数理解析研究所講究録
第 308 巻 1977 年 12-31

12

多様体上のある3項系(homogeneous system)について

島根大 文理　吉川通彦

§1. homogeneous systems.

O. Loos [8], [9] によれば，多様体上に反射積を与えることによって対称空間を定義することができる。 すなわち，affine 対称空間 G は次のような可微分2項演算(反射積) $S: G\times G \longrightarrow G$; $(x,y)\longmapsto S_x y$ をもつ C^∞ 多様体である。

(S-1) $S_x x = x$,　(S-2) $S_x S_x y = y$

(S-3) $S_x S_y z = S_{S_x y} S_x z$

(S-4) 各 $a\in G$ は次のような近傍 U_a をもつ;

$$x\in U_a,\ S_a x = x \Rightarrow x = a.$$

このとき S_x は点 x に関する反射(折り返し)を表している。ここで特に上の公理のうち(S-1)〜(S-3)が純代数的な公理であることに着目してこの3公理をみたす準群 $(G,*)$; $x*y := S_x y$ を考え，更に G の1つの元 $e\in G$ を固定してもう1つの積演算 $xy := x^{\frac{1}{2}}*y^{-1}$ を定義すれば，この積によって e を単位元とするループ(単位元をもつ準群)が得ら

れる。([4, I, II]) ただし $x^{\frac{1}{2}}$ および x^{-1} はそれぞれ $x^{\frac{1}{2}}*e=x$ および $x^{-1}=e*x$ で定まる元を表す。このとき $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=x$ であり，また x^{-1} はこのループにおいて x の逆元である。

なお，位数有限の場合について，上の準群 $(G,*)$ は延沢氏他によって[3]，[10]で扱われており，また，対応する有限ループは Glauberman [2] などで扱われている。

一般に対称空間 G においては $(G,*)$ は必ずしも準群をなすとは限らないが，S_x が点 x に関する折返しであることを考慮すれば各点 e において積 $z=xy$ は次の意味で少くとも局所的には常に定義され局所ループをなす。すなわち，e の適当な測地的標準近傍において，点 e と点 x を結ぶ測地線 $\widehat{ex}$ に沿って他の測地線 $\widehat{ey}$ を平行移動して得られる測地線 $\widehat{xz}$ の終点 z がこの近傍に属するとき z は $x^{\frac{1}{2}}*y^{-1}$ で表されるから積 $z=xy$ も定義される。この局所ループにおいては，左移動 $L_x : y \longmapsto xy$ は測地線 $\widehat{ex}$ に沿う平行移動をあらわしている。

一方，1つのリー群 G の上で不変接続として(−)接続を考えると，1径数部分群はすべて単位元 e を通る測地線であり，その測地線に沿う e から x への平行移動はやはり x による G の左移動 L_x によってひきおこされている。そこで，1つの集合の任意の2元に対して一方を他方へうつすような

'平行移動'の概念が（抽象的に）与えられるような構造を以下において考察する。

<u>定義</u>. 集合 G の2元 x, y の各対に対して G のそれ自身への全単射 $\eta(x,y): G \to G$ が与えられ, $\eta(x,y)z$ を $\eta(x,y,z)$ であらわすとき η は G 上の3項系 $\eta: G\times G\times G \to G$ として次の公理をみたすものとする。

$$(H\text{-}1)\quad \eta(x,x,y)=\eta(x,y,x)=y,$$

$$(H\text{-}2)\quad \eta(y,x,\eta(x,y,z))=z,$$

$$(H\text{-}3)\quad \eta(x,y,\eta(u,v,w)) = \eta(\eta(x,y,u),\eta(x,y,v),\eta(x,y,w)),$$

$$x,y,z,u,v,w\in G.$$

このとき3項系 (G,η) を G 上の <u>homogeneous system</u>([6]) とよぶ。

この小論では C^∞ 多様体上の C^∞ homogeneous system に対して標準接続の概念を定義し，このような homog. sys. が1つの reductive な等質空間([11]) と見なされることを示し，更に接代数の概念を導入することによって，測地線に沿う平行移動がすべて $\eta(x,y)$ の形で表される場合（測地的）には，hom. sys. は局所的にその接代数によって特徴づけられること，および，その接代数は山口氏[12],[13],[14]の意味の general Lie triple system をなすことを示す。 また，特に対称空間と

