数理解析研究所講究録
第 307 巻 1977 年 84-101

波動方程式に対する混合問題について
(外部領域における解の存在と減衰について)

阪大理学部　井川 満

§1. はじめに。 $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^3$ の有界な obstacle とし

$$\Gamma = \partial\mathcal{O}, \quad \Omega = \mathbb{R}^3 - \mathcal{O} - \Gamma$$

とおく。Γ の近傍で定義された1階の微分作用素 B を

$$B = \sum_{j=1}^{3} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + d(x,t)$$

と書く。b_j, c, d は $\Gamma \times \mathbb{R}^1$ の近傍で定義された C^∞-函数とする。以後次の仮定をおく。

(A-I)　Γ は十分滑かで Gauss 曲率は strictly positive

(A-II)　b_j, $j=1,2,3$ 及び c は実数値函数

(A-III)　$\displaystyle\sum_{j=1}^{3} b_j(x,t)\, n_j(x) = 1, \quad \forall (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^1$

ここで $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ は $x \in \Gamma$ における単位外法線とする。

次の混合問題を考えよう: $u_0, u_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ に対し

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \square u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ B u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \end{cases}$$

を満たす $u(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ をもとめること.

本稿において以下の事を示したい。

<u>定理 1.</u> (P) が C^∞- well posed であるための必要十分条件は

$$c(x,t) < 1 \quad , \quad \forall (x,t) \in \Gamma \times [0,\infty)$$

が成り立つことである。

<u>定理 2.</u> $b_j, c, d \in \mathcal{B}^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ かつ

$$\sup_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} c(x,t) < 1$$

が成り立っているとする。その時ある定数 d_0, これは b_j, c に独立である, があって

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j(x,t) - n_j(x)) - d(x,t) \right\} \geqq d_0$$

ならば問題 (P) の compact support をもった初期条件に対す

る解は指数的に減衰する、すなわち

$$\bigcup_{j=0}^{1} \operatorname{supp} u_j(x) \subset \{ x \,;\, x \in \overline{\Omega},\ |x| \leq \kappa \}$$

とすると解 $u(x,t)$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$E_1(u, r_0, t) \leq \frac{C}{\varepsilon} \exp\{3\delta_0(r_0+\kappa)\} \cdot \exp\{-2(\delta_0-\varepsilon)t\} \cdot E_3(u, \infty, 0),\ \forall t \geq 0$$

なる評価をもつ。ここで $\delta_0 = 12\rho^{-1}\cdot e^{-1}$, $\rho = \mathcal{O}$ の直径、

$$E_m(u, r_0, t) = \sum_{|\gamma| \leq m} \int_{\{|x| \leq r_0\} \cap \Omega} |D_{x,t}^{\gamma} u(x,t)|^2 dx$$

である。

$b = n$, $c = 0$ の場合, すなわち境界条件が才3種境界条件の場合は d_0 に関してより詳しく知る事ができる。

<u>定理 3.</u> $\quad B = \dfrac{\partial}{\partial n} + \sigma(x,t)$

の時,

$\sigma_0(x) = \lim_{t\to\infty} \sigma(x,t)$ が $\sigma_0(x) \in C^\infty(\Gamma)$ として存在し $-M \leq \mathrm{Re}\,\sigma_0 \leq \delta_M$, $|\mathrm{Im}\,\sigma_0| \leq \delta_M$ を満たすときは (P) の解は exponential decay する。ただし M は正の定数, δ_M は M に対応して決まる正の定数である。

以上の結果に関して 2、3の注意をしておきたい。

<u>Remark 1.</u> 例えばDirichlet, 又はNeumann条件の場合のように $\forall T>0$ に対し, C_T が存在して

$$\|u(x,t)\|_{1,L^2(\Omega)}^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C_T\left\{\|u_0\|_{1,L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}, \qquad \forall\, t\in[0,T]$$

が成り立つ場合を L^2-well posed とよぶことにすると, (P)が L^2-well posed であるための必要十分条件は

$$-\left\{\sum_{j=1}^{3}\left(b_j(x,t)-n_j(x)\right)^2\right\}^{1/2} \geqslant c(x,t) \quad \text{on } \Gamma\times\overline{R_+}$$

の成り立つことである(上見[1], 宮武[8])。よって $c>0$ となる点が少くとも一つあれば(P)は L^2-well posedでない。

<u>Remark 2.</u> 波動方程式の外部領域での解のexponential decayに関しては, 境界条件がDirichletの場合をのぞくと, 次の結果がある.

