数理解析研究所講究録
第 309 巻 1977 年 52-71

無限群を基本群としてもつ3次元多様体の位相同形問題について

北大 教養 小林一章

§0. 序論 無限群を基本群としてもつコンパクト3次元多様体の位相同形問題についてはWaldhausen([W])がorientable, sufficiently large, irreducibleという条件の下で，又Heil([H])がnon-orientableの場合sufficiently large, P^2-irreducibleという条件の下で解決している。ここでsufficiently largeという条件はコンパクト3次元多様体Mが2-sided incompressible surfaceを含むという事であるが，これは$H_1(M)$が無限群か又は$\pi_1(M)=(A \underset{C}{*} B)$ (free product with amalgamation)とかけるという事とも同値である。そして無限群を基本群としてもつがsufficiently largeでない3次元多様体が存在する([E-J])。そこでこの論文では無限群を基本群にもつorientable，コンパクト，3次元閉多様体の位相同形問題を考える。

§1. αを多様体の中の閉曲線とするとき，$\langle\alpha\rangle$はαを含

むホモロジー類，$[\alpha]$はαを含むホモトピー類とする。

Lemma 1。M, N: closed, orientable, irreducible, 3-manifolds，$\pi_1(N) \neq \{1\}$，αをNの中の単純閉曲線で$[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$なるものとする。$f: M \longrightarrow N$をホモトピー同値写像で$\alpha$に横断的なものとする。$f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$としたとき，もし$\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}\} \subset \mathring{B}^3$，$\partial B^3 \cap f^{-1}(\alpha) = \phi$なる3-ball B^3がMにあれば次の1)～3)を満足するホモトピー同値写像$f_1: M \longrightarrow N$が存在する。

1) $f_1 \simeq f$（ホモトピック）　2) f_1はαに横断的

3) $f_1^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\alpha) - \{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}\}$.

証明. B^3を上の条件のようなM^3の中の3-ballとする。$f(B^3) \subsetneqq N$と仮定してよい。先ず写像$f_1: M - \mathring{B}^3 \longrightarrow N$を$f_1 = f | M - \mathring{B}^3$と定義する。すると$f_1(\partial B^3) \cap \alpha = \phi$そして$\pi_2(N - \alpha) = 0$. 何故ならもし$\pi_2(N-\alpha) \neq 0$ならSphere Theoremによって$\pi_2(N-\alpha)$の0でない元を表現する埋め込み$\phi: S^2 \longrightarrow N - \alpha$がある。$\pi_2(N) = 0$だから$\phi(S^2)$は$N$の中でcontractible 3-manifold Cをboundする([L]).
もし$C \supset \alpha$なら$\pi_1(N)$で$[\alpha] = 1$となりαの条件に反する。そこで$C \not\supset \alpha$だが$\partial C \cap \alpha = \phi(S^2) \cap \alpha = \phi$より$C \subset N - \alpha$となり，これは$\phi(S^2)$が$\pi_2(N-\alpha)$の0でない元を表現している事に矛盾. 故に$\pi_2(N-\alpha) = 0$. 次に$\beta$を$N-\alpha$の中の単純

閉曲線で $[\beta] \neq 1 \in \pi_1(N)$ 且つ $\beta - f(B^3) \neq \phi$ なるものとする。$\pi_2(N-\alpha) = 0$ と $[\beta] \neq 1 \in \pi_1(N-\alpha)$ を使うと上と同様の議論によって $\pi_2(N-(\alpha \cup \beta)) = 0$ が示せる。そこで f_1 を $f_1(B^3) \subset N-(\alpha \cup \beta)$ になるように B^3 上に拡大する。すると $f_1^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\alpha) - \{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}\}$ である。又 f_1 と f は B^3 上でのみ異なる。

(1) もし $\pi_1(N)$ が無限群なら N は aspherical space ([Sc]) そこで $\pi_3(N) = 0$ であり $f_1 \simeq f$ となる。

(2) もし $\pi_1(N)$ が有限群なら $\Sigma^3 = f(B^3) \underset{\partial f}{\cup} f_1(B^3)$ とおき $F: S^3 \longrightarrow N$ を $F(S^3) = \Sigma^3$ なる写像とする。$\beta - f(B^3) \neq \phi$ で $\beta \cap f_1(B^3) = \phi$ だから $x \notin F(S^3)$ なる点 $x \in N$ がある。$p: \tilde{N} \longrightarrow N$ を universal covering, $\tilde{F}: S^3 \longrightarrow \tilde{N}$ を F の lifting とすると $\tilde{N}$ はホモトピー 3-sphere ([Sc]) で $\tilde{F}(S^3) \subset \tilde{N} - \{y\}$ ($y \in p^{-1}(x)$)、それ故 $\tilde{F}(S^3) \simeq 0$ in $\tilde{N}$。従って $F(S^3) \simeq 0$ in N。そこで $f_1 \simeq f$、そして $f_1(M) \cap \alpha \subset f(M) \cap \alpha$ だから f_1 は α に横断的である。』

Lemma 2. M, N, α, f は Lemma 1 と同じとする。すると次の 1), 2) を満足するホモトピー同値写像 $f_1: M \longrightarrow N$ が存在する。 1) $f_1 \simeq f$ 2) $M_0 = M - \mathring{U}(f_1^{-1}(\alpha), M)$ は又 irreducible.