なるような hom. sys. についても述べる。

homogeneous system (G, η) において1元 $e \in G$ を固定して積演算

(L) $\mu(x, y) := \eta(e, x, y)$, $x, y \in G$

を考えると，この積に関する左移動 $L_x = \eta(e, x) : y \longmapsto xy = \mu(x, y)$ は次の性質をもつ。

(L-1) $L_e = id$, $L_x e = x$ すなわち e は単位元.

(L-2) $L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}$, ただし $x^{-1} := \eta(x, e, e)$.

(L-3) $L_{x,y}(uv) = (L_{x,y}u)(L_{x,y}v)$, ただし $L_{x,y} := (L_{xy})^{-1} L_x L_y$ は積 μ に関する左内部写像である。

また，η はこの積を用いて次のように書かれる。

(H) $\eta(x, y, z) = x((x^{-1}y)(x^{-1}z))$.

逆に集合 G 上に1つの積演算 $\mu(x, y) = xy$ が与えられてその左移動 L_x が上の(L-1)～(L-3)(ただし各 x の逆元 x^{-1} の存在を仮定)をみたすならば(H)によって3項系 η を定義すれば η は G 上の1つの homogeneous system となり，この関係によって(L-1)～(L-3)をみたす積 μ と原点 e をもつ hom. sys. $(G, \eta ; e)$ とは1対1に対応する。([6]参照)

例1. 群 G の単位元を e とするときその左移動は明らかに(L-1)～(L-3)をみたす。実際 $L_{x,y} = id$, $\forall x, y \in G$ が成立っている。このとき(H) $\eta(x, y, z) = yx^{-1}z$ によっ

て対応する hom. sys. が得られる。 この hom. sys. は次の性質をもつ。

$$(H\text{-}4)\quad \eta(y,z)\,\eta(x,y)=\eta(x,z)\ ,\ \forall x,y,z\in G.$$

逆に (H-4) をみたす hom. sys. に対して1元 e を固定すれば積演算 (L) によって G 上に e を単位元とする群演算が得られる。([6])

注意. 上の例1においてある"平行移動" $\eta(x,y)$ によって u, $v\in G$ に $u', v'\in G$ がそれぞれ対応するとき $(u,v)//(u',v')$ と定義すれば // は $G\times G$ における同値関係を与える。 これは E. Cartan [1] において第2種の同値とよばれている。 特に加法群 R^n においては"平行移動" $\eta(x,y)$ は明らかにアフィン空間としての R^n の通常の平行移動と一致している。

例2. n次正定値実対称行列の全体 H_n は積演算

$$\mu(x,y):=x^{\frac{1}{2}}\,y\,x^{\frac{1}{2}}\qquad (\text{右辺は行列の積})$$

によって閉じているが、この積は単位行列 e に対して (L-1) 〜 (L-3) をみたすことが示される。 従って H_n 上に1つの hom. sys. η が (H) によって定義されるが、この η は (H-4) をみたさない。 実際、$z=\mu(x,y)$ とするとき左内部写像 $L_{x,y}=\eta(z,e)\,\eta(x,z)\,\eta(e,x)$ は一般に恒等写像とならない。 なお、この積 μ は対称空間 H_n の反射積 $x*y=xy^{-1}x$

から得られるもので，(H_n, μ) はループをなす。([5])

注意　上の2つの例では積 $xy = \mu(x,y)$ はいづれも e を単位元とするループをなしているが，任意の hom. sys から (L) で定義される積演算 μ は必ずしもループをなさない。特に (L-1)〜(L-3) をみたすループを等質ループ ([5]) とよぶ。　以下で述べる結果はすべて連結な C^∞ 多様体上の等質リー・ループに関する[5]の結果を，その左移動の立場から hom. sys に関する結果として（拡張的に）書き直したものである。

