

Long-range potential を持つ Schrödinger
作用素の散乱理論 (修正波動作用素の完全性)

厚生省 北田 均

本稿の目的は long-range potential を持つ Schrödinger 作用素に関する散乱理論を展開することにある。特に time-dependent wave operator の完全性の証明に重点をおいて述べる。我々の方法を使えば, Pinchuk 氏 [10], 磯崎洋氏 [4] によって構成された stationary wave operator と time-dependent wave operator との関係をつけることもできるが今回は省略する。詳細は [7], [8] を参照されたい。また証明は概略を述べるにとどめる。これも詳細は前記論文を参照されたい。

§ 1. 主結果.

H_1, H_2 を Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, における次のような Schrödinger 作用素とする。

$$(1.1) \quad \begin{cases} H_1 = -\Delta = -\sum_{j=1}^N \partial^2 / \partial x_j^2, \\ H_2 = H_1 + V. \end{cases}$$

ここで, H_1 は $-\Delta|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}$ の \mathcal{H} における自己共役拡張を表わ

2

す。また、 U は次の仮定をみたす potential とする。

仮定 1.1. U は $U = V + V_S$ と分解され、 V, V_S はそれぞれ以下の条件 (L), (S) をみたす \mathbb{R}^N 上の実数値可測関数 V, V_S による $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$ における極大掛算作用素である。

(L) V は \mathbb{R}^N 上の実数値 C^∞ 関数で、

$$(1.2) \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C (1+|x|)^{-|\alpha|-\varepsilon_0}$$

を $|\alpha| \leq K_0$ なる任意の多重指数 α に対してみたす。但し、

$0 < \varepsilon_0 < 1, C > 0, K_0 \geq 4$ とする。また、 $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_N)$ 。

(S) V_S は \mathbb{R}^N 上の実数値可測関数で、

$$(1.3) \quad |V_S(x)| \leq C (1+|x|)^{-1-\varepsilon_0}$$

をみたす。但し、 C, ε_0 は (L) に同じ。

この仮定のもとに、 H_2 は \mathcal{H} における自己共役作用素となり、 $\mathcal{D}(H_2) = \mathcal{D}(H_1) = H^2(\mathbb{R}^N)$ である。但し、 $H^2(\mathbb{R}^N)$ は 2 階の Sobolev 空間を、また $\mathcal{D}(T)$ は作用素 T の定義域を表わす。

我々の主結果を定式化するために、Hörmander [1] による結果を述べておく。

定理 1.2. 仮定 1.1 のもとに $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$ 上の実数値 C^∞ 関数 $X(\xi, t)$ が存在して、 $\mathbb{R}^N - \{0\}$ の任意の compact 集合 Ω に対し、次の三条件をみたす。

i) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対し、 $X(\xi, 0) = 0$ 。

ii) ある正数 T があって、任意の $\xi \in \mathbb{R}^N, |t| > T$ なる t に

対し,

$$(1.4) \quad (\partial_t X)(\xi, t) = \sqrt{2t\xi + (\partial_\xi X)(\xi, t)}.$$

但し, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_\xi = (\partial/\partial \xi_1, \dots, \partial/\partial \xi_N)$.

iii) 任意の $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ なる ε_1 に対し, ある正数 C があって, 任意の $\xi \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}^1$, 及 α , $|\alpha| \leq k_0 - 1$ なる多重指数 α に対し,

$$(1.5) \quad |(\partial_\xi^\alpha X)(\xi, t)| \leq C (1+|t|)^{1-\varepsilon_1}$$

が成り立つ.

この定理から数学的帰納法により, 次の系が容易に導かれる.

系 1.3. 仮定 1.1 のもとに, 定理 1.2 の $X(\xi, t)$ は次をみたす: $\mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}$ の任意の compact 集合 Ω と $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ なる ε_1 に対し, ある正数 C があって,

$$(1.6) \quad |(\partial_t^\alpha \partial_\xi^\beta X)(\xi, t)| \leq C (1+|t|)^{1-|\alpha|-\varepsilon_1}, \quad \xi \in \Omega, t \in \mathbb{R}^1$$

が $|\alpha| + |\beta| \leq k_0 - 1$ なる任意の 1 次元, 及 α , N 次元多重指数 α, β に対して成り立つ. 特に, $\alpha \neq 0$ のときは, (1.6) は $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ として成り立つ.

さて, \mathcal{F} を $L^2(\mathbb{R}^N)$ における Fourier 変換とする:

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) \equiv (2\pi)^{-N/2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|\alpha| \leq M} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

定義 1.4. 任意の $t \in \mathbb{R}^1$ に対し,

$$(1.7) \quad X(t) = \mathcal{F}^{-1} [X(\xi, t) \cdot] \mathcal{F}.$$

$X(t)$ は明らかに \mathcal{H} における H_1 と可換な自己共役作用素を定義する。主結果を述べよう。

定理 1.5 (修正波動作用素の完全性). 仮定 1.1 が $K_0 = [(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたせれるとする ($[\]$ は Gauss 記号).

この時、強極限

$$(1.8) \quad W_{\mathcal{G}} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_2} e^{-itH_1 - iX(t)}$$

が存在し、 $W_{\mathcal{G}}$ は始集合 $\mathcal{H}_{1,ac} = \mathcal{H}$, 終集合 $\mathcal{H}_{2,ac}$ なる \mathcal{H} における部分等距離作用素を定義する。 ($\mathcal{H}_{j,ac}$ は H_j の絶対連続部分空間を表わす.) \mathcal{S} に任意の R^1 の Borel 集合 Δ に対し,

$$(1.9) \quad W_{\mathcal{G}} E_1(\Delta) = E_2(\Delta) W_{\mathcal{G}}$$

が成り立つ。ここで、 E_j は H_j に随伴するスペクトル測度を表わす。

次に Invariance principle を述べるために、若干の準備をする。 Γ を $\overline{\Gamma} \subset (0, \infty)$ なる有界 Borel 集合とし、 I を $(0, \infty)$ 内の開区間で $\overline{\Gamma} \subset I$ なるものとする。 $\varphi \in C^\infty(I)$ を実数値関数とし、 $\eta \in C^\infty(R^1)$ を $\eta(\lambda) = 1, \lambda \in \Gamma$, 及 u , $\text{supp } \eta \subset I$ とする。そして,

$$(1.10) \quad a_\varphi(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\lambda) e^{-it\varphi(\lambda) + i r \lambda} d\lambda$$

とおくと、任意の $t \in R^1$ に対し、 $a_\varphi(t, \cdot) \in L^1(R^1)$. 従って,

$u \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}^1$ に対し,

$$(1.11) \quad Q_\varphi(t)u = \int_{-\infty}^{\infty} a_\varphi(t,r) e^{-i\gamma H_1 - iX(r)} u \, dr$$

が定義でき, $Q_\varphi(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ となる。但し, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は \mathcal{H} における有界作用素全体のなす Banach 空間を表わす。さて,

Invariance principle を定式化しよう。

定理 1.6 (Invariance principle). 仮定 1.1 から $K_0 =$

$[(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたとせるとする。また, 上記の φ が I 上

$\varphi' > 0$, $\varphi'' \neq 0$ をみたすとする。このとき, 強極限

$$(1.12) \quad W_\varphi^\pm(P) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\varphi(H_2)} Q_\varphi(t) E_{1,ac}(P)$$

が存在し,

$$(1.13) \quad W_\varphi^\pm(P) = W_D^\pm E_{1,ac}(P)$$

が成り立つ。ここで, $E_{j,ac}$ は E_j の絶対連続部分を表わす。

§ 2. 固有関数展開.

