数理解析研究所講究録
第 307 巻 1977 年 111-121

Boltzmann 方程式について

奈良女子大（理）　静田　靖
京大（教養）　浅野　潔

§0. 序

Ωは3次元空間$\mathbb{R}^3$内の有界凸閉領域で，境界$\partial\Omega$の各点におけるGauss曲率は正であるとする。tは時刻，$x\in\Omega$は（粒子の）位置，$\xi\in\mathbb{R}^3$は速度を表わすとし，密度関数（粒子の分布密度）を$f(t,x,\xi)$で表わす。Ω内の粒子が，お互い同志は弾性衝突をし，壁$\partial\Omega$では完全反射（入射角と反射角とが等しい）をするならば，粒子の密度$f(t,x,\xi)$は，次の方程式をみたすと考えられる；

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3} \xi_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + Q[f,f], & t>0,\ x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^3, \\ f|_{t=0} = f_0(x,\xi), & \\ f(t,x,\xi) = f(t,x,\xi'), & x\in\partial\Omega,\ \xi' = \xi - 2\langle\xi,n_x\rangle n_x, \end{cases}
$$

（ただしn_xはxにおける$\partial\Omega$の内向き法線）.

$Q[f,f]$はいわゆるcollision operatorで，次の形をもつとされている；

$$Q[f,g]=\iint_{\mathbb{R}^3\times S^2} q(|\xi-\xi'|,\theta)\{f(\eta)g(\eta')+f(\eta')g(\eta)-f(\xi)g(\xi')-f(\xi')g(\xi)\}d\xi' d\omega,$$

$$\omega\in S^2,\quad \cos\theta=\frac{\langle\omega,\xi-\xi'\rangle}{|\xi-\xi'|},$$

$$\eta=\xi+\langle\omega,\xi-\xi'\rangle\omega,\quad \eta'=\xi'-\langle\omega,\xi-\xi'\rangle\omega.$$

散乱 potential q に対して，我々は次の仮定をおく；

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}0\le q(v,\theta)\le q_0|\cos\theta|(v+v^{-\delta}) & (0\le{}^{\exists}\delta<1),\\ \int_0^\pi q(v,\theta)\sin\theta\, d\theta\ge q_1 v(1+v)^{-1}.\end{cases}$$

(cut-off hard potential の場合，条件 (A) はみたされている)。

ところで，Maxwell分布 $g=\beta e^{-\gamma|\xi|^2}$ $(\gamma>0)$ に対しては，$Q[g,g]=0$ となることが知られている。つまり，g は方程式 (1) の定常解である。ここで

$$g_0(\xi)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2},$$

$$f(t,x,\xi)=g_0(\xi)+g_0(\xi)^{\frac{1}{2}}u(t,x,\xi)$$

とおくと，(1) は次の形に書き直される；

$$(2)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{3}\xi_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i}-\Lambda u+Ku+\Lambda\Gamma[u,u],\\ u|_{t=0}=u_0(x,\xi),\\ u(t,x,\xi)=u(t,x,\xi'),\quad x\in\partial\Omega,\quad \xi'=\xi-2\langle\xi,n_x\rangle n_x.\end{cases}$$

ただし

$$\Lambda u=\nu(|\xi|)\times u(t,x,\xi),$$

$$Ku=\int_{\mathbb{R}^3}K(\xi,\xi')u(t,x,\xi')d\xi',$$

$$\Gamma[u,u] = \nu(|\xi|)^{-1} g_0(\xi)^{-\frac{1}{2}} Q[g_0^{\frac{1}{2}}u, g_0^{\frac{1}{2}}u] .$$

我々は (2) の線型部分を発展方程式として考察し，非線型項 $\Lambda\Gamma[u,u]$ を摂動として取扱うことによって，①初期条件 $u_0(x,\xi)$ が'ある意味で'小さければ，(2) の解 $u(t,x,\xi)$ が $0<t<\infty$ で1意的に存在すること，② $\lim_{t\to\infty} u(t,x,\xi)=0$，を示す。方法の本質的な部分は，Ukai [1] のそれの忠実な模倣である。

§1. 線型発展方程式

次の発展方程式を考えよう；

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3} \xi_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \Lambda u + Ku, & t>0,\ x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0(x,\xi), \\ u(t,x,\xi) = u(t,x,\xi'), & x\in\partial\Omega,\ \xi'=\xi-2\langle\xi,n_x\rangle n_x . \end{cases}$$