§2. 可微分 homogeneous system の標準接続

以下では G を連結な n 次元 C^∞ 多様体とし，η を G 上の C^∞ homogeneous system，すなわち公理 (H-1)〜(H-3) をみたす C^∞ 写像 $\eta: G\times G\times G \longrightarrow G$ とする。　次に述べる方法によって G 上に1つの線型接続 ∇ が定義される。

$\pi: P(G) \to G$ を G 上の標構バンドルとし，$P(G)$ の各元 u_0 を通る切断 $\Sigma_{u_0}: G \to P(G)$ を次のように定義する。

$$\Sigma_{u_0}(x) := \eta_*(a,x)\, u_0, \quad x\in G, \quad a = \pi(u_0).$$

ただし $\eta_*(a,x)$ は G 上の微分同型写像 $\eta(a,x)$ によってひきおこされる $\pi^{-1}(a)$ から $\pi^{-1}(x)$ への写像をあらわす。バンドル $P(G)$ の部分多様体 $\Sigma_{u_0}(G)$ の u_0 における接空間を

Q_{u_0} とかくとき，任意の $g \in GL(n, R)$ に対して $(\Sigma_{u_0}(x))g = \Sigma_{u_0 g}(x)$ が成立つことに注意すれば，$P(G)$ 上の n 次元 distribution $Q: u_0 \longmapsto Q_{u_0}$ を水平成分とするような G 上の線型接続 ∇ が定まる。

定義 上のようにして定義された線型接続 ∇ を hom. sys. (G, η) の標準接続とよぶ。

G のそれ自身への微分同型写像 α が $\alpha\eta(x, y, z) = \eta(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$，$\forall x, y, z \in G$ をみたすとき α を (G, η) の自己同型とよべば，次の命題は標準接続の定義から明らかである。

命題1 hom. sys. (G, η) の自己同型はすべてその標準接続 ∇ の affine 変換である。

系 (1) 任意の $x, y \in G$ に対して $\eta(x, y)$ は ∇ の affine 変換である。

(2) G の1点 e を原点として (L) で与えられる積 μ に関する左内部写像はすべて ∇ の affine 変換である。

η の C^∞ 自己同型群を $Aut(\eta)$，点 e における等方部分群を $A_e(\eta)$，e における積 μ の左内部写像群を $\Lambda_e(\eta)$ であらわすとき，(L-3) および (H) から Λ_e は A_e の部分群であることがわかる。 また，$Aut(\eta)$ は標準接続 ∇ の affine 変換群 $Aff(\eta)$ の閉部分群であり，従って $Aut(\eta)$ はリー群である。 $Aut(\eta)$ の

リー部分群 A_e における Λ_e の閉包を K_e であらわし，直積多様体 $A := G \times K_e$ に次のような積演算を導入する。

$$(\mathrm{M}) \quad (x,\alpha)(y,\beta) := (\mu(x,\alpha y),\ L_{x,\alpha y}\,\alpha\,\beta), \quad (x,\alpha),\ (y,\beta) \in A.$$

このとき直接計算により次のことが示される。

命題2　$A = G \times K_e$ は積（M）によって連結リー群であり，$K := \{e\} \times K_e$ は K_e と（自然な対応で）同型な A の閉部分群である。

命題3　K による A の左剰余類は $\{x\} \times K_e$，$x \in G$，の形で一意に表される。　このとき A は等質空間 A/K 上効果的であり，写像 $\varphi : A/K \longrightarrow G$；$\varphi(x \times K_e) = x$，は微分同型写像である。

命題4　G の相異る原点 e，e' に対応するリー群 K_e，$K_{e'}$ および $A = G \times K_e$，$A' = G \times K_{e'}$ はそれぞれ次の写像により同型である。

$$K_e \cong K_{e'}\ ; \quad \alpha \longmapsto \eta(e,e')\,\alpha\,\eta(e',e)$$

$$A \cong A'\ ; \quad (x,\alpha) \longmapsto (\eta(e,e')x,\ \eta(e,e')\,\alpha\,\eta(e',e))$$