本節では前節で導入した Schrödinger 作用素 H_1, H_2 に関する固有関数展開について述べる。本節の結果は後節で定理 1.5, 1.6 の証明の際に用いられる。

定義 2.1. $\gamma > 0$, $\omega \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}^1$ に対し,

$$(2.1) \quad f(\gamma, \omega, \lambda; \xi, t) = \langle \omega, \xi \rangle + t(\lambda - |\xi|^2) - X(\xi, \gamma t)/\gamma$$

とおく。但し, X は定理 1.2 で定義された C^∞ 関数である。

このとき, 次の命題が成り立つ。

命題 2.2. 仮定 1.1 から $K_0 = 4$ としてみたとせるとする。 K

6

を $(0, \infty)$ 内の compact 区間とする。このとき正数 $R = R_K$, $S^{N-1} \times K$ の開近傍 $U = U_K$, 及 u , 唯一つの C^∞ 関数 $(\xi \pm, t \pm)$: $(R, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$ が定まって, 次の三条件をみたす。

i) 任意の $\gamma > R$, 及 u , $(\omega, \lambda) \in U$ に対し,

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\partial_{\xi \pm} f)(\gamma, \omega, \lambda; \xi \pm(\gamma, \omega, \lambda), t \pm(\gamma, \omega, \lambda)) = 0, \\ (\partial_{t \pm} f)(\gamma, \omega, \lambda; \xi \pm(\gamma, \omega, \lambda), t \pm(\gamma, \omega, \lambda)) = 0. \end{cases}$$

ii) $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ なる任意の ε_1 に対し, 正定数 C があって, 任意の $\gamma > R$, $(\omega, \lambda) \in U$ に対し,

$$(2.3) \quad |(\xi \pm(\gamma, \omega, \lambda), t \pm(\gamma, \omega, \lambda)) - (\pm\sqrt{\lambda}\omega/|\omega|, \pm|\omega|/2\sqrt{\lambda})| < C\gamma^{-\varepsilon_1}$$

が成り立つ。

iii) 任意の $\gamma > R$, $(\omega, \lambda) \in U$ に対し, 行列

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & D(\gamma, \omega, \lambda; \xi \pm(\gamma, \omega, \lambda), t \pm(\gamma, \omega, \lambda)) \\ & \equiv \begin{pmatrix} \partial_{\xi \pm}^2 f & \partial_{\xi \pm} \partial_{t \pm} f \\ \partial_{t \pm} \partial_{\xi \pm} f & \partial_{t \pm}^2 f \end{pmatrix} (\gamma, \omega, \lambda; \xi \pm(\gamma, \omega, \lambda), t \pm(\gamma, \omega, \lambda)) \end{aligned}$$

は正則である。

証明. μ を $\mu > 1/\varepsilon_0$ ととり,

$$\begin{cases} g(\rho, \omega, \lambda; \xi, t) = \begin{cases} (\partial_{\xi \pm} f)(\rho^{-\mu}, \omega, \lambda; \xi, t) & : \rho > 0, \\ \omega - 2t\xi & : \rho \leq 0, \end{cases} \\ h(\rho, \omega, \lambda; \xi, t) = \begin{cases} (\partial_{t \pm} f)(\rho^{-\mu}, \omega, \lambda; \xi, t) & : \rho > 0, \\ \lambda - |\xi|^2 & : \rho \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

と関数 $(g, h) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ を定義すると, こ

これは C^1 関数である。さらに、 $(\omega, \lambda) \in S^{N-1} \times K$, $(\xi, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$ に對し、

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{\xi} g & \partial_t g \\ \partial_{\xi} h & \partial_t h \end{pmatrix} \Big|_{(0, \omega, \lambda, \xi, t)} = 2^{N+1} (-1)^N |\xi|^2 t^{N-1},$$

及 u ,

$$\begin{cases} g(0, \omega, \lambda; \pm\sqrt{\lambda}\omega, \pm 1/2\sqrt{\lambda}) = 0, \\ h(0, \omega, \lambda; \pm\sqrt{\lambda}\omega, \pm 1/2\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

ゆえ、陰関数定理、及 u , $S^{N-1} \times K$ の compact 性を用いて、 C^1 関数 $(\tilde{\xi}_{\pm}, \tilde{t}_{\pm}) : (-\rho_0, \rho_0) \times U \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ として、

$$\begin{cases} g(\rho, \omega, \lambda; \tilde{\xi}_{\pm}(\rho, \omega, \lambda), \tilde{t}_{\pm}(\rho, \omega, \lambda)) = 0, \\ h(\rho, \omega, \lambda; \tilde{\xi}_{\pm}(\rho, \omega, \lambda), \tilde{t}_{\pm}(\rho, \omega, \lambda)) = 0 \end{cases}$$

及 u ,

$$|(\tilde{\xi}_{\pm}(\rho, \omega, \lambda), \tilde{t}_{\pm}(\rho, \omega, \lambda)) - (\pm\sqrt{\lambda}\omega/|\omega|, \pm|\omega|/2\sqrt{\lambda})| < C\rho^{ME_1}$$

を任意の $(\rho, \omega, \lambda) \in (-\rho_0, \rho_0) \times U$ に對してみたすものの一意的存在が示される。ここで、 ρ_0 は適当な正数、 U は $S^{N-1} \times K$ の $(\mathbb{R}^N - \{0\}) \times \mathbb{R}^1$ に含まれる開近傍、 $C > 0$ は $(\rho, \omega, \lambda) \in (-\rho_0, \rho_0) \times U$ によらぬ定数である。これより、関数

$$(\xi_{\pm}(\gamma, \omega, \lambda), t_{\pm}(\gamma, \omega, \lambda)) = (\tilde{\xi}_{\pm}(\gamma^{1/M}, \omega, \lambda), \tilde{t}_{\pm}(\gamma^{1/M}, \omega, \lambda))$$

を定義すると (ξ_{\pm}, t_{\pm}) は命題の条件をみたす唯一つの C^1 関数である。これが C^∞ であることは陰関数定理よりわかる。

(証明終)

定義 2.3. K を $(0, \infty)$ の compact 区間とし, $R = R_K$, $U = U_K$ を命題 2.2 のものとする. このとき, $r > R$, $(\omega, \lambda) \in U$ に対し,

$$(2.5) \quad Y^\pm(r\omega; \lambda) = \pm \sqrt{\lambda} r - r f(r, \omega, \lambda; \xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda), t_\pm^\pm(r, \omega, \lambda))$$

と定義する.

この関数 Y^\pm に対し, 次の定理が成り立つ.