(i) $\mathcal{O}$はconvex, BはNeumann条件(Morawetz[10])

(ii) $\mathcal{O}=\{x;\ |x|<1\}$ $\quad B=\frac{\partial}{\partial n}+\sigma$, $\quad \sigma<1$ なる定数(時田[12]).

定理2はRemark 1と合わせて考えると, L^2-not well posedな問題の場合でも解はexponentially decayしていることがわかる。

<u>Remark 3.</u> 浅倉氏の京大修士論文（1977年3月）の結果、すなわち定理4-5の結果を用いると、定理3は次のように改良される。$\mathcal{O}$の内部の点0があって

$$\sigma_0(x) < \frac{|n(x)\cdot(0-x)|}{|0-x|^2} \qquad \forall x \in \Gamma$$

が成り立つならば（P）の compact support をもつ data に対する解は exponential decay する。

<u>§2. 定理1の証明の方針</u>。 条件の必要性は Kajitani [6], Ikawa[4] の証明より直ちにわかる事である。よって十分性について考えることにする。

$(\!(\ ,\ )\!)_m$, $|||\cdot|||_m$ を $H^m(\Omega\times\mathbb{R}^1)$ での内積，norm とする。又 $(\ ,\ )_m$, $\|\cdot\|_m$ を $H^m(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ の内積，norm を表わすとする。

今 $b_j, c, d \in \mathcal{B}^\infty(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$, $\sup_{\Gamma\times\mathbb{R}^1} c(x,t) < 1$ としておこう。$\varphi(x)$ を real valued な $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ に属する函数で，$\nabla\varphi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$(2.1) \qquad \sup_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi| < 1$$

を満たしているものとする。

$$A_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) = (1-(\nabla\varphi)^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \Delta\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial t}$$

$$B_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j=1}^{3} b_j(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}\right) + c(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + d(x,t)$$

とおく。又 $\mu\in\mathbb{R}$ として

$$A_{\varphi,\mu} = A_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mu,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$B_{\varphi,\mu} = B_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mu,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

とおく。 $g(x,t)\in\mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ に対して

$$(2.2)\quad \begin{cases} A_{\varphi,\mu}\, w(x,t) = 0 & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^1 \\ \quad w(x,t) = g(x,t) & \text{on } \Gamma\times\mathbb{R}^1 \\ \exists T,\quad \operatorname{supp} w \subset \Gamma\times[-T,\infty) & \end{cases}$$

を満たす $w(x,t)$ を考えよう。これは $C^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1)$ で一意的に存在する。この w を

$$w(x,t) = \mathcal{W}_\varphi(x,t;g,\mu)$$

と書くことにする。(2.2) の解の一意性より

$$(2.3)\qquad \mathcal{W}_\varphi(x,t;e^{-\mu t}g,\mu) = e^{-\mu t}\mathcal{W}_\varphi(x,t;g,0)$$

が成り立つことを注意しておこう。次に

$$\mathcal{B}_\varphi(\mu)g = B_{\varphi,\mu}\mathcal{W}_\varphi(x,t;g,\mu)\Big|_{\Gamma\times\mathbb{R}^1}$$

とおこう。明かに $\mathcal{B}_\varphi(\mu):\mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)\longrightarrow C^\infty(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ である。

(2.3) と $B_{\varphi,\mu}$ の性質より

$$(2.4)\qquad \mathcal{B}_\varphi(\mu)\, e^{-\mu t} g = e^{-\mu t} \mathcal{B}_\varphi(0)\, g\,,\quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$$

が成り立つ。例えばSakamoto [11]の結果を用いると $\exists \mu_\varphi$,

$\forall \mu \geqq \mu_\varphi$ に対して，$g \in \mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ に対し

$$\mu\, |||\mathcal{W}_\varphi(x,t\,;g,\mu)|||_m^2 \leqq C_m\, \|g\|_m^2\,,\quad m=0,1,2,\cdots$$