例3　G を1つの連結リー群とするとき，例1によって G から得られる $hom.\ sys.\ \eta$ に対しては $K_e = \{id\}$，$A \equiv G$ である。　このとき η の標準接続 ∇ はリー群 G の（−）接続と一致する。

定理1 homogeneous system (G,η) の1点 e を原点とするとき積(L)に関する左内部写像群 Λ_e の閉包 K_e に対してリー群 $A=G\times K_e$ の閉部分群 $K=\{e\}\times K_e$ による等質空間 A/K は reductive な等質空間([11])であり，その(第2種)標準接続に関して微分同型写像 $\varphi: A/K \longrightarrow G$ (命題3)は G の標準接続への affine 同型写像を与える。

証明 リー群 A のリー環を $\mathfrak{a}$，K に対応する部分リー環を $\mathfrak{k}$ とするとき，命題2によって $\mathfrak{k}$ を K_e のリー環と見なし，$A=G\times K_e$ の単位元 (e, id) における接空間として $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}+\mathfrak{k}$，$\mathfrak{g}=T_e(G)$ と直和分解するとき，積演算(M)の定義から $ad K\cdot(G\times id)=G\times id$，従って $ad K\,\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}$ を得る。故にこの直和分解に関して A/K は reductive な等質空間である。 一般に reductive な等質空間 A/K の標準接続は，原点における任意の標構 $\hat{u}_0$ を固定するとき，A が $\hat{u}_0$ に自然に作用したとき得られる $P(A/K)$ の部分バンドルを A と同一視し，A の各元による左移動で部分空間 $\mathfrak{g}$ を移して得られる $A\equiv\hat{A}$ 上の distribution を水平成分とする $\hat{A}$ の無限小接続から定まる A/K 上の A-不変線型接続として得られる。([7]) 一方，積(M)によれば $(x,\alpha)\in A$ の A/K への左作用は $(x,\alpha)(y,K_e)=(L_x\alpha y, K_e)$ と表されるから微分同型写像 $\varphi: A/K \longrightarrow G$ によってひきおこされるバン

ドル写像を $\varphi_*: P(A/K) \to P(G)$, $(x,\alpha) \in A$ の $P(A/K)$ への左作用を $\tau(x,\alpha)$ で表すとき, $\varphi_* \tau(x,\alpha) = \eta_*(e,x)\alpha_* \varphi_*$ が成立つ。 命題1の系により $\eta(e,x)$ および α は G の標準接続の affine 変換であり, また, $\varphi_* \tau(G, id)\, \tilde{u}_0 = \eta_*(e,G)\, u_0 = \Sigma_{u_0}(G)$, $u_0 = \varphi_*(\tilde{u}_0)$, であることから φ_* は $P(A/K)$ の水平部分空間を $P(G)$ の水平部分空間に移すことがわかる。

証了.

定理1と命題4によれば任意の *hom. s.* (G, η) に対して1つの reductive な等質空間 A/K が同型を除いて一意に定まり, 微分同型写像 $\varphi: A/K \to G$ によって G と A/K を同一視することができる。 このとき η の標準接続は A/K の標準接続と見なされる。

hom. s. (G, η) の1点 e を原点として G を reductive な等質空間として $G = A/K$, $A = G \times K_e$, $K = e \times K_e$ と表す。 A のリー環の標準分解は $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ である。 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X によって生成される A の1径数部分群を $\exp tX = (x(t), \alpha(t))$, $x(t) \in G$, $\alpha(t) \in K_e$, $t \in R$ と表すとき, 標準接続に関して $x(t)$ は $G = A/K$ 上の原点 $e = x(0)$ を通る測地線である。([11])

<u>定義</u> 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp tX = (x(t), id)$ となるとき, すなわち, $\exp \mathfrak{g} \subset G \times id \subset A$ となるとき *hom. s.*