定理 2.4. 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたとされるとする. K を $(0, \infty)$ に含まれる compact 区間とする. この時, 正数 $R' = R'_K > R_K$ があり, 次の定理が成り立つ.

i) $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. 任意の ε_1 に対し, 正定数 C があり, r , 任意の $\lambda \in K$, $|x| > R'$, $|\alpha| \leq 3$ に対し,

$$(2.6) \quad |(\partial_x^\alpha Y^\pm)(x; \lambda)| \leq C r^{1-|\alpha|-\varepsilon_1}$$

が成り立つ.

ii) 任意の $r > R'$, $\omega \in S^{N-1}$, $\lambda \in K$ に対し,

$$(2.7) \quad \pm 2\sqrt{\lambda} (\partial_r Y^\pm)(r\omega; \lambda) = V(r\omega) + |(\partial_x Y^\pm)(r\omega; \lambda)|^2.$$

証明. 定義より,

$$\begin{aligned} Y^\pm(r\omega; \lambda) &= \pm \sqrt{\lambda} r - r \langle \omega, \xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda) \rangle \\ &\quad - r t_\pm^\pm(r, \omega, \lambda) (\lambda - |\xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda)|^2) \\ &\quad + X(\xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda), r t_\pm^\pm(r, \omega, \lambda)) \end{aligned}$$

である. 一般に, 関数 $\tilde{g}(r, \omega) = g(r\omega)$ に対し,

$$(2.8) \quad (\partial_x g)(r\omega) = \omega (\partial_r \tilde{g})(r, \omega) + r^{-1} \{ (\partial_\omega \tilde{g})(r, \omega) - \langle \partial_\omega \tilde{g}(r, \omega), \omega \rangle \omega \}$$

であることを使えば,

$$\begin{cases} (\partial_r Y^\pm)(r\omega; \lambda) = \pm\sqrt{\lambda} - \langle \omega, \xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda) \rangle \\ (\partial_\omega Y^\pm)(r\omega; \lambda) = -\gamma \xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda) \end{cases}$$

より,

$$(\partial_x Y^\pm)(r\omega; \lambda) = \pm\sqrt{\lambda} \omega - \xi_\pm^\pm(r, \omega, \lambda)$$

が得られる。これらと, (2.2), (1.4)より ii)は容易に示される。

i)は(2.8)を用いて $\partial_x Y^\pm$ を計算し, (2.2)を γ, ω について適当な回数微分して得られる評価(このとき, 系1.3を用いる)を使えば証明できる。(証明終)

さて, H_j に対する eigenoperator $\mathcal{F}_j^\pm(\lambda)$ を構成するが, そのために,

$$(2.9) \quad H_3 = H_1 + V$$

とおく。すると,

$$(2.10) \quad H_2 = H_3 + V_S$$

である。

定義 2.5. $\lambda > 0$, $\omega \in S^{N-1}$, $\gamma > R_\lambda (> 0)$ に対し,

$$(2.11) \quad \begin{cases} \theta_1^\pm(r, \omega, \lambda) = \mp\sqrt{\lambda} \gamma, \\ \theta_3^\pm(r, \omega, \lambda) = \mp\sqrt{\lambda} \gamma + Y^\pm(r\omega; \lambda) \end{cases}$$

とおく。但し, 正数 R_λ は λ が $(0, \infty)$ の compact 集合を動くとき, 有界にとどまる。

さて, 本節の主定理(定理2.7)を述べるために池部見生, 斉藤義実両氏[3]による一結果を述べよう。

定理 2.6 (極限吸収原理). 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたされるとする. K を $(0, \infty)$ に含まれる compact 集合とし, $K^\pm = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z \in K\}$ とおく. $j = 1, 2$, また, 3 とし, $R_j(z) = (H_j - z)^{-1}$ とする. また $\gamma > 1/2$ とする. このとき, 写像

$$K^\pm \times L_\gamma^2(\mathbb{R}^N) \ni (z, x) \longmapsto R_j(z)x \in L_{-\gamma}^2(\mathbb{R}^N)$$

は, 連続な写像

$$\overline{K^\pm} \times L_\gamma^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L_{-\gamma}^2(\mathbb{R}^N)$$

に一意的に拡張され,

$$\sup_{z \in K^\pm} \|R_j(z)\|_{\mathcal{B}(L_\gamma^2(\mathbb{R}^N), L_{-\gamma}^2(\mathbb{R}^N))} < \infty$$

をみたす. ここで $\mathcal{B}(X, Y)$ はノルム空間 X から Banach 空間 Y の有界作用素全体のなす Banach 空間を表わす. また, $L_\gamma^2(\mathbb{R}^N) \equiv L^2(\mathbb{R}^N, (1+|x|)^{2\gamma} dx)$ である.

以下, $R_j(\lambda \pm i0)x$ ($x \in L_\gamma^2(\mathbb{R}^N)$) により, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_j(\lambda \pm i\varepsilon)x \in L_{-\gamma}^2(\mathbb{R}^N)$ を表わすことにする. さて, 斎藤義実氏の未発表の結果を使えば, 以上のことより次の定理が証明できる.

定理 2.7. 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたされるとする. $\gamma > 1/2$ と γ をとる. このとき, $j = 1, 3$ に対し, 次が成り立つ.

i) 任意の $\lambda > 0$, $g \in L_\gamma^2(\mathbb{R}^N)$ に対し, 正数列 $\{r_k\}$ で $r_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), 及 u^k , $k \rightarrow \infty$ の時, $f_k \equiv L^2(S^{N-1})$ において,

$$(2.12) \quad r_k^{(N-1)/2} [(\partial/\partial r - (\pm i\sqrt{\lambda})) (R_j(\lambda \pm i0)g)](r_k \cdot) \rightarrow 0$$

をみたすものが存在する。

ii) 任意の $\lambda > 0$, $g \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^N)$ に対し, $\{\gamma_k\}$ を (2.12) をみたす正数列とすると, $\mathcal{H}_\gamma = L^2(S^{N-1})$ において, 極限

$$(2.13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{(N-1)/2} e^{i\theta_{\gamma'}^\pm(\gamma_k, \cdot, \lambda)} (R_{\gamma'}(\lambda \pm i'0)g)(\gamma_k \cdot)$$

が存在し, (2.12) をみたす $\{\gamma_k\}$ のとり方によらない。

(斎藤氏は [11] で, $\gamma > 3/2 - \varepsilon_0 (> 1/2)$ として上記定理を証明した。(但し, $\theta_{\gamma'}^\pm$ のとり方は我々のものとは異なる。) 斎藤氏はこれが $\gamma > 1/2$ でも成立することを [11], [12] の結果を用いて証明した。)

さて, 次の定義ができる。

定義 2.8. $\gamma > 1/2$, $\lambda > 0$, $g \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^N)$ とする。 $\{\gamma_k\}$ を (2.12) をみたす任意の正数列とすると, $\gamma' = 1, 3$ に対し,

$$(2.14) \quad \mathcal{F}_{\gamma'}^\pm(\lambda)g = \pi^{-1/2} \lambda^{1/4} \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{(N-1)/2} e^{i\theta_{\gamma'}^\pm(\gamma_k, \cdot, \lambda)} (R_{\gamma'}(\lambda \pm i'0)g)(\gamma_k \cdot)$$

と定義する。さらに, 池部晃生氏 [2] に従って,

$$(2.15) \quad \mathcal{F}_2^\pm(\lambda)g = \mathcal{F}_3^\pm(\lambda)(g - \mathcal{V}_S R_2(\lambda \pm i'0)g)$$

と定義する。

このとき, 次の命題が成り立つ ([12] の Proposition 3.6 を参照)。

命題 2.9. 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたされるとき, $\gamma > 1/2$, $\gamma' = 1, 2$, または, 3 とする。このとき, 線型作用素 $\mathcal{F}_{\gamma'}^\pm(\lambda) : L^2_\gamma(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{H}_\gamma = L^2(S^{N-1})$ は, 次の関係を任意の $g, h \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^N)$

に対してみたす。

$$(2.16) \quad (\overline{R}_j^\pm(\lambda)g, \overline{R}_j^\pm(\lambda)h)_{\mathcal{H}} = ((R_j(\lambda+i0)g - R_j(\lambda-i0)g), h)_{\mathcal{H}} / 2\pi i.$$

以上の結果より, H_j の固有関数展開ができる. しかし, 本稿では以上の結果だけで十分なので省略する. (詳しくは, 齊藤氏 [12] を参照された.)

