1}{12z}\right\} \end{aligned}$$

となることを利用して

$$|b_1| \sim (16 + \beta^2)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{16 + \beta^2}\right) \doteq \sqrt{\beta} \left(1 + \frac{\beta}{\beta^2}\right) \quad (6.12)$$

$$\arg b_1 \sim \frac{1}{2} \left\{ \tan^{-1} \frac{\beta}{4} + \frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{16}{\beta^2}\right)^{-1} \right\} \doteq \frac{\pi}{4} - \frac{7}{4\beta} + \frac{20}{\beta^3} \quad (6.13)$$

と導くことができる。したがって、 $\beta \rightarrow \infty$ で $|b_1| \sim \sqrt{\beta}$ 、
 $\arg b_1 \sim \frac{\pi}{4}$ となる。

図 4 は $\beta = 2$ のときの壁に平行な速度成分 $\partial F_1 / \partial \eta$ を、
 $\tau = 0$ から π の半周期にわたって示したものである。壁面
 ずり応力の時間変動は、流れの変動よりも位相が進んでいる
 様子がわかる。図の破線は定常流に対する同じ速度成分 F_0'
 を示している。 $|b_1|$ および $\arg b_1$ の β に対する変化の様子は
 図 5 に表わされている。

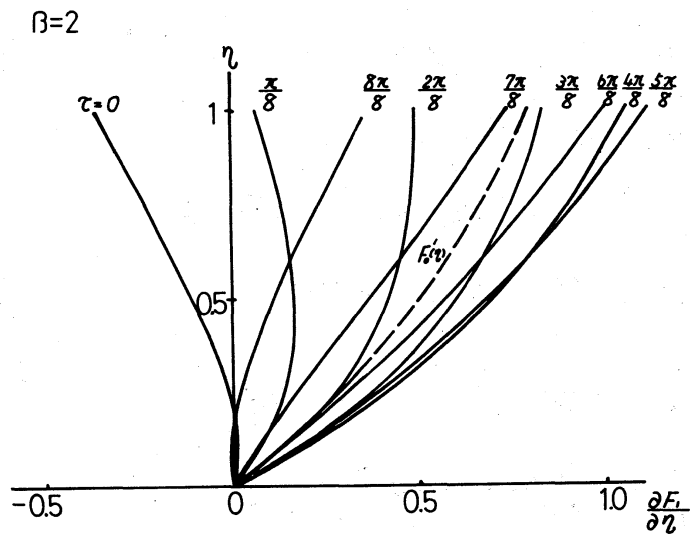


図 4. 第一擾動解の速度分布

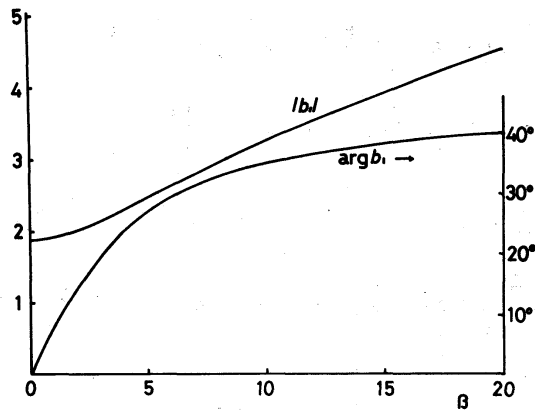


図 5. 壁面上のすり応力の最大値と位相の進み(第一擾動)

§7. 力2)以下

力2)擾動解 G_2, F_2 も前節と同じ方法で導くことができるが、計算はかたまり面倒である。

$$G_2(\eta, \tau) = \text{Re} [\tilde{G}_2^{(0)}(\eta) - \tilde{G}_2^{(2)}(\eta) e^{2i\tau}] \quad (7.1)$$

とすれば、 $\tilde{G}_2^{(0)}, \tilde{G}_2^{(2)}$ の満たす方程式は

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \eta \frac{d}{d\eta}\right) \tilde{G}_2^{(0)} = -\frac{1}{2} \eta \frac{d\tilde{G}_1}{d\eta} \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \eta \frac{d}{d\eta} - 2i\beta\right) \tilde{G}_2^{(2)} = -\frac{1}{2} \eta \frac{d\tilde{G}_1}{d\eta} \quad (7.3)$$