まず

$$A = -\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$B_0 = -\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \nu(|\xi|)\times = A-\Lambda,$$

$$B = B_0 + K = A - \Lambda + K$$

とおき，これらの作用素が $\Omega\times\mathbb{R}^3$ 上の適当な関数空間で，作用素の半群を生成することを示し，次にそれらの半群の性質を調べることにする（Ukain [ ] 参照）。

$$\Sigma = \Omega \times S^2,$$

$$\Sigma_0 = \{ (x,\omega) \in \Sigma \, ; \, x \in \partial\Omega, \, \langle \omega, n_x \rangle = 0 \},$$

$$\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_0$$

とおく。方程式の境界条件を考慮して，$x \in \partial\Omega$ のとき，(x,ω) と (x,ω') は，$\omega' = \omega - 2\langle \omega, n_x \rangle n_x$ なるとき同値，$(x,\omega) \equiv (x,\omega')$，と定める。$-A$ を Σ 上の vector field とみなして，Σ 上の flow Z_t を作ることができる。すなわち $(x,\omega) \in \Sigma_1$ に対して

$$Z_t(x,\omega) = (x + t\omega, \omega) \in \Sigma_1 \quad (|t| \text{ が小さいとき}),$$

また $(x,\omega) \in \Sigma_0$ に対しては

$$Z_t(x,\omega) = \partial\Omega \text{ の測地線上の点の位置と速度}$$

とすればよい。$Z_t Z_s = Z_{t+s}$ により，Z_t は $t \in \mathbb{R}$ に対して定義される Σ から Σ への写像となり，次の Lemma が成立つ。

Lemma 1. (i) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$Z_t(\Sigma_i) \subset \Sigma_i$ $(i = 0, 1)$.
(ii) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，Z_t は Σ から Σ への 1 対 1，onto の連続写像である（故に一様連続である）。

我々が用いたい相空間は，$\Omega \times \mathbb{R}^3 = \Sigma \times [0, \infty)$ であるから，Z_t をここまで拡張しなければならない。$(x,\omega) \in \Sigma$ に対して

$$Z_t(x,\omega) = (X(t,x,\omega), \Xi(t,x,\omega)) \in \Sigma$$

とかくことにすれば，$(x,\xi) = (x, |\xi| \frac{\xi}{|\xi|}) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ に対して

$$X(t,x,\xi) = X(t|\xi|, x, \tfrac{\xi}{|\xi|}),$$

$$\Xi(t,x,\xi) = |\xi|\,\Xi\left(t|\xi|, x, \frac{\xi}{|\xi|}\right),$$

$$Z_t(x,\xi) = (X(t,x,\xi),\ \Xi(t,x,\xi))$$

とおくことによって，Z_t を $\Omega\times\mathbb{R}^3$ の連続変換に拡張できる。（Σにおけると同様の同値関係の下で，Z_t は $\Omega\times\mathbb{R}^3$ をそれ自身に移す1対1，onto かつ連続な写像となる。）次の Lemma は重要である。（なお $\partial\Omega$ は C^3 級と仮定する。）

Lemma 2. (i) $X(t,x,\xi)$，$\Xi(t,x,\xi)$ は (t,x,ξ) につき区分的に C^2 級関数である。

(ii) $N_1(t,x) = \{\xi\in\mathbb{R}^3;\ X(-t,x,\xi)\in\partial\Omega\}$　$(t\neq 0)$,

$N_2(t,x) = \{\xi\in\mathbb{R}^3;\ \det\frac{\partial X}{\partial\xi}(-t,x,\xi) = 0\}$　$(t\neq 0)$

とおくと，$N_i(t,x)$ は Lebesgue 測度 0 の閉集合で，かつ $\mathbb{R}^3$ の compact set K に対して，$K\cap N_i(t,x)$ は (t,x) に関して outer semi-continuous である $(i=1,2)$。

関数空間 $C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ ： $\Omega\times\mathbb{R}^3$ で定義された（複素数値）連続関数 $f(x,\xi)$ で，

$(x,\xi)\equiv(x,\xi')$ のとき　$f(x,\xi) = f(x,\xi')$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty}(1+|\xi|)^\alpha \sup_{x\in\Omega}|f(x,\xi)| = 0$$

をみたすものの全体を $C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ で表わす（ただし $\alpha\geq 0$）。

$$\|f\|_\alpha = \sup_\xi (1+|\xi|)^\alpha \sup_x |f(x,\xi)|$$

を norm として，$C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ は Banach space となる。

