数理解析研究所講究録
第 306 巻 1977 年 18-27

l_p-space 間の diagonal operator を通して分解可能な operator について

九州工大　　加藤幹雄

Banach space 間の operator の研究に於いて，特定の operator を通しての分解可能性は，しばしば扱われている。nuclear operator が diagonal operator $D: l_\infty \to l_1$ を通して分解されること，absolutely p-summing operator が $C(K) \hookrightarrow L_p(K)$ を通して分解されること等はよく知られている。ところでこれまでに，l_p-space 間の具体的な operator について，一定の結果が得られてきている。例えば，inclusion map についての absolutely summing 性，diagonal operator の nuclear norm，或いはそれらの approximation numbers 等である。これに伴なって，最近，それらの operator を通して分解可能であるような operator がいくつか導入され，研究されている。一つは，Jarchow [4]，Terzioğlu [10] による (p,q)-factorable operator（(p,q)-operator ともいう）であり，これは inclusion map $l_p \hookrightarrow l_q$ $(p \leq q)$ を通して分解される operator である。もう

一つは，Hutton [2] による r-factorable operator であり，これは type $l_{\frac{1}{r},1}$ (i.e. approximation numbers の sequence が Lorentz space $l_{\frac{1}{r},1}$ に属する）の diagonal operator $D: l_\infty \to l_1$ を通して分解される operator である。なお，これらの operator はいずれも，Pietsch の意味で p-factrizable operator（[7]，l_p-space を通して分解可能），また，(p,q,r)-nuclear operator（[8]）の class に属し，そこで統一的に議論されている。

さて，r-factorable operator (Hutton) の導入の直接的な動機を振り返ってみよう。

$T: E \to F$; nuclear

$\rightleftarrows$ T は nuclear diagonal operator $D: l_\infty \to l_1$ を通して分解される。

そして，type l^1 operator は Hilbert space 間で nuclear operator と一致するが，上と同様の形の命題は不成立である。即ち，

$T: E \to F$; of type l^1

$\not\rightleftarrows$ T は type l^1 の diagonal operator $D: l_\infty \to l_1$ を通して分解される。(cf. [2])

この事から次の様な問題が生じるだろう：

(1) type l^1 の diagonal operator $D: l_\infty \to l_1$ を通して

分解される operator の研究。

(2) type l^1 operator は type ? の diagonal operator $D: l_\infty \to l_1$ を通して分解できるか？

(3) 一般に，type l^p operator に関する分解定理は得られないか？

(1)の観点から，1-factorable operator，それを拡げて，r-factorable operator が導入された訳であるが，§1では，さらに分解を (l_p, l_q) 間 $(p>q)$ に一般化し，彼女の main theorem (tensor product characterization) が同様の形で成立する様に定義を拡げる。即ち，(l_p, l_q) 間の type $l_{\frac{s}{r},s}$ $(1/s = 1/q - 1/p)$ の diagonal operator による分解可能性を議論する。この際，(2)に関連して type l_p operator との関係が主眼の一つであり，これについて一定の結果が得られるが，best ではない。

(2)については，Banach space 間ではまだ殆んど何も得られていない。§2でこれにふれる。

(3)も未解決であるが，§3では，この観点から Terzioğlu，Jarchow 等の結果を見直してみたい。

§1

E，F 等は Banach space とする。まず若干の定義を思い起しておこう。

$T \in \mathcal{L}(E,F)$ の n-th approximation number は $\alpha_n(T) = \inf\{\|T-A\| \,;\, A \in \mathcal{L}(E,F),\ \text{rank of } A \leq n\}$ で定義される。

diagonal operator $D \sim \{\lambda_n\} : l_p \longrightarrow l_q$ $(1 \leq q < p \leq \infty)$ は，$D(\{\xi_n\}) = \{\lambda_n \xi_n\}$ で定義される operator であり，以下の議論に於いて $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ $(\forall n)$ と仮定して一般性を失わない。これについて次のことが基本的である。

補助定理（[3], [9]） $1 \leq q < p \leq \infty$， $1/s = 1/q - 1/p$ とする。
$D \sim \{\lambda_n\} : l_p \longrightarrow l_q$ $(|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|)$ の approximation number は $\alpha_n(D) = \{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^s\}^{1/s}$ である。

$1 \leq p \leq \infty$ に対して，

$$l_p(E) = \{\{x_n\} \subset E \,;\, \{\langle x_n, f\rangle\} \in l_p \ (\forall f \in E')\}$$

$$l_p^{(*)}(E') = \{\{f_n\} \subset E' \,;\, \{\langle x, f_n\rangle\} \in l_p \ (\forall x \in E)\}$$

とする。

以下，特に断わらない限り，$1 \leq q < p \leq \infty$, $0 < r < \infty$ とし，$1/s = 1/q - 1/p$ とする。

