数理解析研究所講究録
第306巻 1977年 28-35

(Z,λ)-核型写像と Z-核型空間

島大 文理　城市篤夫

Persson と Pietsch はバナッハ空間の間の古典的な核型写像，擬核型写像を発展させて，バナッハ空間における p-核型写像，p-擬核型写像の概念を導入し，その理論を展開した。これは最近宮崎氏によって点列空間 $l_{p,q}$ を使って (p,q)-核型写像，(p,q)-擬核型写像の概念に拡張された。一方これはまた Ceĭtlin によって (Z,p)-核型写像，(Z,p)-擬核型写像の概念に拡張された。ここではこれ等二種類の概念を抽象点列空間 λ を使って (Z,λ)-核型写像，(Z,λ)-擬核型写像の概念に拡張する。ここで $1 \leq p \leq \infty$，$1 \leq q < \infty$ で $\lambda = l_{p,q}$，Z が1次元ならば (Z,λ)-核型写像は宮崎氏の導入した (p,q)-核型写像と一致し，$\lambda = l_p$ ならば (Z,λ)-核型写像は Ceĭtlin によって導入された (Z,p)-核型写像と一致する。また我々は Ceĭtlin によって導入された (Z,l_1)-核型写像を使って核型空間の概念を Z-核型空間に拡張し，核型空間とバナッハ空間 Z

との テンソル積は E−核型空間となることを示す。

第1節においてはまず C_0 上に拡張された擬ノルム p が与えられたとする。そのとき $\lambda \subset C_0$ を $\lambda = \{x \in C_0 \mid p(x) < \infty\}$ で定義し、p を $\|\cdot\|_\lambda$ で表わす。この λ は零でない空間で次の条件をみたすものとする

(a) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_n, \cdots) \in \lambda$ に対して $u^i = (u_1, \cdots, u_i, 0, \cdots)$ $(i=1,2,\cdots)$ とおけば、$i \to \infty$ のとき $\|u - u^i\|_\lambda \to 0$。

(b) $\|\cdot\|_\lambda$ は絶対的単調である。

(c) λ は K−対称である。

(d) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_n, \cdots) \in \lambda$ に対して、v を $j \neq i_n$ $(n=1,2,\cdots)$ のとき $u_j = 0$ なる部分点列 $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}, \cdots)$ とする。そのとき $\|v\|_\lambda = \|u\|_\lambda$ となる。

上の λ を Λ型という。条件 (b) (c) (d) をみたす λ を Λ_0型という。そのとき $\ell_{p,q}$ $(1 \le p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty)$ は Λ_0型となり、$\ell_{p,q}$ $(1 \le p \le \infty,\ 1 \le q \neq \infty)$ は Λ型となる。

第2節においては $\lambda(E)$ について調べる。まず次の定義を述べる：

定義. λ を Λ_0型とし、E をバナッハ空間とする。そのとき $\lambda(E)$ を $\|(\|u_i\|)\|_\lambda < \infty$ なる E の中に値をもつ 0−点列 (u_i) のすべての集合とする。

定義. λ を Λ型とし、E をバナッハ空間とする。そのとき

$\lambda'(\Xi')$ を $\|(\|u_i\|)\|_{\lambda'} < \infty$ なる Ξ' の中に値をもつ点列 (u_i) のすべての集合とする。

この定義の下に次の結果が得られる。

定理　λ を⊥型で完備とし，Ξ をバナッハ空間とする。そのとき $\lambda(\Xi)$ の双対空間は $\lambda'(\Xi')$ とノルム同型となる。

第3節においては (Ξ,λ)-核型写像の概念を与える。そのために次の定義を与えよう。

定義　λ を⊥型とし，E, F, Ξ をバナッハ空間とする。$T \in L(E,F)$ が (Ξ,λ)-核型写像（右 (Ξ,λ)-核型写像）とは $\|(\|A_i\|)\|_\lambda < \infty$, $\sup_{\|v\|\le 1}\|(\|B_i' v\|)\|_{\lambda'} < \infty$ （$\sup_{\|u\|\le 1}\|(\|A_i u\|)\|_{\lambda'} < \infty$, $\|(\|B_i\|)\|_\lambda < \infty$）なる点列 $\{A_i\} \subset L(E,\Xi)$, $\{B_i\} \subset L(\Xi,F)$ が存在して任意の $u \in E$ に対して $Tu = \sum_{i=1}^{\infty} B_i A_i u$ と表わせることとする。このとき $N_{\Xi,\lambda}(E,F)$ で (Ξ,λ)-核型写像の全体を表わし，$N^{\Xi,\lambda}(E,F)$ で右 (Ξ,λ)-核型写像のすべての集合を表わす。それ等の上に次の如き擬ノルムを導入する。