となる。前節の結果 (6.6) をこれらの右辺に入れて (5.11) の公式を用いれば

$$\begin{aligned} \eta \frac{d\tilde{G}_1}{d\eta} &= -i\beta b_1 \left\{ \mathcal{F}\left(1 - \frac{i\beta}{2}, \eta\right) - \mathcal{F}\left(-\frac{i\beta}{2}, \eta\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{2+i\beta} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \left\{ \mathcal{F}(\alpha+2, \eta) - \mathcal{F}(\alpha+1, \eta) \right\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

とほり、形式的に $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha$ の部分を定数係数のよきに見作して (7.2), (7.3) を解くことができる。結果は

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2^{(0)} &= b_2^{(0)} \mathcal{F}(0, \eta) - \frac{b_1}{2} \left\{ \frac{i\beta}{2-i\beta} \mathcal{F}\left(1 - \frac{i\beta}{2}, \eta\right) + \mathcal{F}\left(-\frac{i\beta}{2}, \eta\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{4(2+i\beta)} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \left\{ \mathcal{F}(\alpha+2, \eta) - 2\mathcal{F}(\alpha+1, \eta) \right\}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2^{(2)} &= b_2^{(2)} \mathcal{F}(-i\beta, \eta) - \frac{b_1}{2} \left\{ \frac{i\beta}{2+i\beta} \mathcal{F}\left(1 - \frac{i\beta}{2}, \eta\right) - \mathcal{F}\left(-\frac{i\beta}{2}, \eta\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{2(2+i\beta)} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \left\{ \frac{1}{2+i\beta} \mathcal{F}(\alpha+2, \eta) - \frac{1}{1+i\beta} \mathcal{F}(\alpha+1, \eta) \right\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

である。これを τ について積分し、境界条件: $\eta \rightarrow \infty$ で $\partial F_1 / \partial \eta \rightarrow 0$ を満たすように定数 $b_2^{(0)}$, $b_2^{(2)}$ を選ぶば

$$b_2^{(0)} = \frac{15}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-i\beta}, \quad b_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3+i\beta}{2+i\beta} \frac{\Gamma(\frac{5}{2}+i\beta)}{\Gamma(3+i\beta)} \quad (7.7)$$

となり、解は決定される。これから

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G}_2^{(0)}(0) &= \left(\frac{15}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - b_1 \right) / (2-i\beta), & \tilde{G}_2^{(2)}(0) &= b_2^{(2)} + \frac{b_1}{2+i\beta} \\ \tilde{G}_2^{(0)'}(0) &= \tilde{G}_2^{(2)'}(0) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (7.8)$$

$$\delta_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{32} \frac{4b + 7i\beta}{4+\beta^2} - \frac{2b_1}{4+\beta^2} - \left\{ b_2^{(2)} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2(2+i\beta)} \right\} \frac{e^{2i\tau}}{2(1+i\beta)} \right] \quad (7.9)$$

が得られる。

$\beta \gg 1$ のとき、前節と同じやり方で

$$|b_2^{(2)}| \sim \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \left(1 + \frac{5}{4\beta^2} + \dots \right) \quad (7.10)$$

$$\arg(-b_2^{(2)}) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8\beta} + \dots \quad (7.11)$$

となり、 $G_2(0, \tau) \sim O(\beta^{-1/2})$ である。したがって、 $\beta \gg 1$ のとき、 $G_2(0, \tau)$ は $G_1(0, \tau)$ に比べて無視できる。図6は $G_2(0, \tau)$ の時間変動の最大値と最小値をプロットしたもので、中央の線はそれの定常部分を示す。

§8 斜め Hiemenz 流

垂直 Hiemenz 流に対する結果を斜め Hiemenz 流に拡張する

ことは極めて容易である。基礎方程式 (2.4) が線形であるので、これらごの解に定常は単純ずりの流れを重ね合わせればよい。単純ずりの流れでは ω はいたるところ一定であるので、(2.4) の解でもある。すなわち、