が成り立つ。よって $\mathcal{W}_\varphi$ は一意的に $H^m(\Gamma\times\mathbb{R}^1)\longrightarrow H^m(\Omega\times\mathbb{R}^1)$ の作用素として拡張される。同様にして

$$(2.5)\qquad \mu\, \|\mathcal{B}_\varphi(\mu)\, g\|_m^2 \leqq C_m\, \|g\|_{m+1}^2\,,\quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$$

を得る。よって $\mathcal{B}_\varphi(\mu)$ は一意的に $m=0,1,2,\ldots$ に対し，$H^{m+1}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)\longrightarrow H^m(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ の作用素として拡張される。

境界上の作用素 $\mathcal{B}_\varphi(\mu)$ について次の事が成り立つ。

<u>定理 2.1.</u> 任意の m，$\mu \geqq \mu_\varphi$ に対して

$$(2.6)\qquad -\mathrm{Re}\,(\mathcal{B}_\varphi(\mu)\, g, g)_m \geqq (\mu\, c_0(\varphi) - C)\, \|g\|_m^2 - C_{\varphi,m}\, \|g\|_0^2\,,\quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$$

が成り立つ。ここで，

$$c_0(\varphi) = \inf_{(x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^1} \left\{ \sqrt{1-(\varphi_s(x))^2} - v(x,t)\cdot|\varphi_s(x)| - c(x,t) \right\}$$

$$\varphi_s(x) = \nabla\varphi - (\nabla\varphi\cdot n)\, n$$

$$v(x,t) = \left\{ \sum_{j=1}^{3} (b_j(x,t) - n_j(x))^2 \right\}^{1/2}$$ とする。

次に

$$B' = \sum_{j=1}^{3} b'_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} - c(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + d'(x,t)$$

$$b'_j(x,t) = 2n_j(x) - b_j(x,t)$$

$$d'(x,t) = \overline{d(x,t)} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(n_j(x) - b_j(x,t)) - \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}$$

とおく。 $A_\varphi(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ に対し

$$A^-_{\varphi,\mu} = A_\varphi(-\frac{\partial}{\partial t}+\mu, \frac{\partial}{\partial x})$$

とおく。

$$\langle\!\langle A_{\varphi,\mu}u, v\rangle\!\rangle_0 - \langle\!\langle u, A^-_{-\varphi,\mu}v\rangle\!\rangle_0$$

$$= (B_{\varphi,\mu}u, v)_0 - (u, B'_{-\varphi,\mu}v)_0$$

が任意の $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1)$ に対して成り立つ。よって

$$\mathcal{B}'^-_\varphi(\mu)h = B'_{-\varphi,\mu}W^-_{-\varphi}(x,t;h,\mu)\big|_{\Gamma\times\mathbb{R}^1}$$

ただし $W^-_{-\varphi}$ は $h \in \mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ に対し

$$\begin{cases} A^-_{-\varphi,\mu}\, w = 0 & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^1 \\ w = h & \text{on } \Gamma\times\mathbb{R}^1 \\ \operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}\times(-\infty, T) & \exists T \end{cases}$$

を満たす解を表わすものとする。任意の $g, h \in \mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$ に

対して

$$(\mathcal{B}_\varphi(\mu)g, h) = (g, \mathcal{B}'^-_\varphi(\mu)h)$$

が成り立つ。よって

(2.7) $$\mathcal{B}_\varphi(\mu)^* = \mathcal{B}'^-_\varphi(\mu)$$

が成り立つ。$\mathcal{B}'^{-}_{\varphi}(\mu)$ についても定理2.1と同じ方法で

<u>定理2.1′.</u> 任意の m, $\mu \geq \mu'_{\varphi}$ に対して

$$
(2.8) \qquad -\mathrm{Re}\,(\mathcal{B}'^{-}_{\varphi}(\mu)h, h)_m \geq \mu(c_0(\varphi) - C)\|h\|_m^2 - C_{\varphi,m}\|h\|_0^2, \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)
$$

が成り立つ。

定理2.1, 2.1′ と関係式 (2.7) を用いればただちに次の定理を得る.