$$\nu_{\Xi,\lambda}(T) = \inf\left(\|(\|A_i\|)\|_\lambda \cdot \sup_{\|v\|\le 1}\|(\|B_i' v\|)\|_{\lambda'}\right)$$

$$\nu^{\Xi,\lambda}(T) = \inf\left(\sup_{\|u\|\le 1}\|(\|A_i u\|)\|_{\lambda'} \cdot \|(\|B_i\|)\|_\lambda\right)。$$

$1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ で $\lambda = \ell_{p,q}$, Ξ が1次元ならば (Ξ,λ)-核型写像（右 (Ξ,λ)-核型写像）は宮崎氏によって導入された (p,q)-核型写像（右 (p,q)-核型写像）と一致する。また $\lambda = \ell_p$ のとき (Ξ,λ)-核型写像は Ceitlin によって導入された

(Z,p)－核型写像と一致する。まず次の結果が得られる。

定理　λをΛ型とし，E，F，Zをバナッハ空間とする。そのとき$T \in N_{Z,\lambda}(E,F)$ならば随伴写像T'は$N^{Z',\lambda}(F',E')$に属し，$\nu^{Z',\lambda}(T') \leq \nu_{Z,\lambda}(T)$となる。さらに$E$，$F$，$Z$が反射的ならば$T' \in N^{Z',\lambda}(F',E')$のとき$T \in N_{Z,\lambda}(E,F)$となり，$\nu^{Z',\lambda}(T') = \nu_{Z,\lambda}(T)$となる。

定理　λをΛ型とし，E，F，G，Zをバナッハ空間とする。そのとき$T \in N_{Z,\lambda}(E,F)$，$S \in L(F,G)$ならば$ST \in N_{Z,\lambda}(E,G)$，$\nu_{Z,\lambda}(ST) \leq \|S\| \nu_{Z,\lambda}(T)$となる。また$T \in L(E,F)$，$S \in N_{Z,\lambda}(F,G)$ならば，そのとき$ST \in N_{Z,\lambda}(E,G)$，$\nu_{Z,\lambda}(ST) \leq \nu_{Z,\lambda}(S) \cdot \|T\|$となる。

定理　λをΛ型とし，λをバナッハ空間とする。またE，F，Zをバナッハ空間とするとき$T \in L(E,F)$が(Z,λ)－核型写像であるための必要十分条件は$T = Q_1 D_1 P_1 : E \xrightarrow{P_1} l_\infty(Z) \xrightarrow{D_1} \lambda(Z) \xrightarrow{Q_1} F$に分解されることである。ここで$P_1 \in L(E, l_\infty(Z))$かつ$\|P_1\| \leq 1$，$Q_1 \in L(\lambda(Z), F)$かつ$\|Q_1\| \leq 1$，また$D_1 \in L(l_\infty(Z), \lambda(Z))$は$(\sigma_i) \in \lambda$が存在して$D_1((a_i)) = (\sigma_i a_i)$なる写像である。

第4節では(Z,λ)－擬核型写像を導入しそれについて研究する。まず(Z,λ)－擬核型写像の定義を述べると

定義　λをΛ_0型とし，E，F，Zをバナッハ空間とする。

$T\in L(E,F)$ が (Z,λ)−擬核型写像とは $(\|A_i u\|)\in\lambda$, $\|Tu\|\leqq\|(\|A_i u\|)\|_\lambda$ $(\forall u\in E)$ なる如き点列 $\{A_i\}\subset L(E,Z)$ が存在することである。そのとき $\nu_{Z,\lambda}^{Q}(T)=\inf\|(\|A_i u\|)\|_\lambda$ で表わし、$N_{Z,\lambda}^{Q}(E,F)$ によって (Z,λ)−擬核型写像の全体の集合を表わす。

このとき $\lambda=\ell_{p,q}$, Z が1次元ならば (Z,λ)−擬核型写像は宮崎氏の導入した (p,q)−擬核型写像と一致する。また $\lambda=\ell_p$ のとき (Z,λ)−擬核型写像は Ceitlin によって導入された (Z,p)−擬核型写像と一致する。これに対して次の結果が得られる。