(2.7) の代りに γ を無次元の定数として

$$\psi = \varepsilon f(\eta, t) + \frac{1}{2} k \gamma \eta^2 \quad (8.1)$$

と書き、これらごの無次元量のほか

$$\varepsilon = \sqrt{\nu / k} \xi \quad (8.2)$$

により ξ と定義する。そうすれば、 $\xi - \eta$ 面ごの流線は

$$\xi F(\eta, t) + \frac{1}{2} \gamma \eta^2 = \text{const.} \quad (8.3)$$

で表わされる。図 7 は $\gamma = \varepsilon$ に対する定常流 ($\varepsilon = 0$) の流線を示したものである。 $\gamma > 0$ のとき、よどみ点は原点の左側にある。

このように定常流に非定常成分をとり加えると、よどみ点

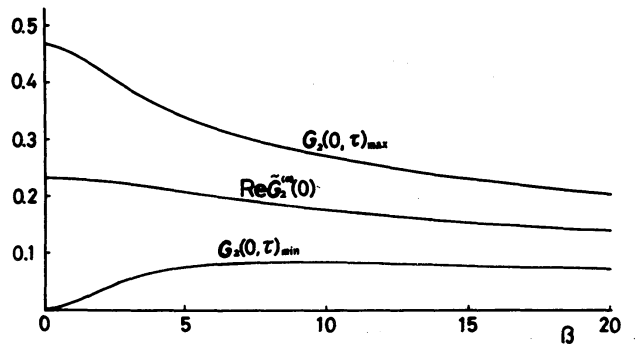


図 6. $\gamma = \varepsilon$ 擾動解を示す。

S は定常流のときのよどみ点 S_0 の前後に振動する。この場合の壁面すり忘れは

$$\sigma_w = \rho \nu k [\xi G(0, \tau) + \gamma] \quad (8.4)$$

と与えられるので、よどみ点の位置は

$$\xi_s = -\gamma / G(0, \tau) \quad (8.5)$$

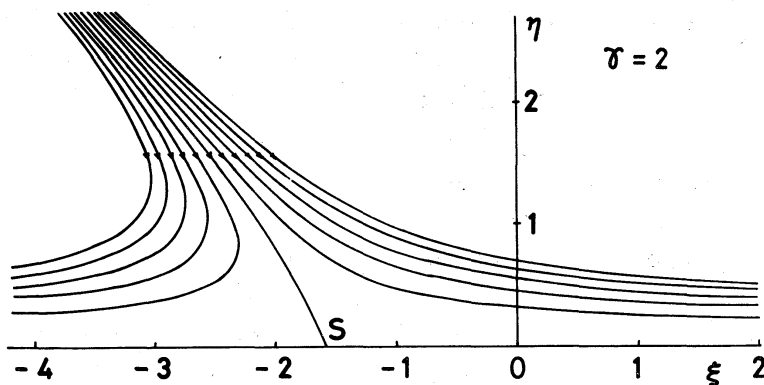
となる。とくに定常流ではこの式は (4.5) から

$$\xi_{s0} = -\sqrt{2/\pi} \gamma \quad (8.6)$$

となる。したがって、 $\beta \gg 1$ の場合、 $\xi = \xi_{s0}$ における壁面すり忘れは

$$\sigma_w / \rho \nu k \sim -\sqrt{2\beta/\pi} \varepsilon \gamma \sin(\tau + \frac{\pi}{4})$$

と表わすことができ、高振動数の非定常 Hiemenz 流では、よどみ点の平均的位置付近で σ_w は $\varepsilon \sqrt{\beta} \gamma$ に比例して強まることと結論される。



文7図 定常を斜め Hiemenz 流の流線

§9 結語

すでに §4 で見たように、基礎となる線形方程式 (2.4) は、定常な垂直 Hiemenz 流に対してかなりよい近似解を与えることを知った。しかし、第一擾動解に対して同じことが言えるかどうかは別の観点から検討してみなければならぬ。