(G, η) は測地的であるという。命題4によってこの定義は原点 e の選び方によらない。

定理2 homogeneous system (G, η) が測地的であるための必要十分条件は，G の任意の測地線 C 上の任意の2点 x, y に対して，$\eta(x, y)$ が C に沿う x から y への接空間の平行移動をひきおこすことである。

証明 reductive な等質空間の標準接続(第2種)の定義から，任意の $X \in \mathfrak{g}$ によって生成される A の1径数部分群 $\exp tX = (x(t), \alpha(t))$ の G への作用は $e = x(0)$ を通る測地線 $C : x(t)$ に沿う接空間の平行移動 $T_e(G) \longrightarrow T_{x(t)}(G)$ をひきおこす。(G, η) が測地的ならば $\exp tX = (x(t), id)$ で，その G への作用は $\eta(e, x(t))$ と一致するから原点 e を通る任意の測地線 $C : x(t)$ に沿って e から $x(t)$ への接空間の平行移動は $\eta(e, x(t))$ からひきおこされる。命題1の系によれば，G の任意の点 a に対して $\eta(e, a)$ は標準接続の affine 変換であるから点 a を通る任意の測地線に対して同様のことが成立つ。逆に，任意の測地線 C 上の任意の2点 x, y に対して $\eta(x, y)$ が C に沿う平行移動をひきおこすとすれば，特に原点 e を通る測地線 $x(t)$ に対して $\exp tX = (x(t), \alpha(t))$ の G への作用 $\eta(e, x(t))\alpha(t)$ と $\eta(e, x(t))$ とが $T_e(G)$ から $T_{x(t)}(G)$ への同一の線型同型写像をひきおこすことになって

$T_e(G)$ 上で $\alpha(t)_* = id$ となる。 $\alpha(t)$ は affine 変換で G は連結であるから $\alpha(t)$ は G 上恒等写像に等しい。すなわち，(G, η) は測地的である。

証了

例4 連結リー群 G から得られる hom. s. (例3) は測地的である。

注意 連結 C^∞ hom. s. がすべて測地的であるかどうかわかっていない。

§3. homogeneous system の接代数

n 次元 C^∞ hom. s. (G, η) を原点 e に関する reductive な等質空間 A/K であらわす。 A のリー環の標準分解 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}$ において $\mathfrak{g} = T_e(G)$ の2元 X, Y に対して G 上の2つのベクトル場 $X^*(x) := L_x X$, $Y^*(x) := L_x Y$, $x \in G$, を用いて双一次写像を $\mu_* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$; $\mu_*(X, Y) := [X^*, Y^*](e)$ と定義する。 e のまわりの局所座標系であらわすと $\mu_*(X, Y)^i = (X^j Y^k - X^k Y^j) \frac{\partial^2 \mu^i}{\partial x^j \partial y^k}(e, e)$ である。ただし，積 $\mu(x, y)$ の座標を $(\mu^i(x, y))$，X および Y の成分を (X^i), (Y^i) とする。

一方 $A = G \times K_e$ の2元 (x, id) と (y, id) の積は $(\mu(x,y), L_{x,y})$ に等しいから，C^∞ 写像 $L : G \times G \to K$; $L(x, y) = L_{x,y}$ の (e, e) における2次の無限小を求めると，$L_{x,e} = L_{e,x} =$

id が成立つことから双一次写像 $L^*: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{k}$ が得られる。すなわち，写像 L を (e,e) のまわりの局所座標系とリー群 K の単位元のまわりの局所座標系を用いて（K が trivial でないとき）$L_{x,y}=(L^\lambda(x,y))_{\lambda=1,2,\cdots,\dim K}$ と表すとき，$L^*(X,Y)^\lambda = X^j Y^k \frac{\partial^2 L^\lambda}{\partial x^j \partial y^k}(e,e)$ で与えられる。$\mathfrak{g}$ における3項積を $[X,Y,Z]:=[L^*(X,Y)-L^*(Y,X), Z]$，$X,Y,Z\in\mathfrak{g}$，と定義すれば $[\mathfrak{k},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$ よりこの3項積は $\mathfrak{g}$ で閉じている。