作用素 A :　$C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)\ni f(x,\xi)\longmapsto f(Z_{-t}(x,\xi))\in C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ なる対応を T_t とかく。T_t は $C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ における作用素の 1-parameter群で，$\|T_t\|=1$ である。A が T_t の generator であることが容易に示される。すなわち $T_t=e^{tA}$ $(t\in\mathbb{R})$。また A の spectrum および essential spectrum を $\sigma(A)$ および $\sigma_e(A)$ で表わすと，$\sigma(A)=\sigma_e(A)=i\mathbb{R}$.

作用素 $B_0=A-\Lambda$:　仮定 (A) より，$0<\nu_0\leq\nu_1$ なる定数 ν_0, ν_1 に対して，$\nu_0\leq\nu(|\xi|)\leq\nu_1(1+|\xi|)$ となることが知られている (Grad [1])。故に $-\Lambda$ も作用素の半群 $e^{-t\Lambda}$ $(0\leq t<\infty)$ を生成する。$e^{tA}e^{-t\Lambda}=e^{-t\Lambda}e^{tA}$ が成立つので，

$$e^{tB_0}=e^{tA}e^{-t\Lambda}$$

とおくと，B_0 が生成する作用素の半群が得られる。かつ

$$\|e^{tB_0}\|\leq e^{-\nu_0 t}\quad(t\geq 0),$$

$$\mathcal{D}(B_0)\supset\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(\Lambda),$$

$$\sigma(B_0)=\sigma_e(B_0)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\,\lambda\leq-\nu_0\}$$

が成立つ。($\mathcal{D}(B_0)$ は B_0 の定義域.)

作用素 $B=B_0+K$:　$\mathbb{R}^3$ で定義された連続関数 $f(\xi)$ で，

$$|f|_\alpha=\sup_\xi(1+|\xi|)^\alpha|f(\xi)|<\infty$$

となるものの全体を $C_\alpha(\mathbb{R}^3)$ で表わす $(\alpha\geq 0)$. 仮定 (A) か

ら，次の条件 (A)′ が導びかれる（Grad [1]）；

$$(A)' \quad \begin{cases} K(\xi,\xi') \in C_0(\mathbb{R}^3_\xi ; L_1(\mathbb{R}^3_{\xi'})), \\ K \in \mathbb{B}(C_\alpha(\mathbb{R}^3), C_{\alpha+1}(\mathbb{R}^3)), \quad \alpha \geq 0, \end{cases}$$

ただし $C_0(\mathbb{R}^3_\xi ; L_1(\mathbb{R}^3_{\xi'}))$ は $L_1(\mathbb{R}^3)$ の値をとる $\mathbb{R}^3$ 上の連続関数全体を表わし，$\mathbb{B}(C_\alpha(\mathbb{R}^3), C_{\alpha+1}(\mathbb{R}^3))$ は $C_\alpha(\mathbb{R}^3)$ から $C_{\alpha+1}(\mathbb{R}^3)$ への有界作用素の全体を表わす。(A)′ より K は $C_\alpha(\mathbb{R}^3)$ における compact 作用素であることがわかる。ここで $u(x,\xi) \in C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ に対して

$$(Ke^{tB_0}K)(x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} K(\xi,\xi')e^{-t\nu(|\xi'|)}K(\eta,\zeta) \times u(X(-t,x,\xi'),\zeta)\,d\xi'd\zeta$$

と書いて，Lemma 2 (ii) を利用すると，$t>0$ のとき $Ke^{tB_0}K$ は $C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ の compact 作用素で，かつ $\mathbb{B}(C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3))$ の norm で t について連続（$t>0$ のとき）となることがわかる。故に

$$(4) \quad \begin{cases} K(\lambda-B)^{-1}K \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > -\nu_0) \text{ は } C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3) \text{ の compact} \\ \text{作用素}, \\ \lim_{|\mathrm{Im}\,\lambda|\to\infty} \|K(\lambda-B)^{-1}K\| = 0 \quad (\mathrm{Re}\,\lambda \geq \beta > -\nu_0 \text{ で一様}). \end{cases}$$

K が $C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ における有界作用素であるから，B は作用素の半群 e^{tB} を生成するが，(4) を用いて若干の計算を行なうことにより，次の Lemma を得る。

Lemma 3. (i) $\sigma_e(B) = \sigma_e(B_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} ; \mathrm{Re}\,\lambda \leq -\nu_0\}$，かつ $\sigma(B) \subset \{0\} \cup \{\lambda\in\mathbb{C} ; \mathrm{Re}\,\lambda \leq -\delta_0\}$ $(0<\delta_0<\nu_0)$.