§ 3. Stationary wave operator の構成と完全性.

本節では, いわゆる stationary (time-independent) wave operator を構成し, その完全性を証明する. Time-dependent wave operator との関係は次節で扱う.

定義 3.1. $u \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$, $z \in \mathbb{C}^\pm = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \gtrless 0\}$ に対し,

$$(3.1) \quad S^\pm(z)u = \pm i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\pm(t) e^{-iX(t)} e^{it(z-H_1)} u dt$$

とおく. 但し, $X(t)$, H_1 は § 1 のもの. また, χ_+ , χ_- はそれぞれ $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ の特性関数を表わす. ($X(t) = 0$ の時は, $S^\pm(z) = R_1(z)$ となることに注意.)

さて, 明らかに $S^\pm(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であるが, さらに, $u \in \mathcal{D}(H_1)$ のときは, $S^\pm(z)u \in \mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(H_2)$ が容易に示される. 従, 下記の定義ができる.

定義 3.2. $u \in \mathcal{D}(H_1)$, $z \in \mathbb{C}^\pm$ に対し,

$$(3.2) \quad \begin{cases} G^\pm(z)u = (H_2 - z)S^\pm(z)u, \\ Q^\pm(z)u = G^\pm(z)u - u. \end{cases}$$

補題 3.3. 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたせれるとする。このとき, $u \in \mathcal{D} \equiv \mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^N - \{0\})) \subset \mathcal{D}(H_1)$, $z \in \mathbb{C}^\pm$ ならば,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1}(2\pi)^{N/2}(Q^\pm(z)u)(x) \\ (3.3) = & U(x) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\pm(t) e^{i\langle x, \xi \rangle + i\sqrt{t}(z - |\xi|^2) - iX(\xi, t)} \hat{u}(\xi) d\xi dt \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\pm(t) e^{i\langle x, \xi \rangle + i\sqrt{t}(z - |\xi|^2) - iX(\xi, t)} (\partial_t X)(\xi, t) \hat{u}(\xi) d\xi dt \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明. 部分積分と Fourier 変換により容易。 (証明終)

$Q^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)u$ ($\lambda > 0, \varepsilon > 0, u \in \mathcal{D}$) の $\varepsilon \rightarrow +0$ の時の境界値を考えるために次の定理を準備する。

定理 3.4. 仮定 1.1 が $K_0 = [(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたせれるとする。 C^∞ 関数 $v(\xi, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1)$ が次をみたすとする。

v1) $0 < a_1 < a_2 < \infty$ なるある正数 a_1, a_2 に対し,

$$\text{supp } v(\cdot, t) \subset \{\xi \mid a_1 < |\xi| < a_2\}, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

v2) $1 > h \geq 0$ なる h と正数 C があって, $|\alpha| + |\beta| \leq K_0 - 2$ なる任意の多重指数 α, β , 及 u , $\xi \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}^1$ に対し,

$$(3.4) \quad |(\partial_\xi^\alpha \partial_\xi^\beta v)(\xi, t)| \leq C(1+|t|)^{-|\alpha|-h}.$$

このとき, $z \in \mathbb{C}^\pm$, $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned} (3.5) \quad & A^\pm(z, v; x) \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^1} \chi_\pm(t) e^{i\langle x, \xi \rangle + i\sqrt{t}(z - |\xi|^2) - iX(\xi, t)} v(\xi, t) dt d\xi \end{aligned}$$

とおく. また, K を $(0, \infty)$ 内の compact 区間とし, $[a_1^2, a_2^2] \subset K^c$ なるものとする. 但し, K^c は K の開核を表わす. このとき, 次の成り立つ.

i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正定数 C があって, 任意の $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^1$, $x, x' \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & |A^\pm(\lambda \pm i\varepsilon, \nu; x) - A^\pm(\lambda' \pm i\varepsilon, \nu; x')| \\ & \leq C (|x - x'| + |\lambda - \lambda'|) \end{aligned}$$

が成り立つ.

ii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^N$ に対し, 極限

$$(3.7) \quad A^\pm(\lambda \pm i0, \nu; x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A^\pm(\lambda \pm i\varepsilon, \nu; x)$$

が存在する.

iii) 正定数 R, C があって次の成り立つ.

a) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}^1 - K$, $\varepsilon \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$(3.8) \quad |A^\pm(\lambda \pm i\varepsilon, \nu; x)| \leq C (1 + |x|)^{-(N-1)/2 - 2} (1 + |\lambda|)^{-1}.$$

b) 任意の $\lambda \in K$, $\varepsilon \geq 0$, $|x| \leq R$ に対し,

$$(3.9) \quad |A^\pm(\lambda \pm i\varepsilon, \nu; x)| \leq C.$$

c) 任意の $\lambda \in K$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > R$, $\omega \in S^{N-1}$ に対し,

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & |A^\pm(\lambda \pm i\varepsilon, \nu; \gamma\omega) \\ & - (2\pi)^{(N+1)/2} e^{\mp \pi i(N+1)/4} e^{\mp \varepsilon \gamma t_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda)} \gamma^{-(N-1)/2} \\ & \times e^{i\gamma f(\gamma, \omega, \lambda; \xi_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda), t_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda))} \nu(\xi_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda), \gamma t_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda)) \\ & \times |\det J(\gamma, \omega, \lambda; \xi_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda), t_\pm^\pm(\gamma, \omega, \lambda))|^{-1/2} | \end{aligned}$$

$$\leq C r^{-(N-1)/2-1-\epsilon}$$

但し, f, J, \hat{u}, t_0 は命題 2.2 のもの.

この定理は stationary phase method を用いて証明されるが, かなり長くなるので証明は割愛する.

補題 3.3 より, $Q^\pm(z)u$ は (3.5) を用いて,

$$(3.11) \quad \begin{aligned} & (Q^\pm(z)u)(x) \\ &= \pm i (2\pi)^{N/2} \left\{ U(x) A^\pm(z, \hat{u}; x) - A^\pm(z, (\partial_t x)(\cdot, t) \hat{u}(\cdot); x) \right\} \end{aligned}$$

と書けるから, 定理 3.4 より次をうる.