<u>定理2.2.</u> 任意の $m \geq 0, \mu \geq \mu''_{\varphi}$ に対し, $h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ をとるごとに

$$
(2.9) \qquad \mathcal{B}_{\varphi}(\mu)\, g = h
$$

をみたす $g \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ は一意的に存在し

$$
(2.10) \qquad \|g\|_m \leq \frac{C_m}{\mu - \mu''_{\varphi}} \|h\|_m
$$

なる評価が成り立つ。

$h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対して (2.9) の解を g とおくとき

$$
u(x,t) = e^{\mu t} W_{\varphi}(x, t; g, \mu)
$$

とおくと我々は

$$
(2.11) \qquad \begin{cases} A_{\varphi} u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ B_{\varphi} u = e^{\mu t} h(x,t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \end{cases}
$$

を満たしていることは，$\mathcal{W}_\varphi$ および $\mathcal{B}_\varphi(\mu)$ の定義より直ちに従う事である。さらに次の事が成り立つ．

__定理 2.3.__ $h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ かつ

$$\text{supp}\ h \subset \Gamma \times [t_0, \infty) \tag{2.12}$$

とすると

$$\text{supp}\ u \subset \bar{\Omega} \times [t_0, \infty) \tag{2.13}$$

が従う。

__証明.__ $\mathcal{W}_\varphi$ の性質より (2.13) を示すには (2.9) の解 g が

$$\text{supp}\ g \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

を満たすことをいえばよい。一般性を失うことなく $t_0 = 0$ としてよい。さて $\varepsilon_0 > 0$ を一つとって fix する。$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon > 0$ とし

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & t < -1 \\ e^{-\varepsilon t} & t \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす C^∞ 函数とする。μ を十分大にとり

$$g_1 = \mathcal{B}_\varphi(\mu + \varepsilon)^{-1}(e^{-\varepsilon t} h)$$

とおく。(2.11) より $e^{-\varepsilon t} h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ である。よって

$$u_1 = e^{(\mu+\varepsilon)t}\, \mathcal{W}_\varphi(x, t;\, g_1, \mu + \varepsilon)$$

とおくと
$$\begin{cases} A_\varphi u_1 = 0 & \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ B_\varphi u_1 = e^{\mu t} h & \text{on} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

を満たしている。

$$v = \alpha(t)(u - u_1)$$

は $e^{-\mu t} v(x,t) \in H^m(\Omega \times \mathbb{R}^1)$ を満たしかつ

$$(2.14) \quad \begin{cases} \tilde{A}_\varphi v = 0 \\ \tilde{B}_\varphi v = 0 \end{cases}$$

を満たす. $\tilde{A}_\varphi$, $\tilde{B}_\varphi$ は A_φ, B_φ と主要部は同じである。

$$k(x,t) = \alpha(t)(e^{\mu t} g - e^{(\mu+\varepsilon)t} g_1)$$

とおくと同様にして $e^{-\mu t} k(x,t) \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ を得る。

よって u, v は未来方向に解いた解として表されたことより

$$v = \tilde{W}_\varphi(x,t;\, e^{-\mu t} k, \mu) \cdot e^{\mu t}$$

と書ける。$\tilde{W}_\varphi$ は boundary data に対し $\tilde{A}_{\varphi,\mu} w = 0$ をみたす未来方向に解いた解とする。(2.14) より

$$\tilde{\mathcal{B}}_\varphi(\mu)(e^{-\mu t} k) = \tilde{B}_{\varphi,\mu} \tilde{W}_\varphi(x,t;\, e^{-\mu t} k, \mu) = 0$$

が従う。$\tilde{\mathcal{B}}_\varphi(\mu)$ に対しても定理2.1, 2.1′ が証明されるので

$$e^{-\mu t} k = 0, \quad \text{すなわち} \quad g \cdot e^{\mu t} = g_1 \cdot e^{(\mu+\varepsilon)t}$$

以上により任意の $\eta > 0$ に対して

$$e^{\mu t} \cdot e^{\eta t} \mathcal{B}_\varphi(\mu+\eta)^{-1} h = e^{\mu t} \cdot g$$

よって (2.10) を用いると

$$\| e^{-\eta t} g \|_0 \leq C_0(\mu + \eta - \mu_\varphi'') \| h \|_0, \quad \forall \eta \geq 0$$

を得る。このことより $g = 0$ for $t < 0$ を得る。

(証明終り)