(ii) Bの固有値0に属する固有空間への射影をPとすると，$2 \leq \mathrm{rank}\,P \leq 5$．かつ $0<\delta<\delta_0$ なる δ と $\alpha \geq 0$ に対して定数Mが存在して（$M = M(\alpha, \delta)$）

$$\| e^{tB} - P \| \leq M e^{-\delta t}.$$

証明．(4) より $\sigma_e(B) = \sigma_e(B_0)$．また $\mathrm{Re}\,\lambda > -\nu_0$ なるBの固有値 λ に属する固有関数は $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ に属する（(A)′ より）。Aは $L_2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ で skew self-adjoint，$-\Lambda$ および $L = -\Lambda + K$ は $L_2(\mathbb{R}^3)$（と $L_2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$）で非正定値であることから，$\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$．Lは0を孤立固有値にもち，固有空間は $g_0^{\frac{1}{2}}$，$\xi_i g_0^{\frac{1}{2}}$（$i = 1, 2, 3$），$|\xi|^2 g_0^{\frac{1}{2}}$ で張られることが知られている。$L_2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ では $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\Lambda)$ となることに注意して，Bの $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ となる固有値は，$\lambda = 0$ のみで，その固有空間の次元は2と5の間にあることがわかる。(i) の残りは，(4) より明らか。(ii) の評価は，spectral mapping theorem による。

§2. 非線型発展方程式

仮定 (A) より次のことが導びかれる；

$$(A)'' \begin{cases} \text{定数 } C = C(\alpha) \text{ が存在して } |\Gamma[f,f]|_\alpha \leq C |f|_\alpha^2, \\ C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3) \ni f \ (\alpha \geq 1) \text{ に対して } P\Lambda\Gamma[f,f] = 0. \end{cases}$$

前節までの結果を利用して，方程式 (2) を $C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ における次の方程式 (5) または (6) の形に書くことができる；

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Bu + \Lambda\Gamma[u,u], \quad t>0, \\ u(0) = u_0 , \end{cases}$$

$$(6)\qquad u(t) = e^{tB}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)B}\Lambda\Gamma[u(s),u(s)]\,ds .$$

$\Lambda\Gamma[u,u]$ の性質 $(A)''$ を考慮すれば,

$$(7)\qquad Pu_0 = 0 \ \text{かつ（従って）} \ Pu(t) = 0$$

と仮定してさしつかえない。

関数空間 $X_{\alpha,\delta}$ および $Y_{\alpha,\delta}$ $(\alpha \geq 0,\ 0<\delta<\nu_0)$: $[0,\infty)$ で定義された $C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ の値をとる連続関数 $f(t)$ で

$$\|f\|_{\alpha,\delta} = \sup_{0\leq t<\infty} e^{\delta t}\|f(t)\|_\alpha < \infty$$

をみたすものの全体を $X_{\alpha,\delta}$ で表わす。また $f(t)\in X_{\alpha,\delta}$ が $Pf(t) = 0$ となるとき, $f(t)\in Y_{\alpha,\delta}$ とする。

(6) または (5) に対する次の *a priori estimate* が成立つ。

Theorem 1. $\alpha \geq 1$, $0<\delta<\delta_0$ とする。正数 $b = b(\alpha,\delta)$ が存在して, (6) の解 $u(t)\in Y_{\alpha,\delta}$ に対して

$$(8)\qquad \|u\|_{\alpha,\delta} \leq M(\alpha,\delta)\|u_0\|_\alpha + b(\alpha,\delta)\|u\|^2_{\alpha,\delta} .$$

(8) を証明するためには, 次の *Lemma* 4 と *Lemma* 5 を示せば十分である。

Lemma 4. $0<\delta<\nu_0$ とする。

(i) $u_0\in C_\alpha(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ ならば, $e^{tB_0}u_0 \in X_{\alpha,\delta}$ かつ

$$\| e^{tB_0} u_0 \|_\alpha \le e^{-\nu_0 t} \| u \|_\alpha \text{ ; i.e., } \| e^{tB_0} u_0 \|_{\alpha,\delta} \le \| u_0 \|_\alpha .$$