命題 3.5. 仮定 1.1 が $K_0 = [(N+7)/\epsilon_0]$ として満たされるとする. $u \in \mathcal{D}$ とする. このとき次が成り立つ.

i) 任意の正数 ϵ に対し, 正定数 C があって, 任意の $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^1, x, x' \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$|(Q^\pm(\lambda \pm i\epsilon)u)(x) - (Q^\pm(\lambda' \pm i\epsilon)u)(x')| \leq C(|\lambda - \lambda'| + |x - x'|).$$

ii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^N$ に対し, 極限

$$(Q^\pm(\lambda)u)(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (Q^\pm(\lambda \pm i\epsilon)u)(x)$$

が存在する.

iii) ある正定数 C があって, 任意の $\epsilon \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^N$ に対して,

$$|(Q^\pm(\lambda \pm i\epsilon)u)(x)| \leq C (1+|x|)^{-(N-1)/2-1-\epsilon_0} (1+|\lambda|)^{-1}.$$

証明. i), ii) は定理 3.4, (3.11) より明らか. iii) は定理 3.4, (3.11), 及 u'' 関係式

$$(3.12) \quad V(rw) = (\partial_t \chi) (\xi_t^\pm(r, w, \lambda), r t_t^\pm(r, w, \lambda))$$

(十分大なる γ に対し成り立つ) を使って導かれる. ((3.12) は (2.2), (1.4) よりえられる.) (証明終)

これより, 次の定理が言えた.

定理 3.6. 仮定 1.1 が $K_0 = [(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたせれるとする. $1/2 < \delta < 1/2 + \varepsilon_0$ とする. このとき, 任意の $u \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon > 0$ に対し, $Q^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)u \in L^2_\delta(\mathbb{R}^N)$, 且, 極限

$$(3.13) \quad Q^\pm(\lambda)u \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} Q^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)u$$

が $L^2_\delta(\mathbb{R}^N)$ において存在する. さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $Q^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)u \in L^2(\mathbb{R}^1_\lambda; L^2_\delta(\mathbb{R}^N))$ で, 極限

$$(3.14) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} Q^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)u$$

が $L^2(\mathbb{R}^1_\lambda; L^2_\delta(\mathbb{R}^N))$ において存在する.

定理 3.4 を使えば, さらに次のことが証明できる.

定理 3.7. 仮定 1.1 が $K_0 = [(N+7)/\varepsilon_0]$ としてみたせれるとする. このとき, 任意の $\lambda > 0$, $u \in \mathcal{D}$ に対し, $h_\gamma = L^2(S^{N-1})$ において,

$$(3.15) \quad \mathcal{F}_2^\pm(\lambda) G^\pm(\lambda)u = \mathcal{F}_1^\pm(\lambda)u = 2^{-N/2} \lambda^{(N-2)/4} e^{\mp \pi i(N-1)/4} \hat{u}(\pm \sqrt{\lambda} \omega)$$

が成り立つ. 但し, $\mathcal{F}_j^\pm(\lambda)$ は定義 2.8 で, $\gamma = \delta$ ($1/2 < \delta < 1/2 + \varepsilon_0$) としたものの. また, $G^\pm(\lambda)u = u + Q^\pm(\lambda)u$.

証明. 定理 3.4, 2.6, 2.7 と命題 2.2 の評価 (2.3) を使えばできる. (証明終)

さて, stationary wave operator を構成するため少し準備をしよう. (以下の定義は加藤敏夫, 黒田成俊両氏[5], [6]に負う.)

以下 δ は $1/2 < \delta < 1/2 + \varepsilon_0$ とし, ε を固定する. $\mathcal{X}_1 = \mathcal{D}$ とおき, \mathcal{X}_j に $L^2_\delta(\mathbb{R}^N)$ のノルムを λ に入れておく. また $\mathcal{X}_2 = L^2_\delta(\mathbb{R}^N)$ とおく. 任意の $\lambda > 0$, $x, y \in \mathcal{X}_j$ に対し, 定理 2.6 より,

$$(3.16) \quad e_j(\lambda; x, y) = (iR_j(\lambda + i0)x - R_j(\lambda - i0)x, y)_{\mathcal{H}} / 2\pi i$$

が定義できる. 容易に示されるように, これは次の 3 条件をみたす. 但し, Γ は $\Gamma \subset (0, \infty)$ なる有界 Borel 集合.

1° 任意の $x, y \in \mathcal{X}_j$ に対し, $e_j(\cdot; x, y) \in L^1(\Gamma)$. さらに, 任意の Γ の Borel 集合 Δ に対し,

$$(3.17) \quad \int_{\Delta} e_j(\lambda; x, y) d\lambda = (E_{j,ac}(\Delta)x, y)_{\mathcal{H}}.$$

2° 任意の $\lambda \in \Gamma$ に対し, $e_j(\lambda; \cdot, \cdot)$ は $\mathcal{X}_j \times \mathcal{X}_j$ 上の非負 Hermite 形式である.

3° 正定数 C があつて, 任意の $\lambda \in \Gamma$, $x, y \in \mathcal{X}_j$ に対し,

$$(3.18) \quad |e_j(\lambda; x, y)| \leq C \|x\|_{\mathcal{X}_j} \|y\|_{\mathcal{X}_j}.$$

さて, $\mathcal{N}_{j,\lambda} = \{x \in \mathcal{X}_j \mid e_j(\lambda; x, x) = 0\}$ とし, $\mathcal{X}_{j,\lambda} = \mathcal{X}_j / \mathcal{N}_{j,\lambda}$

とおくと, $\mathcal{X}_{j,\lambda}$ は $e_j(\lambda; \cdot, \cdot)$ によつて誘導される内積に関し,

pre-Hilbert 空間をなす. $\mathcal{X}_{j,\lambda}$ の完備化を $\tilde{\mathcal{X}}_{j,\lambda}$ で表わし, その内積, ノルムを $(\cdot, \cdot)_{j,\lambda}$, $\|\cdot\|_{j,\lambda}$ で表わす. 上述 3° より,

標準的埋め込み $J_{j,\lambda}: \mathcal{X}_j \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{j,\lambda}$ は有界作用素で, $J_{j,\lambda} \mathcal{X}_j$

$= \mathcal{E}_j(\lambda)$ となる. $\tilde{\mathcal{E}}_j = \prod_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{E}_j(\lambda)$ (直積) とおく. Γ から \mathcal{E}_j の単関数全体のなす線型空間を \mathcal{S}_j で表わす. $g \in \tilde{\mathcal{E}}_j$ が \mathcal{E}_j -可測であるとは, 単関数の列 $\{h_n\} \subset \mathcal{S}_j$ があって, 殆んど至るところの $\lambda \in \Gamma$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g(\lambda) - J_j(\lambda) h_n(\lambda)\|_{j,\lambda} = 0$$

が成り立つことをいう. 今,

$$(3.19) \quad \mathcal{M}_j = \{g \in \tilde{\mathcal{E}}_j \mid g \text{ は } \mathcal{E}_j\text{-可測で,}$$

$$\|g\|_{\mathcal{M}_j} = \left[\int_{\Gamma} \|g(\lambda)\|_{j,\lambda}^2 d\lambda \right]^{1/2} < \infty \}$$

とおくと, \mathcal{M}_j は $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_j}$ をノルムとする複素 Hilbert 空間となる.

また, $J_j \mathcal{S}_j$ は \mathcal{M}_j の稠密な部分空間をなす. このとき, 次の命題が成り立つ ([5], [6] 参照).