式 (4.3) で与えられた定常解 $F_0(\eta)$ を厳密解 $\hat{F}(\eta)$ におきかえ、厳密な非定常渦度方程式 (2.5) を用いると、振幅 ε の小さな非定常 Hiemenz 流に対する第一擾動解が得られるであろう。これは §6 で得られた $\tilde{F}(\eta)$ よりもさらによい近似解であると考えられる。そこで (2.7) の代りに

$$\psi = \sqrt{\nu k} x [\hat{F}(\eta) - i\varepsilon H(\eta) e^{i\tau}] \quad (9.1)$$

の形を仮定し、(2.5) に入れる。そのとき $O(\varepsilon^2)$ を省略し、一回積分することによって

$$\hat{F}''' + \hat{F}\hat{F}'' - \hat{F}'^2 + 1 = 0 \quad (9.2)$$

$$H''' + \hat{F}H'' - (2\hat{F}' + i\beta)H' + \hat{F}''H + (2 + i\beta) = 0 \quad (9.3)$$

が得られる。このとき境界条件

$$\eta = 0 \quad \text{で} \quad \hat{F} = \hat{F}' = 0, \quad H = H' = 0 \quad (9.4)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \hat{F}' \rightarrow 1, \quad H' \rightarrow 1 \quad (9.5)$$

が部分的に考慮されている。これらから $\eta = 0$ とおいて

$$\hat{F}'''(0) = -1, \quad H'''(0) = -(2 + i\beta) \quad (9.6)$$

が得られる。前者は (4.5) の第二式と、後者は (6.10) と完全

に一致していることがわかる。したがって、§6で得た $\tilde{F}_1(\eta)$ は $H(\eta)$ に十分近いものと考えられる。事実、(9.2) と (9.3) で、 \tilde{F} の代りに F_0 を、 H の代りに \tilde{F}_1 を使って左辺の値を求めると、

$$F_0''' + F_0 F_0'' - F_0'^2 + 1 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\eta^2 + O(\eta^3), \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1''' + F_0 \tilde{F}_1'' - (2F_0' + i\beta) \tilde{F}_1' + F_0'' \tilde{F}_1 + (2 + i\beta) \\ = \left(\frac{3 + i\beta}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} b_1\right) \eta^2 + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (9.8)$$

となり、壁面近くで F_0 と同じ程度に \tilde{F}_1 の近似度が保証されている。

以上のことから、非定常 Hiemenz 流に関するかぎり、線形化された基礎方程式 (2.4) は信頼性の高い解析解を与えるものと結論される。しかし、Hiemenz 型の流れでは領域が半無限大の広がりを持ち、管内流れで生ずる再付着点付近の流れのモデルと考えることは必ずしも適当ではない。以上の結果から、再付着点のあたりに壁すりぬけの変動幅のピークが現われることについては何も言うことができない。

本研究を行うに当たって阪大基礎工の今井教授、慶応大学の川口教授、東大生研の吉沢博士から貴重な助言を頂いた。ここに感謝の意を表する次第である。また、本研究は文部省科学研究費(総合研究, 特定研究, 一般研究)により遂行されたものである。

文 献

- 1) 松信八十男: 流体力学的にみた血流異常, 臨床科学 12巻
9号 (1976) 1153.
- 2) Y. Matunobu & M. Arakawa: Model Experiment on the
Post-Stenotic Dilatation in Blood Vessels. *Bio-
rheology* 11 (1974) 457.
- 3) 川口光年・浜野明子: 堰を過ぎる二次元拍動流, 宇宙航
行の力学シンポジウム, 東大宇宙研, 1976.
- 4) K. Hiemenz: Göttingen Dissertation; and Dingler's
Polytech. J. 326, (1911) 311.
- 5) H. Schlichting: *Boundary Layer Theory*. 1960, McGraw-
Hill.
- 6) G. K. Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1967,
Cambridge Univ. Press.
- 7) L. Resenhead (ed.): *Laminar Boundary Layers*. 1963,
Oxford.
- 8) M. Abramowitz & I. A. Stegun^(eds): *Handbook of Mathema-
tical Functions*. (N.B.S., Applied Mathematical
Ser. 55) 1970, Dover Publ.