(ii) $f(t) \in X_{\alpha,\delta}$ とし，$g(t) = \int_0^t e^{(t-s)B_0} \Lambda f(s)\, ds$ とおくと，$g(t) \in X_{\alpha,\delta}$ かつ

$$\| g \|_{\alpha,\delta} \le \frac{\nu_0}{\nu_0 - \delta} \| f \|_{\alpha,\delta} .$$

Lemma 5. $\alpha \ge 1$, $0 < \delta < \delta_0$ とする。

(i) $u_0 \in C_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, $Pu_0 = 0$ ならば，$e^{tB} u_0 \in Y_{\alpha,\delta}$ で，

$$\| e^{tB} u_0 \|_\alpha \le M(\alpha,\delta)\, e^{-\delta t} \| u_0 \|_\alpha .$$

(ii) $f(t) \in X_{\alpha,\delta}$, $P \Lambda f(t) = 0$ （i.e. $\Lambda f(t) \in Y_{\alpha-1,\delta}$）とする。$g(t) = \int_0^t e^{(t-s)B} \Lambda f(s)\, ds$ （$\in C_{\alpha-1}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$）とおくと，$g(t) \in Y_{\alpha,\delta}$，かつ正定数 $b = b(\alpha,\delta)$ が存在して

$$\| g \|_{\alpha,\delta} \le b \| f \|_{\alpha,\delta} .$$

証明. (ii) のみ示す。$\| \Lambda f(s) \|_{\alpha-1} \le \nu_1 e^{-\delta s} \| f \|_{\alpha,\delta}$ に注意し，Lemma 3 (ii) を（$\| e^{tB} - P \| \le M_1 e^{-\delta_1 t}$, $0 < \delta < \delta_1 < \delta$ として）用いると，$g(t) \in Y_{\alpha-1,\delta}$ （$\| g \|_{\alpha-1,\delta} \le \frac{M_1 \nu_1}{\delta_1 - \delta} \| f \|_{\alpha,\delta}$）を得る。

$$e^{tB} = e^{tB_0} + \int_0^t e^{(t-s)B_0} K e^{sB} ds$$

を用いると

$$g(t) = \int_0^t e^{(t-s)B_0} \Lambda f(s) + \int_0^t e^{(t-s)B_0} \Lambda \Lambda^{-1} K g(s)\, ds$$

と書ける。K の性質 (A)$'$ より $\| \Lambda^{-1} K g \|_{\alpha,\delta} \le \nu_0^{-1} C(\alpha) \| g \|_{\alpha-1,\delta}$ となるので，Lemma 4 より $g(t) \in X_{\alpha,\delta}$。$b = b(\alpha,\delta)$ の値は

$$\| g \|_{\alpha,\delta} \le \frac{\nu_0}{\nu_0 - \delta} \left(\| f \|_{\alpha,\delta} + \frac{C(\alpha)}{\nu_0} \frac{M(\alpha,\delta_1)}{\delta_1 - \delta} \nu_1 \| f \|_{\alpha,\delta} \right)$$

から定めればよい。

方程式(6) に逐次近似法を適用し、Theorem 1 を利用すると次の結果を得る。

Theorem 2. $\alpha \geq 1$, $0 < \delta < \delta_0$ とする。正定数 $d = d(\alpha, \delta)$ が存在して、$\|u_0\|_\alpha \leq d$, $Pu_0 = 0$ であれば、(6)の解 $u(t)$ が $Y_{\alpha,\delta}$ の中に唯1つ存在する。

上で得た解 $u(t, x, \xi)$ が、適当な意味で (2) の方程式を各点的に満たしていることもわかる。$u(t, x, \xi)$ は t に関して指数関数的に減少するから、我々の目標は一応達成されたといえる。

参考文献

[1] H. Grad: Asymptotic theory of the Boltzmann equation, II, in "Rarefied Gas Dynamics, vol. 1", Academic Press (1963).

[2] H. Grad: Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non-linear Boltzmann equation, in "Proceedings of Simposia in Applied Mathematics vol. 17", 154-183 (1965)

[3] S. Ukai: On the Existence of Global Solutions of Mixed Problem for Non-linear Boltzmann Equation, Proc. Japan Acad., vol. 50, no. 3, 179-184 (1974)

[4] Y. Shizuta; On the classical solutions of the Boltzmann equation, (to appear).