定理　λ を Λ 型とし、E, F, Z をバナッハ空間とするとき $N_{Z,\lambda}(E,F)\subset N_{Z,\lambda}^{Q}(E,F)$, $\nu_{Z,\lambda}^{Q}(T)\leqq\nu_{Z,\lambda}(T)$ が成立する。

定理　λ を Λ_0 型とし、E, F, Z をバナッハ空間とするとき $T_k\in N_{Z,\lambda}^{Q}(E,F)$ $(k=1,\cdots,M)$ ならば $\sum_{k=1}^{M}T_k\in N_{Z,\lambda}^{Q}(E,F)$, $\nu_{Z,\lambda}^{Q}(\sum_{k=1}^{M}T_k)\leqq M\cdot C^{M-1}(\sum_{k=1}^{M}\nu_{Z,\lambda}^{Q}(T_k))$ となる。

定理　λ を Λ 型とし、E, F, Z をバナッハ空間とする。F が拡張性をもつならば $N_{Z,\lambda}^{Q}(E,F)\subset N_{Z,\lambda}(E,F)$ となり任意の $T\in N_{Z,\lambda}^{Q}(E,F)$ に対して $\nu_{Z,\lambda}^{Q}(T)=\nu_{Z,\lambda}(T)$ が成立する。

第5節では核型空間を Ceitlin によって導入された (Z,ℓ_1)−核型写像を使って Z−核型空間に拡張する。次に定義を与える。

定義　E, F, Z をバナッハ空間として $T\in L(E,F)$ が Z−核型写像とは $\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\cdot\|B_i\|<\infty$ の様な点列 $\{A_i\}\subset L(E,Z)$,

$\{B_i\} \subset L(Z, F)$ が存在して $Tu = \sum_{i=1}^{\infty} B_i A_i u \ (u \in E)$ と表わせることである。

そこで Z が l^2 ならば Z－核型写像は核型写像と一致する。さらにその定義を局所凸空間に拡張する。

定義　局所凸空間 E から局所凸空間 F への線型写像 T が Z－核型写像とは、$T(U) \subset B$ および $T_0 \in L(E_U, F_B)$ をもって $T = \psi_B \circ T_0 \circ \varphi_U$ の如く F_B が完備の様な E の中の絶対的凸 0－近傍 U と F の中の絶対的凸有界集合 B が存在して $\hat{E}_U$ から F_B の中への T_0 によって誘導される写像 $\hat{T}_0$ が Z－核型写像であることである。

このとき E, F をバナッハ空間とすれば、$T: E \to F$ がバナッハ空間として Z－核型写像であるための必要十分条件は、E と F を局所凸空間として Z－核型写像であることである。そのとき次の結果が得られる。

定理　E, F を局所凸空間とし、Z をバナッハ空間とする。$T \in L(E, F)$ が Z－核型写像であれば、T は $\hat{T} \in L(\hat{E}, F)$ に一意的な拡張をもち $\hat{T}$ は Z－核型写像となる。

また次の定義を与える。

定義　Z をバナッハ空間とする。そのとき局所凸空間 E が Z－核型空間とは、各絶対的凸 0－近傍 U に対して $U \supset V$ なる絶対的凸 0－近傍が存在して $\varphi_{U,V}: \hat{E}_V \to \hat{E}_U$ が Z－

核型写像となることである。

そのとき次の結果が得られる。

定理 次のことは同値である：

(a) E は Z－核型空間である。

(b) $\Phi_V : E \to E_V$ が Z－核型写像となる E の 0－近傍 V の基本系が存在する。

(c) E から任意のバナッハ空間の F への任意の連続写像は Z－核型写像である。

参考文献

[1] I. I. Ceĭtlin, A generalization of the Persson–Pietsch classes of operators, Soviet Math. Dokl., 14 (1973), 819–823。

[2] A. Jôichi, (λ,μ)-absolutely summing operators, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 395–406。

[3] A. Jôichi, (Z,λ)-nuclear mappings and Z-nuclear spaces, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 33–59。

[4] M. Kato, On Lorentz spaces $l_{p,q}\{E\}$, Hiroshima Math. J., 6 (1976), 73–93。

[5] K. Miyazaki, (p,q)-nuclear and (p,q)-integral operators, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 99–132。

[6] A. Persson and A. Pietsch, P-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math., 33 (1969), 19-62.

[7] H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Macmillan, New York, 1966.

[8] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic press, New York and London, 1967.