<u>定義</u>　hom. s. (G,η) の原点 e において $\mathfrak{g}=T_e(G)$ に2項積 $XY:=\mu_*(X,Y)$ および3項積 $[X,Y,Z]$ を導入したとき $\mathfrak{g}$ を (G,η) の e における<u>接代数</u>とよぶ。

<u>例5</u>　(G,η) がリー群 G の hom. s. のとき，単位元 e における接代数は $\mathfrak{g}\equiv\mathfrak{a}$，$\mathfrak{k}\equiv 0$ より2項積 XY は $\mathfrak{g}$ のリー環における積 $[X,Y]$ と一致し，3項積は $[X,Y,Z]\equiv 0$ となっている。

<u>定理3</u>　測地的な hom. s. (G,η) の原点 e における接代数 $\{\mathfrak{g}; XY, [X,Y,Z]\}$ は山口[12]，[13]，[14]の意味の general Lie triple system をなす。このとき G の標準接続の捩率テンソルを S，曲率テンソルを R（ただし，通常の定義と反対符号とする）で表すとき，$X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ に対して $XY=S_e(X,Y)$，$[X,Y,Z]=R_e(X,Y)Z$ が成立つ。

証明. (G,η) が測地的であるから $X, Y \in \mathfrak{g}$ で生成される A の1径数部分群はそれぞれ $\exp tX = (x(t), id)$, $\exp tY = (y(t), id)$ の形に表される。従って(M)から次式が成立つ。

$$\begin{aligned} ad(\exp tX)\cdot \exp sY &= (x(t), id)(y(s), id)(x(t)^{-1}, id) \\ &= \left(x(t)(y(s)x(-t)),\ L_{x(t),y(s)} L^{-1}_{x(t),\,y(-s)x(-t)}\right) \end{aligned}$$

この式からリー環 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}$ において $[X, Y]$ の $\mathfrak{g}$ 成分および $\mathfrak{k}$ 成分を求めると

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} \mu(x(t), \mu(y(s), x(-t))) = \mu_*(X, Y).$$

$$\begin{aligned} [X, Y]_{\mathfrak{k}} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} \left(L_{x(t),y(s)} L^{-1}_{x(t),\,y(-s)x(-t)}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} \left(L_{x(t),y(s)} L_{(y(-s)x(-t))^{-1},\,x(-t)}\right) \\ &= L^*(X, Y) + L^*(Y, -X). \end{aligned}$$

故に $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = XY$, $[X, Y, Z] = ad[X, Y]_{\mathfrak{k}} Z$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ を得る。

reductive な等質空間 A/K の標準接続(すなわち G の標準接続)の捩率テンソル S および曲率テンソル R はいづれも平行場であり, 原点 e においては $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, Y]_{\mathfrak{g}} = S_e(X, Y)$ および $ad[X, Y]_{\mathfrak{k}} = R_e(X, Y)$ で表される。([11], ただし S, R はいづれも符号が反対) 従って S と R についての関係式は上に示したことから原点においては (G,η) の接代数における関係式を導くことがわかる。特に次の等式が S, R の定義および Bianchi の第1, 第2公式, Ricci の公式などから導かれる。

$$XY + YX = 0$$

$$[X, Y, Z] + [Y, X, Z] = 0$$

$$\mathfrak{S}\{[X, Y, Z] + (XY)Z\} = 0$$

$$\mathfrak{S}\{[XY, Z, U]\} = 0$$

$$[U, V, XY] = [U, V, X]Y + X[U, V, Y]$$

$$[U, V, [X, Y, Z]] = [[U, V, X], Y, Z] + [X, [U, V, Y], Z] + [X, Y, [U, V, Z]],$$

$$\forall X, Y, Z, U, V \in \mathfrak{g}.$$

ただし $\mathfrak{S}$ は X, Y, Z に関する巡回和を表す。 上の6公理をみたす algebra $\{\mathfrak{g};\ XY,\ [X, Y, Z]\}$ は山口氏([12],[13],[14])によって <u>general Lie triple system</u> とよばれている。