以上の考察により

$$
(P_\varphi)\quad
\begin{cases}
A_\varphi u = f & \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\
B_\varphi u = g & \text{on } \Gamma\times(0,\infty)\\
u(x,0) = u_0(x), & \partial u/\partial t\,(x,0) = u_1(x)
\end{cases}
$$

の Sobolev space における解の存在と一意性を得る。

<u>定理2.4.</u> $c_0(\varphi)>0$ となる φ に対し，ある μ があって $e^{-\mu t} f \in H^m(\Omega\times(0,\infty))$，$e^{-\mu t} g \in H^m(\Gamma\times(0,\infty))$ をみたし，$u_0, u_1 \in H^{m+2}(\Omega)$ で，があれば（P_φ）の解 $u(x,t)$ は $e^{-\mu t} u \in H^m(\Omega\times(0,\infty))$ を満たすものの中に存在しかつ唯一である。

$m+2$ 次の compatibility condi.

$c_0(\varphi)>0$ となるための必要十分条件は

$$
(2.15)\qquad |\varphi_s(x)| < \left\{-c(x,t)\cdot v(x,t) + \sqrt{1+|c(x,t)^2 - v(x,t)^2|}\right\} \times (1+v(x,t)^2)^{-1} \qquad \forall\, t>0
$$

が成り立つことである。問題（P）に対して Holmgren 変換をほどこし定理2.4を用いることにより（P）の解の局所一意性が従う。又 (2.15) をみたす範囲で $\varphi(x)$ を動かし得るので sweeping out の方法が用いられて（P）の伝播速度は高々

$$
\sup_{\Gamma\times\mathbb{R}^1}\left(-c(x,t)\cdot v(x,t) + \sqrt{1+|c(x,t)^2 - v(x,t)^2|}\right)^{-1}(1+v(x,t)^2)
$$

でおさえられる事もわかる。よって定理2.4におけるSobolev spaceでの解の存在よりC^∞のdataに対する解の存在が従う。以上により定理2.1，2.1'を認めると定理1が示されたことになる。

§3. 定理2，3の証明

$\varphi\equiv 0$の場合$\mathcal{W}_\varphi$，$\mathcal{B}_\varphi$を単に$\mathcal{W}$，$\mathcal{B}$と書くことにする。Morawetz[9]の結果を用いると$\mathcal{W}$について次の事が成り立つ。

<u>命題3.1.</u>　$\mu\geq-\delta_0$に対して

$$(3.1)\qquad |||\, e^{-(\delta_0+1)|x|}\mathcal{W}(x,t;g,\mu)\,|||_m\leq C_m\|g\|_m,$$

が$\forall g\in\mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$，$m=0,1,2,\cdots$に対して成り立つ。

よって$\mathcal{B}(\mu)g=B(\partial/\partial t+\mu,\partial/\partial x)\mathcal{W}(x,t;g,\mu)$は$\mu\geq-\delta_0$で定義される。Bの主要部を$B_0$，それに対して定義されるものを$\mathcal{B}_0$と書くことにすると定理2.1の方法により

<u>命題3.2.</u>　任意の$\mu\geq-\delta_0$，$g\in\mathcal{D}(\Gamma\times\mathbb{R}^1)$に対して

$$-\mathrm{Re}(\mathcal{B}_0(\mu)g,g)_m\geq(c_0\mu-C_m)\|g\|_m^2$$

が成り立つ。ここで$c_0=1-\sup_{\Gamma\times\mathbb{R}^1}c(x,t)$である。

adjoint problemに対しても同様の事が成り立つ。

<u>命題3.2'</u> 任意の $\mu \geq -\delta_0$, $h \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対し

$$-\mathrm{Re}\,(\mathcal{B}_0'^{-}(\mu)h, h)_m \geq (c_0\mu - C_m')\|h\|_m^2$$

が成り立つ。

故に§2における のと全く同様の議論により

<u>命題3.3.</u> ある定数 d_0 があって

$$\inf_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} \mathrm{Re}\,(-d(x,t)) \geq d_0$$

ならば $\forall \mu \geq -\delta_0$ に対して, $g \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ であれば

$$\mathcal{B}(\mu)h = g$$

となる $h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ が一意的に存在する。

<u>命題3.4.</u> 上の命題と同じ仮定のもとで

$$g \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1), \quad \mathrm{supp}\, g \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