命題 3.8. 仮定 1.1 が $k_0 = 4$ としてみたとする. このとき, ユニタリ作用素 $\pi_j: \mathcal{H}_{j,ac}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{M}_j$ が存在して次をみたす.

a) 任意の \mathbb{R}^1 の Borel 集合 Δ , 及 u , $u \in \mathcal{H}_{j,ac}(\Gamma)$ に対し,
 $\pi_j E_{j,ac}(\Delta) u = \{ \chi_{\Delta}(\lambda) (\pi_j u)(\lambda) \}_{\lambda \in \Gamma}$.

b) 任意の $\alpha \in \mathcal{E}_j$ に対し, $\pi_j E_{j,ac}(\Gamma) \alpha = \{ J_j(\lambda) \alpha \}_{\lambda \in \Gamma}$.

但し, $\mathcal{H}_{j,ac}(\Gamma) \equiv E_{j,ac}(\Gamma) \mathcal{H}$.

さて, 本節の主定理を証明しよう.

定理 3.9. 仮定 1.1 が $k_0 = \lceil (N+7)/\varepsilon_0 \rceil$ としてみたとする. このとき, 次の2条件をみたすユニタリ作用素 \mathcal{G}^{\pm} :

$\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ が唯一つ存在する.

a) 任意の Γ の Borel 集合 Δ , 及 u , $u \in \mathcal{M}_1$ に対し,

$$(3.20) \quad \widehat{G}^\pm \{x_\Delta(\lambda)u(\lambda)\}_{\lambda \in \Gamma} = \{x_\Delta(\lambda)(\widehat{G}^\pm u)(\lambda)\}_{\lambda \in \Gamma}.$$

b) 任意の $x \in \mathcal{X}_1$ に対し,

$$(3.21) \quad \widehat{G}^\pm \{J_1(\lambda)x\}_{\lambda \in \Gamma} = \{J_2(\lambda)G^\pm(\lambda)x\}_{\lambda \in \Gamma}.$$

(但し, $G^\pm(\lambda)$ は定理 3.7 で定義したものの.)

この \widehat{G}^\pm によつて,

$$(3.22) \quad W_{\mathbb{P}}^\pm = \begin{cases} \pi_2^{-1} \widehat{G}^\pm \pi_1 & : \mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma) \text{ 上,} \\ 0 & : \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma) \text{ 上} \end{cases}$$

と定義すると, $W_{\mathbb{P}}^\pm$ は始集合 $\mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma)$, 終集合 $\mathcal{H}_{2,ac}(\Gamma)$ なる \mathcal{H} における部分等距離作用素となり, 次の 2 条件をみたす.

i) 任意の Borel 集合 $\Delta \subset \mathbb{R}^1$ に対し,

$$(3.23) \quad W_{\mathbb{P}}^\pm E_1(\Delta) = E_2(\Delta) W_{\mathbb{P}}^\pm.$$

ii) 任意の $x \in \mathcal{X}_1$, $y \in \mathcal{X}_2$, 及 u , Borel 集合 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Gamma$ に対し,

$$(3.24) \quad (W_{\mathbb{P}}^\pm E_{1,ac}(\Delta_1)x, E_{2,ac}(\Delta_2)y)_{\mathcal{H}} = \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} e_2(\lambda; G^\pm(\lambda)x, y) d\lambda.$$

証明. \widehat{G}^\pm の存在が明らかであれば, i), ii) は a), b), 及 u , 命題 3.8 より容易に示される. また a), b) をみたす \widehat{G}^\pm の一意性も容易であるので存在のみを証明する.

$\mathcal{X}_j(\lambda)$ が $\mathcal{X}_j(\lambda)$ で稠密なこと, 及 u , 命題 2.9 より, 任意の λ

$\in \Gamma$, $x \in \mathcal{X}_j$ に対し, $\mathcal{F}_j^\pm(\lambda)x = F_j^\pm(\lambda)J_j(\lambda)x$ をみたす等距離作用素 $F_j^\pm(\lambda): \tilde{\mathcal{X}}_j(\lambda) \rightarrow \mathcal{H}_j = L^2(S^{N-1})$ の存在がわかる. さらに, 定理 3.7 より, $F_j^\pm(\lambda)$ はユニタリとなり, 従って, 同じく定理 3.7 より $F_2^\pm(\lambda)$ もユニタリとなる. ゆえに, $\hat{G}^\pm(\lambda) \equiv F_2^\pm(\lambda)^* F_1^\pm(\lambda)$ は $\tilde{\mathcal{X}}_1(\lambda) \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_2(\lambda)$ なるユニタリ作用素となる. 今, 任意の $\varphi \in J_1 \mathcal{H}_1$ に対し, $\hat{G}^\pm \varphi = \{ \hat{G}^\pm(\lambda) \varphi(\lambda) \}_{\lambda \in \Gamma}$ と定義する. すると $x \in \mathcal{X}_1$ のとき, $\hat{G}^\pm J_1 x = \{ \hat{G}^\pm(\lambda) J_1(\lambda) x \}_{\lambda \in \Gamma} = \{ F_2^\pm(\lambda)^* F_1^\pm(\lambda) x \}_{\lambda \in \Gamma} = \{ F_2^\pm(\lambda)^* F_2^\pm(\lambda) G^\pm(\lambda) x \}_{\lambda \in \Gamma} = \{ J_2(\lambda) G^\pm(\lambda) x \}_{\lambda \in \Gamma}$ であるから, $G^\pm(\lambda)x$ が $\lambda \in \Gamma$ につき強可測 (定理 3.6 参照) なことと, $J_2(\lambda)$ が有界なことより, $\hat{G}^\pm \varphi \in \mathcal{M}_2$ がわかる. さらに $\hat{G}^\pm(\lambda)$ はユニタリゆえ, \hat{G}^\pm は \mathcal{M}_1 から \mathcal{M}_2 への等距離作用素に拡張される. \hat{G}^\pm が onto であることをいおう. それには, $v \in \mathcal{M}_2$ が任意の $\varphi \in J_1 \mathcal{H}_1$ に対し, $(\hat{G}^\pm \varphi, v)_{\mathcal{M}_2} = 0$ をみたすなら, $v = 0$ であることをいえばよい. $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ を \mathcal{X}_1 の稠密な可算集合とすると, 仮定より, 任意の k , Borel 集合 $\Delta \subset \Gamma$ に対し, $(\hat{G}^\pm J_1 \chi_\Delta x_k, v)_{\mathcal{M}_2} = 0$ が成り立つ. 書き換えれば,

$$\int_\Delta (\hat{G}^\pm(\lambda) J_1(\lambda) x_k, v(\lambda))_{\mathcal{H}_2} d\lambda = 0.$$

Δ は任意, 且, $\{x_k\}$ は可算ゆえ, Γ のある Borel 集合 A で, $\Gamma - A$ の測度が 0, 且, 任意の $\lambda \in A$ に対し, $(\hat{G}^\pm(\lambda) J_1(\lambda) x_k, v(\lambda))_{\mathcal{H}_2} = 0$ なるものがある. $\hat{G}^\pm(\lambda)$ はユニタリ, また, $\{J_1(\lambda) x_k\}_{k=1}^\infty$ は $\tilde{\mathcal{X}}_1(\lambda)$ で稠密であるから, これより, 任意の λ

$\in A$ に対し, $v(\lambda) = 0$ がえられる. 従, \mathcal{M}_2 において,
 $v = 0$. よ, \hat{G}^\pm は $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ なるユニタリ作用素である.
 \hat{G}^\pm が a) をみたすことは定義より明らか. b) をみたすことは
 すでに上で示した. (証明終)

§4. Time dependent wave operator との関係, 及び,
 Invariance principle (定理 1.5, 1.6 の証明).