証了

2つの hom. s. (G, η), (G', η') の原点 e, e' に対して, e の近傍 U から e' の近傍 U' の上への微分同型写像 $f: U \to U'$ が $x, y, z, \eta(x, y, z) \in U \Rightarrow f\eta(x, y, z) = \eta'(fx, fy, fz)$ をみたすとき f を (G, η), (G', η') の e から e' への<u>局所同型</u>とよぶ。

<u>定理4</u> 測地的な2つの homogeneous systems (G, η), (G', η') の原点 e から原点 e' への局所同型が存在するための必要十分条件は e, e' における接代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ が同型なことである。

証明 $f: U \to U'$ が e から e' への局所同型であるとすれば,

fはGとG'の標準接続に関するaffine局所同型となる。従ってそれらの捩率S, S'および曲率R, R'はfによって対応する。特に原点において線型同型$f_*: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$は$f_* S_e(X, Y) = S'_{e'}(f_* X, f_* Y)$, $f_* R_e(X, Y)Z = R'_{e'}(f_* X, f_* Y) f_* Z$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, をみたし、定理3からf_*は接代数の間の同型写像を与えることがわかる。

逆に接代数の同型写像$F: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$が与えられると$F$は$e$における捩率$S$および曲率$R$を$e'$における捩率$S'$および曲率$R'$へそれぞれ対応させる。これらのテンソル場はすべて平行場であるからeのある近傍Uからe'のある近傍U'への局所affine同型$f: U \rightarrow U'$で、eにおいて$f_* \equiv F$となるものが存在する。ηおよびη'はいづれも測地的であるから定理2によって2点x, y (x', y')を結ぶ測地線に沿う平行移動は$\eta(x, y)$ ($\eta'(x', y')$)で与えられる。$\eta(x, y)$および$\eta'(x', y')$はaffine変換であるから任意の測地線を測地線へ移す。従ってU, U'を標準接続に関する適当な標準近傍に選べば、fによってeからe'へのhom. s. の局所同型が得られる。

証了

系. hom. s. (G, η)の各点における接代数はすべて同型である。

§4. 対称 homogeneous systems

C^∞ hom. s. (G, η) の各点 x に対して G の変換 S_x を

$$S_x y := \eta(y, x, x) \quad , y \in G$$

と定義する。このとき (S-1) $S_x x = x$ および (S-2) $S_x S_x = id$ が成立つから S_x は x を不動点とする G のそれ自身への微分同型写像である。任意の点 e に対して，e を原点とする積 (L) $\mu(x, y) := \eta(e, x, y)$ に関する x の逆元は $x^{-1} = S_e x$ で与えられるから S_e は e における接空間上で線型変換 $(S_e)_* = -id$ をひきおこす。従って e の近傍 U を適当に選ぶと $x \in U$, $S_e x = x \Rightarrow x = e$ が成立つ。故に公理 (S-4) も成立ち次の命題が得られる。

<u>命題5</u>. hom. s. (G, η) において変換 S_x, $x \in G$ がすべて η の自己同型ならば G は S_x, $x \in G$ を反射積とする対称空間 (§1) である。

<u>定義</u> hom. s. (G, η) が上の命題の条件をみたすとき，<u>対称</u>であるという。

<u>命題6</u>. (G, η) が対称であるための必要十分条件は，ある原点 e における積 $xy = \mu(x, y)$ に関して

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad , \quad x, y \in G$$

が成立つことである。

証明 等式 $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ は $S_e \eta(e, x, y) = \eta(S_e e, S_e x, S_e y)$