定義 $T \in \mathcal{L}(E,F)$ が (l_p, l_q)-r-factorable であるとは T が type $l_{\frac{s}{r},s}$ の diagonal operator $D : l_p \to l_q$ (i.e. $\{\alpha_n(D)\} \in l_{\frac{s}{r},s}$) を通して分解されることである。

この operator の class を $\mathcal{F}_{p,q:r}(E,F)$ で表わす。
$T \in \mathcal{F}_{p,q:r}(E,F)$ に対して，

$$f_{p,q:r}(T) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \alpha_{n-1}(D)^s\}^{1/s}$$

とおく。ここで $\inf$ は $T=VDU$, $\|U\|\le 1$, $\|V\|\le 1$, $\{a_{n-1}(D)\}\in l_{\frac{s}{r},s}$ なる分解全体にわたってとる。

<u>命題1</u>　$(\mathfrak{F}_{p,q;r},\ f_{p,q;r})$ は quasi-normed ideal である：

$$f_{p,q;r}(T_1+T_2)\le 2^{1+1/p+1/q+\max(1/s,\,r/s)}\{f_{p,q;r}(T_1)+f_{p,q;r}(T_2)\}$$
$$(\ {}^{\forall}T_1,\ T_2\in\mathfrak{F}_{p,q;r}(E,F)\ )$$

<u>命題2</u>　$T\in\mathcal{L}(E,F)$ について次は同値。

(i)　T は diagonal operator $D\sim\{\lambda_n\}:l_p\to l_q$ を通して分解される,

(ii)　T は $T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes y_n$ $(\{\lambda_n\}\in l_s,\ \{f_n\}\in l_p^{(*)}(E'),\ \{y_n\}\in l_{q'}(F))$ と表現される。(i.e. Pietsch [8] の意味で (s,p,q')-nuclear)

次の characterization は極めて有効である。

<u>定理1</u>　$T\in\mathcal{L}(E,F)$ について次は同値。

(i)　T は (l_p,l_q)-r-factorable,

(ii)　T は $T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n\otimes y_n$ と表現される。ここで, $\{f_n\}\in l_p^{(*)}(E')$, $\{y_n\}\in l_{q'}(F)$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^r|\lambda_n|^s<\infty$.

包含関係については次が成り立つ。

<u>命題3</u>

(i)　$q<p\le p_1$ ならば

$$\mathfrak{F}_{p,q;r}\subset\mathfrak{F}_{p_1,q;r}\ ,\quad f_{p_1,q;r}\le\max(1,\ r^{1/p_1-1/p})\,f_{p,q;r}$$

(ii)　$q\le q_1<p$ ならば

$$\mathcal{F}_{p,q;r} \subset \mathcal{F}_{p,q_1;r} \ , \quad f_{p,q_1;r} \leq \max(1, r^{1/q-1/q_1}) f_{p,q;r}$$

(iii) $r_1 \leq r$ ならば,

$$\mathcal{F}_{p,q;r} \subset \mathcal{F}_{p,q;r_1} \ , \quad f_{p,q;r_1} \leq f_{p,q;r} \ .$$

例

(i) $q < p_1 < p$, $s/(s_1-s) \leq r$ ($1/s_1 = 1/q - 1/p_1$) とする。$\{\lambda_n\} \in l_{\frac{s_1}{r+1}, s_1} \setminus l_{\frac{s}{r}, s}$ (e.g. $\lambda_n = n^{-1/r}[\log(n+1)]^{-1/s}$) をとり, $T \sim \{\lambda_n\} : l_{p_1} \to l_q$ とすると, T は (l_{p_1}, l_q)-r-factorable であるが, (l_p, l_q)-r-factorable でない。

(ii) $q < q_1 < p$, $s/(s_1-s) \leq r$ ($1/s_1 = 1/q_1 - 1/p$) とする。(i) の様に $\{\lambda_n\}$ をとり, $T \sim \{\lambda_n\} : l_p \to l_{q_1}$ とすると, T は, (l_p, l_{q_1})-r-factorable であるが (l_p, l_q)-r-factorable でない。

(iii) $r_1 < r$ とする。$\{\lambda_n\} \in l_{\frac{s}{r_1+1}, s} \setminus l_{\frac{s}{r+1}, s}$ (e.g. $\lambda_n = n^{-(r+1)/s}[\log(n+1)]^{-1/s}$) をとり, $T \sim \{\lambda_n\} : l_p \to l_q$ とすると, T は (l_p, l_q)-r_1-factorable であるが, (l_p, l_q)-r-factorable でない。

type l^p operator との関係について次の定理を得る。

定理 2

(i) (l_p, l_q)-r-factorable operator は of type $l_{\frac{s}{r}+\varepsilon}$ ($\forall \varepsilon > 0$),

(ii) type $l_{\frac{1}{r+1}}$ の operator は (l_p, l_q)-r-factorable.