本節では, 前節の定理 3.9 で構成した stationary wave
 operator W_\pm^\pm と, time dependent wave operator W_\pm^\pm との関係
 を考察する. また, Invariance principle についても簡単に触
 れる.

定義 4.1. 任意の $z \in \mathbb{C}^\pm$, $u \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$, $v \in \mathcal{D}(H_1)$ に対
 し,

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^\pm(z) u = (S^\pm(z) - S^\mp(\bar{z})) u / 2\pi i, \\ D^\pm(z) v = (G^\pm(z) - G^\mp(\bar{z})) v / 2\pi i \\ \quad = (Q^\pm(z) - Q^\mp(\bar{z})) v / 2\pi i, \\ \delta_2(z) u = \kappa q_n(\operatorname{Im} z) (R_2(z) - R_2(\bar{z})) u / 2\pi i. \end{array} \right.$$

次のことは容易にわかる.

補題 4.2. 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたとされるとする. z
 $\in \mathbb{C}^\pm$, $u \in \mathcal{D}(H_1)$ に対し,

$$(4.2) \quad \tau^\pm(z) u = \pm \delta_2(z) G^\pm(z) u + R_2(\bar{z}) D^\pm(z) u.$$

補題 4.3. 仮定 1.1 が $K_0 = 4$ としてみたとされるとする. こ

のとき, $\mathcal{X}_2 = L^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N)$ における非負自己共役有界作用素 $K_2(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma$, が存在して次をみたす.

i) 任意の $y \in \mathcal{X}_2$ に対し, $K_2(\cdot)y : \Gamma \rightarrow \mathcal{X}_2$ は強連続.

ii) 任意の $z, y \in \mathcal{X}_2$, $\lambda \in \Gamma$ に対し,

$$e_2(\lambda; z, y) = (K_2(\lambda)z, y)_{\mathcal{X}_2} = (z, K_2(\lambda)y)_{\mathcal{X}_2}.$$

iii) $\sup_{\lambda \in \Gamma} \|K_2(\lambda)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_2)} < \infty$.

さて, 我々の key point となる命題を証明しよう.

命題 4.4. 仮定 1.1 が $K_0 = \lfloor (N+1)/\varepsilon_0 \rfloor$ としてみたされるとき, α を $\text{supp } \alpha \subset \Gamma$ なる \mathbb{R}^1 上の有界可測関数とする. このとき, 任意の $x \in \mathcal{X}_1 = \mathcal{D}$, $y \in \mathcal{X}_2 = L^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ に対し,

$$(4.3) \quad (\tau^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, \alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}} \in L^1(\mathbb{R}^1_{\lambda}).$$

さらに, $\Psi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ とすると, 次式中の極限が存在して,

$$(4.4) \quad \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda) (\tau^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, \alpha(H_{2,ac})y)_{\mathcal{H}} d\lambda \right. \\ \left. \mp \int_{\Gamma} \Psi(\lambda) \overline{\alpha(\lambda)} e_2(\lambda; G^{\pm}(\lambda)x, y) d\lambda \right|^2 \\ \leq C(x) \|\Psi\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^1)}^2 \int_0^{\infty} \left\| \int_{\Gamma} \alpha(\lambda) e^{\mp i\nu\lambda} K_2(\lambda)y d\lambda \right\|_{\mathcal{X}_2}^2 d\nu$$

が成り立つ. 但し, $C(x)$ は x のみによる正定数.

証明. 今,

$$(A_{1,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = e_2(\lambda \pm i\varepsilon; x, \alpha(H_{2,ac})y),$$

$$(4.5) \quad \begin{cases} A_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = e_2(\lambda \pm i\varepsilon; Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, \alpha(H_2, ac)y), \\ A_{3,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = (D^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, R_2(\lambda \pm i\varepsilon)\alpha(H_2, ac)y)_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

とおく。但し、 $z \in \mathbb{C}^{\pm}$, $u, v \in \mathcal{H}$ に對し、

$$e_2(z; u, v) \equiv (d_2(z)u, v)_{\mathcal{H}}.$$

すると、補題 4.2 より、

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & (\tau^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, \alpha(H_2, ac)y)_{\mathcal{H}} \\ &= \pm A_{1,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) \pm A_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) + A_{3,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) \end{aligned}$$

かえられる。

まず、 $A_{1,\varepsilon}^{\pm}$ を考えよう。これは、

$$(4.7) \quad A_{1,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \mu)^2 + \varepsilon^2} \overline{\alpha(\mu)} e_2(\mu; x, y) d\mu$$

と書けるから、Poisson 積分の性質より、 $L^1(\mathbb{R}^1)$ において極

限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A_{1,\varepsilon}^{\pm}$ が存在して、

$$(4.8) \quad \overline{\alpha(\lambda)} e_2(\lambda; x, y)$$

に等しい。

次に、 $A_{2,\varepsilon}^{\pm}$ を考える。これは、

$$(4.9) \quad A_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = (Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, d_2(\lambda)\alpha(H_2, ac)y)_{\mathcal{H}}$$

と書ける。但し、 $d_2(\lambda)$ は $d_2(\lambda \pm i\varepsilon)$ の境界値を表わす。定

理 3.6 より、 $L^2(\mathbb{R}_\lambda^1; L^2_{\delta}(R^N))$ において、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x$ が

存在する。また定理 2.6 と Lavine 氏 [9] の結果を用いれば、

$L^2(\mathbb{R}_\lambda^1; L^2_{\delta}(R^N))$ において、極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} d_2(\lambda \pm i\varepsilon)\alpha(H_2, ac)y$ の

存在がいえる。従って、 $L^1(\mathbb{R}^1)$ において、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A_{2,\varepsilon}^{\pm}$ が存在す

る。ゆえに,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda) A_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) d\lambda = \left(\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma^c} \right) \Psi(\lambda) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) d\lambda$$

が得られるが, これの右辺第2項は0に等しいことが,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_2(\lambda \pm i\varepsilon_m) \alpha(H_{2,ac})y = 0, \quad \text{a.e. } \lambda \in \Gamma$$

よりいえる。但し, $\{\varepsilon_m\}$ は $\varepsilon_m \rightarrow +0$ ($m \rightarrow \infty$) なる適当な正数列。また, 同様の正数列 $\{\varepsilon_m\}$ をとると, a.e. $\lambda \in \Gamma$ に対し,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} e_2(\lambda \pm i\varepsilon_m; Q^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon_m)x, \alpha(H_{2,ac})y) \\ = \overline{\alpha(\lambda)} e_2(\lambda; Q^{\pm}(\lambda)x, y) \end{aligned}$$

が成り立つことがいえる。これより,

$$(4.10) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda) A_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} \Psi(\lambda) \overline{\alpha(\lambda)} e_2(\lambda; Q^{\pm}(\lambda)x, y) d\lambda$$

が得られる。

最後に, $A_{3,\varepsilon}^{\pm}$ を考えよう。これは,

$$(4.11) \quad A_{3,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu - (\lambda \pm i\varepsilon)} \overline{\alpha(\mu)} e_2(\mu; D^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, y) d\mu$$

と書ける。補題4.3を使えば, これは,

$$(D^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x, h^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon))_{\mathcal{X}_2}$$