と書かれる。従って η が対称ならばこの等式が成立つことは明らかである。

逆にこの等式が成立つとき $\eta(x, e, y) = u$ とおくと $y = \eta(e, x, u)$ より $S_e \eta(x, e, y) = \eta(S_e x, e, S_e y)$ を得る。

$$\eta(x, y, z) = \eta(e, x)\,\eta(e, \eta(x, e, y), \eta(x, e, z))$$

と書き直して S_e を行うと $S_e \eta(x, y, z) = \eta(S_e x, S_e y, S_e z)$ が導かれる。任意の $a \in G$ に対して $\eta(e, a)$ は原点 e における積から原点 a における積への同型写像であるから，S_a も η の自己同型でなければならない。

証了

<u>定理5</u> 測地的かつ対称な *hom. s.* (G, η) を任意の原点 e に関して *reductive* な等質空間 A/K として表すとき，$G = A/K$ は各点 a に関する測地線の折返しが S_a で表されるような *affine* 対称空間であり，e における接代数 $\mathfrak{g}$ は *trivial* な2項積をもつ *Lie triple system* である。

証明 (G, η) が測地的ならば e を通る任意の測地線 $x(t)$, $x(0) = e$ に対して $S_e x(t) = x(t)^{-1} = x(-t)$ となり，S_e は e に関する測地線の折返しである。(G, η) が対称ならば S_e は η の自己同型，従って標準接続の *affine* 同型（命題1）である。また，任意の $a \in G$ に対して

$$S_a = \eta(e, a)\, S_e\, \eta(a, e)$$

が成立つから S_a は a に関する測地線の折返しである。
一方 $(x, \alpha) \in A = G \times K_e$ に対して $\sigma(x, \alpha) := (x^{-1}, \alpha)$ で定義される写像 $\sigma : A \to A$ は $K = e \times K_e$ の各元を固定するようなリー群 A の自己同型を与える。([5] *Theorem* 6.1 参照)
σ は明らかに $G = A/K$ 上 S_e をひきおこすから、折返し S_a $a \in G$ で定義される affine 対称空間は対称等質空間 $(A, K; \sigma)$ と見なされる。このとき G の標準接続は $S \equiv 0$, $\nabla R \equiv 0$ をみたすから接代数 $\mathfrak{g}$ は 3 項積 $[X, Y, Z] = R_e(X, Y)Z$ に関して *Lie triple system* となる。

証了

<u>注意</u> 定理5は (G, η) が測地的であるという仮定をはずしても成立する。([5] 参照)

REFERENCES

[1] E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations, J. Math. pures appl., 6(1927) 1-119.

[2] G. Glauberman, On loops of odd order I, II, J. of Alg., 1(1964) 374-396, 8(1968) 393-414.

[3] M. Kano, H. Nagao, N. Nobusawa, On finite homogeneous symmetric sets, Osaka J. Math., 13(1976) 399-406.

[4] M. Kikkawa, On some quasigroups of algebraic models of symmetric spaces I, II, III, Mem. Fac. Lit. Sci., Shimane Univ., Nat. Sci., 6(1973) 9-13, 7(1974) 29-35, 9(1975) 7-12.

[5] ________, Geometry of homogeneous Lie loops, Hiroshima Math. J., 5(1975) 141-179.

[6] ________, On the left translations of homogeneous loops, Mem. Fac. Lit. Sci., Shimane Univ., Nat. Sci., 10 (1976) 19-25.

[7] A. Lichnérovicz, Géométrie des Groupes de Transformations, Dunod 1958.

[8] O. Loos, Spiegelungsräume und homogene symmetrische Räume, Math. Zeitschr., 99(1967) 141-170.

[9] ________, Symmetric Spaces I, Benjamin 1969.

[10] N. Nobusawa, On symmetric structure of a finite set, Osaka J. Math., 11(1974) 569-575.

[11] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math., 76(1954) 33-65.

[12] K. Yamaguti, On the Lie triple system and its generalization, J. Sci. Hiroshima Univ. A 21(1958) 155-160.

[13] ________, On the theory of Malcev algebras, Kumamoto J. Sci., A 6(1963) 9-45.

[14] ________, On cohomology groups of general Lie triple systems, Kumamoto J. Sci., A 8(1969) 135-146.