この定理と Pietsch の良く知られた結果から, factorable operator による nuclear space の特徴づけが得られる。

系　locally convex space E に対して次は同値。

(i)　E : nuclear space,

(ii)　E の適当な 0 ー基本近傍系 $\mathcal{U}$ をとると，$\forall U \in \mathcal{U}$ に対して，次の性質をもつ $V \in \mathcal{U}$ が存在する：

$$\begin{cases} V \text{ は } U \text{ に absorb され,} \\ E(V) \to E(U) \text{ は } (l_p, l_q)\text{-}r\text{-factorable}. \end{cases}$$

((i)→(ii) は任意の p, q, r について成立，(ii)→(i) は或る p, q, r について成立すればよい。)

他の operator との関係について，次を得る。

<u>命題4</u>

(i)　(l_p, l_q)-r-factorable operator は Pietsch [8] の意味で (t, p, q')-nuclear　$\left(s/(r+1) < t \leq s \right)$.

(ii)　(l_∞, l_q)-r-factorable operator は $q/(r+1) < 1 \leq t \leq q$ のとき Persson-Pietsch [6] の意味で，$q/(r+1) < t \leq 1 \leq q$ のとき Ha [1] の意味で，t-nuclear である。

さて次に factorable operator の合成について考える。まず次を得る。

<u>定理3</u>　$s \geq 1$, $r > 0$, $\frac{s}{r+1} < 1$ とする。$1 = 1/s + 1/p + 1/q'$, $1 \leq q < p \leq \infty$ とする。このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \alpha_{n-1}(T)^s < \infty$ ならば，T は (l_p, l_q)-r_1-factorable $\left(0 < \forall r_1 < \frac{r+1}{s} - 1 \right)$ である。

<u>定理4</u>　$s \geq 1$, $r_1, r_2 > 0$, $\frac{s}{r_1+r_2} < 1$ とする。$T: E \to F$ が (l_p, l_q)-r_1-factorable, $S: F \to G$ が (l_p, l_q)-r_2-factorable ならば, $S \circ T: E \to G$ は (l_p, l_q)-r-factorable である $\left(0 < {}^\forall r < \frac{r_1+r_2}{s} - 1\right)$。

§2

type l^1 operator は type ? の diagonal operator を通して分解できるか? (2)の問題に対して分解の仕方は若干異なるが, Hilbert space 間に於いては明らかに次が成り立つ。

<u>命題5</u>　Hilbert space 間の operator $T: H_1 \longrightarrow H_2$ に対して次は同値。

(i)　T: of type l^1,

(ii)　T は type l^1 の diagonal operator $D: l_2 \to l_2$ を通して分解される。

§3

Terzioğlu, Jarchow の 2, 3 の結果を我々の観点から整理してみよう。考える空間 H_1, H_2 は Hilbert space である。

<u>定理5</u>（[10]）$T: H_1 \to H_2$ について次は同値。

(i)　T: of type l^1　($\rightleftarrows$ nuclear),

(ii)　T は inclusion map $l_1 \hookrightarrow l_\infty$ を通して分解される。

<u>定理6</u>（[10]）$T: H_1 \to H_2$ について次は同値。

(i) T: of type ℓ^2 （$\rightleftarrows$ Hilbert-Schmidt 型），

(ii) Tは inclusion map $\ell_2 \hookrightarrow \ell_\infty$ を通して分解される。

これらを含む形で次が得られている。

<u>定理7</u>（[4]）$1 \le p < q \le \infty$, $p \le 2 \le q$, $1/r = 1/p - 1/q$ のとき，$T: H_1 \to H_2$ に対して次は同値。

(i) T: of type ℓ^r （$\rightleftarrows$ r-Schatten class の op.），

(ii) Tは inclusion map $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ を通して分解される。

文　　献

[1] C. W. Ha, Approximation numbers of linear operators and nuclear spaces, J. Math. Analysis Appl. 46 (1974), 292-311.

[2] C. V. Hutton, p-factorable operators, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 167-180.

[3] C. V. Hutton, J. S. Morrell and J. R. Retherford, Diagonal operators, approximation numbers,and Kolmogoroff diameters, J. Approximation Theory 16 (1976), 48-80.

[4] H. Jarchow, Factorization through inclusion mappings between ℓ_p-spaces, Math. Ann. 220 (1976), 123-135.

[5] K. Miyazaki and M. Kato, Factorable operators through a diagonal operator between ℓ_p-spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. (M.& N. S.) 24 (1977), 49-57.

[6] A. Persson and A. Pietsch, p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math. 33 (1969), 19-62.

[7] A. Pietsch, ℓ_p-faktorisierbare Operatoren in Banachräumen, Acta Sci. Math. 31 (1970), 117-123.

[8] A. Pietsch, Theorie der Operatorenideale (Zusammenfassung), Jena, 1972.

[9] A. Pietsch, s-numbers of operators in Banach spaces, Studia Math. 51 (1974), 201-223.

[10] T. Terzioğle, Remarks on (p, q)-factorable operators, Bull. Acad. Pol. Sci. 23 (1975), 165-168.