ならば

$$\mathrm{supp}\, h \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

が従う。

今 $\mu > -\delta_0$ を一つ固定しよう。 $g \in \mathcal{D}(\Gamma \times (0, \infty))$ とする。

$$h(x,t) = \mathcal{B}(\mu)^{-1}(e^{\mu t} g) \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1), \quad m=0,1,2,\cdots$$

とおき

(3.2) $\quad v(x,t) = \mathcal{W}(x,t\,;h,\mu) \in H^m(\Omega \times \mathbb{R}^1), \ \forall m \geqq 0$

(3.3) $\quad u(x,t) = e^{\mu t}\, v(x,t)$

とおくと$u(x,t)$は

$$(3.4) \quad \begin{cases} \Box u = 0 & \text{in } \ \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ B u = g & \text{on } \ \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega} \times [0,\infty) & \end{cases}$$

をみたしている。

今 $u_0, u_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\operatorname{supp} u_0, u_1 \subset \{x\,;\,|x| \leqq \kappa\}$ としよう。$\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ であって $\tilde{u}_j = u_j$ on Ω となるものをとろう。$w(x,t)$ として

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Box w = 0 & \text{in } \ \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ w(x,0) = \tilde{u}_0(x) & \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \tilde{u}_1(x) & \end{cases}$$

の解をとる。Huygens' principle より

(3.6) $\quad w(x,t) = 0 \quad \text{for} \quad |x| \leqq R, \ \text{if} \ \ t \geqq 2\kappa + R$

を得る。

$$g(x,t) = -Bw\big|_{\Gamma \times \mathbb{R}^1}$$

この g に対して (3.4) をみたす $u(x,t)$ をとろう。

$$y(x,t) = w(x,t) + u(x,t)$$

とおくと

$$\begin{cases} \Box y = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ By = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \ \partial y/\partial t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

を得る。(3.2), (3.3) 及び (3.6) より $y(x,t)$ が望みの評価式，すなわち有界な領域ではそこでの energy は $e^{\mu t}$ の速さで decay することがわかる。

定理3については命題3.2と Ikawa [5] の考察を合わせればよい。

§4. 定理2.1の証明方法について.

この結果を示すための基本的な仕事は (2.2) の解を具体的に表示することにある。Γ の曲率が strictly positive という仮定はここで用いられる。Ludwig [7] の考察をより一般化した Ikawa [4] の中に定理2.2を証明するのに必要な事実及び方法が示されている。しかしいくつかの所での変更は必要である。むつかしくはないが相当のページを要するので

ここには何も記せないがおゆるしを願います。

文献

〔1〕 R.Agemi: On energy inequality of mixed problems for hyperbolic equations of second order, J.Fac.Sci.Hokkaido Univ., 21(1971), 221-236.

〔2〕 浅倉史興: $\Delta - \lambda^2$ に対する外部第3種境界値問題の Green 函数の構成及び波動方程式に対する外部問題の解の減衰について. 京大修士論文. 1977年3月

〔3〕 M.Ikawa: Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Publ.RIMS Kyoto Univ., 12(1976), 55-122.

〔4〕 ———— : Problèmes mixtes pour l'équation des ondes II, to appear in Publ.RIMS Kyoto Univ..

〔5〕 ———— : Mixed problems for the wave equation III Exponential decay of solutions, to appear.

〔6〕 K.Kajitani: A necessary condition for the well posed hyperbolic mixed problem with variable coefficients, J.Math.Kyoto Univ., 14(1974), 231-242.

〔7〕 D.Ludwig: Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies, Comm.Pure Appl.Math., 20(1976), 103-138.

〔8〕 S.Miyatake: Mixed problem for hyperbolic equation of second order, J.Math.Kyoto Univ.,13(1973),435-487.

[9] C.S.Morawetz: Exponential decay of solutions of the wave equation, Comm.Pure Appl.Math., 19(1966), 439-444.

[10] ―――――― : Decay of solutions of the exterior problem for the wave equation, Comm.Pure Apll.Math., 28(1975), 229-264.

[11] R.Sakamoto: Mixed problems for hyperbolic equations I,II J.Math.Kyoto Univ., 10(1970), 349-373,403-417.

[12] T.Tokita: Exponential decay of solutions for the wave equation in the exterior domain with spherical boundary, J.Math.Kyoto Univ., 12(1972), 413-430.