に等しいことがいえる。但し,

$$h^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu - (\lambda \pm i\varepsilon)} \alpha(\mu) k_2(\mu) y d\mu$$

は $\mathcal{X}_2 = L^2_{\sigma}(R^N)$ における積分である。補題4.3, 及" α が有界なことを用いれば", l.i.m. $h^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)$ が $L^2(R^N_{\lambda}; L^2_{\sigma}(R^N))$ において存在することを示される。他方, 定理3.6より,

l.i.m. $D^{\pm}(\lambda \pm i\varepsilon)x$ が $L^2(R^N_{\lambda}; L^2_{\sigma}(R^N))$ において存在すること

がわかるから、まとめ、 $L^1(\mathbb{R}^1)$ において $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A_{3,\varepsilon}^\pm$ が存在することわかる。さらに、Hilbert空間値関数に対する Fourier変換を用いて、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \text{l.i.m.}_{\varepsilon \rightarrow +0} h^\pm(\lambda \pm i\varepsilon) \right\|_{\mathcal{X}_2}^2 d\lambda \\ &= 2\pi \int_0^\infty \left\| \int_{\Gamma} \alpha(\lambda) e^{\mp i\nu\lambda} K_2(\lambda) y d\lambda \right\|_{\mathcal{X}_2}^2 d\nu \end{aligned}$$

が得られる。以上より、

$$\begin{aligned} (4.12) \quad & \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda) A_{3,\varepsilon}^\pm(\lambda) d\lambda \right|^2 \\ & \leq C(x) \|\Psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)}^2 \int_0^\infty \left\| \int_{\Gamma} \alpha(\lambda) e^{\mp i\nu\lambda} K_2(\lambda) y d\lambda \right\|_{\mathcal{X}_2}^2 d\nu \end{aligned}$$

が得られる。但し、

$$C(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \text{l.i.m.}_{\varepsilon \rightarrow +0} D^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)x \right\|_{\mathcal{X}_2}^2 d\lambda.$$

以上 (4.8), (4.10), (4.12) と (4.6), (4.5) より, (4.3), (4.4) が得られる。

(証明終)

さて定理 1.5 を証明しよう。命題 4.4 において、 $\Psi(\lambda) = e^{it\lambda}$, $\alpha(\lambda) = e^{-it\lambda} \chi_\Delta(\lambda)$ とおく。但し、 Δ は Γ の任意の Borel 集合。

すると、(4.4) より、

$$\begin{aligned} (4.13) \quad & \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (\tau^\pm(\lambda \pm i\varepsilon)x, e^{-itH_2} E_{2,ac}(\Delta)y)_y d\lambda \right. \\ & \left. \mp \int_{\Delta} e_2(\lambda; G^\pm(\lambda)x, y) d\lambda \right|^2 \\ & \leq C(x) \int_0^\infty \left\| \int_{\Gamma} \chi_\Delta(\lambda) e^{-it\lambda \mp i\nu\lambda} K_2(\lambda) y d\lambda \right\|_{\mathcal{X}_2}^2 d\nu \end{aligned}$$

かえられる。定理 3.9 より, 左辺 1 内第 2 項は, $\mp(W_{\mp}x, E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}}$ に等しい。また第 1 項は, Fourier 変換を使っ
て, $\pm(W_D(t)x, E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}}$ に等しいことかかれる。但し,
 $W_D(t) = e^{itH_2} e^{-itH_1 - iX(t)}$ 。他方, (4.13) の右辺は, $t \rightarrow \pm\infty$
の時 0 に収束するから次を得る: 任意の $x \in \mathcal{X}_1, y \in \mathcal{X}_2, \Gamma$ の
Borel 集合 Δ に対し,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} ((W_D(t) - W_{\mp})x, E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}} = 0.$$

これと, $e^{-itH_2} x$ ($x \in \mathcal{X}_1, x \in \mathbb{R}^1$) が \mathcal{H} の基本集合をなす
こと, 及び, \mathcal{H} において $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i(X(t+\infty) - X(t))} u = u$ ($x \in \mathbb{R}^1,$
 $u \in \mathcal{H}$) であることを使えば, 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対し極限
 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_D(t) E_{1,ac}(\Gamma)u$ が \mathcal{H} において存在して, $W_{\mp}u$ に等し
いことかかれる。 Γ は $\Gamma \subset (0, \infty)$ なる任意の有界 Borel 集
合であらうから, 極限 (1.8) の存在, 及び, $\mathcal{R}(W_{\mp}) = \mathcal{H}_{2,ac}$
かかれた。($\mathcal{R}(\Gamma)$ は作用素 Γ の値域を表わす。)

次に, Invariance principle について簡単に触れておこう。
まず, 次のことを証明なしで認めよう。(詳細は [8] 参照。)

命題 4.5. 仮定 1.1 が $K_0 = \Gamma$ としてみたとするとする。こ
のとき, $\mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma)$ から \mathcal{H} の等距離作用素 $Q_{\varphi}^{\infty}(t), t \in \mathbb{R}^1$, が
存在して,

$$(4.14) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (Q_{\varphi}^{\infty}(t)u - Q_{\varphi}(t)u) = 0, \quad u \in \mathcal{H}_{1,ac}(\Gamma)$$

をみたす。

±z, 命題 4.4 において, $\Psi(\lambda) = e^{-i't\varphi(\lambda)} \eta(\lambda)$, $\alpha(\lambda) = e^{-i't\varphi(\lambda)}$
 $\times \chi_{\Delta}(\lambda)$, $\Delta \subset \Gamma$, とおくと, (4.4) より,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (W_{\varphi}(t)x - W_{\mp}^{\pm} x, E_{2,ac}(\Delta)y)_{\mathcal{H}} = 0$$

が得られる. 但し, $x \in \mathcal{X}_1$, $y \in \mathcal{X}_2$, 及 u ,

$$W_{\varphi}(t) = e^{i't\varphi(H_2)} Q_{\varphi}(t).$$

これと (4.14) を合わせて, 定理 1.6 を得る.

参 考 文 献

- [1] L. Hörmander, The existence of wave operators in scattering theory, Math. Z., 146(1976), 69 - 91.
- [2] T. Ikebe, Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials, II, perturbation by short-range potentials, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11(1976), 551 - 558.
- [3] T. Ikebe and Y. Saitō, Limiting absorption method and absolutely continuity for Schrödinger operators, J. Math. Kyoto Univ., 12(1972), 513 - 542.
- [4] H. Isozaki, On the long-range stationary wave operator, (to appear).
- [5] T. Kato and S. T. Kuroda, The abstract theory of scattering, Rocky Mount. J. Math., 1(1971), 127 - 171.
- [6] ———, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, and New York, 1970, 99 - 131.

- [7] H. Kitada, Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, I, abstract theory, (to appear).
- [8] ———, Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, II, spectral and scattering theory, (to appear).
- [9] R. Lavine, Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials, J. Functional Analysis, 12(1973), 30 - 54.
- [10] G. Pinchuk, Abstract time-independent wave operator theory for long-range potentials, (preprint, 1975).
- [11] Y. Saitō, On the asymptotic behavior of the solutions of the Schrödinger equation $(-\Delta + Q(y) - k^2) = F$, (to appear).
- [12] ———, Eigenfunction expansions for the Schrödinger operators with long-range potentials $Q(y) = O(|y|^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, (to appear).