証明) f_1 を Lemma 1 で得られた写像とする。Σ^2 を M_0 に

埋め込まれた2-sphereとする。Mはirreducibleだから$\partial B^3=\Sigma^2$となる3-ball B^3がMにある。$\Sigma^2 \cap f_1^{-1}(\alpha)=\phi$だから$B^3 \subset M_0$又は$B^3$はいくつかの$\alpha_i$を含む。しかし$f_1$の条件によって$B^3$に含まれる$\alpha_i$は存在しない。それ故$M_0$はirreducibleである』

Lemma 3. M, N: closed, orientable 3-manifolds
$\pi_1(N) \neq \{1\}$, $\pi_2(N)=\{0\}$, $f: M \longrightarrow N$をホモトピー同値写像とする。$[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$であるようなNの中の単純閉曲線$\alpha$に対して次の(1), (2)を満足する写像$g: M \longrightarrow N$がある。

(1) $g \simeq f$. (2) gはαに横断的で$g^{-1}(\alpha)$は連結.

証明. fはαに横断的であると仮定してよい。従って$f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$は単純閉曲線の和集合. fはホモトピー同値写像であって$[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$だから$f^{-1}(\alpha)$の1つの成分, (例えば$\alpha_1$)で$f|\alpha_1: \alpha_1 \longrightarrow \alpha$が上への写像になっているものがある。$f(e_1)=f(e_i)$となるような点$e_1 \in \alpha_1$, $e_i \in \alpha_i$を選ぶ. fがホモトピー同値写像だからe_1とe_iを結ぶMの中の単純曲線β_iで次の(3), (4), (5)を満足するものが取れる。(3) $\beta_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j = \partial\beta_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j = \{e_1, e_i\}$ (4) Nで$f(\beta_i) \simeq 0$ (5) $f|\beta_i$が埋め込み.
更に$N-\alpha$で$f(\beta_i) \simeq 0$としてよい。これはもし必要ならfをホモトピーの範囲で変形する事により可能である。$U_i = U(\beta_i,$

$M)$, $V_i=U(f(\beta_i), N)$ を細い正則近傍とする。$\partial U_i\cap\alpha_1=\{c_{11}, c_{12}\}$, $\partial U_i\cap\alpha_i=\{c_{i1}, c_{i2}\}$ とする. c_{11} と c_{i1} 又は c_{i2} とを U_i の中の simple unknotted arc γ_{i1} で結び c_{12} と c_{i1} 又は c_{i2} とを U_i の中の simple unknotted arc γ_{i2} で結ぶ. ただし結び方は $(\alpha_1-(\alpha_1\cap\mathring{U}_i))\cup(\alpha_i-(\alpha_i\cap\mathring{U}_i))\cup\gamma_{i1}\cup\gamma_{i2}$ が α_1, α_2 の向きから導入された向きをもつ単純閉曲線になるように取る。今 c_{11}, c_{12} は各々 c_{i1}, c_{i2} と結ばれたと仮定する。c_{1j} と c_{ij} $(j=1,2)$ を次の (6), (7) を満足するように ∂U_i 上の単純曲線 δ_{ij} $(j=1,2)$ で結ぶ. (6) $\delta_{i1}\cap\delta_{i2}=\phi$ (7) $\gamma_{ij}\cup\delta_{ij}$ $(j=1,2)$ は U_i に埋め込まれた 2-ball B_j^2 $(j=1,2)$ を bound し $B_1^2\cap B_2^2=\phi$. 次に写像 $g_i: M\longrightarrow N$ を定義する。先ず $g_i: M-\mathring{U}_i\longrightarrow N$ を $g_i=f|M-U_i$ と定義し
$$g_i(\gamma_{ij})=\begin{cases}\alpha\cap V_i & \text{もし } g(\partial\gamma_{ij})=f(\partial\gamma_{ij})=2\text{点}\\ f(\partial\gamma_{ij}) & \text{もし } g(\partial\gamma_{ij})=f(\partial\gamma_{ij})=1\text{点}\end{cases}$$
と定義する。すると $g_i(\gamma_{ij}\cap\delta_{ij})$ は V_i の中の閉曲線である。$N-\alpha$ で $f(\beta_i)\simeq 0$ であり $g(\gamma_{ij}\cup\delta_{ij})\simeq f(\beta_i)$ in V_i, しかもそのホモトピーは $N-\alpha$ で作れるから $g(\gamma_{ij}\cup\delta_{ij})\simeq 0$ in $N-\alpha$ $(j=1,2)$ である。従って g_i を $g_i(B_j^2)\subset N-\alpha$ $(j=1,2)$ となるように $B_1^2\cup B_2^2$ 上に拡大出来る。次に $U_i-(B_1^2\cup B_2^2)$ は 3-ball であり Lemma 1 の証明と同様にして $\pi_2(N-\alpha)=0$ であるから g_i を $g_i(U_i-(B_1^2\cup B_2^2))\subset N-\alpha$ となるように $U_i-(B_1^2\cup B_2^2)$ 上に拡大出来る。g_i と f は U_i 上でのみ異なるから, もし $\pi_1(N)$ が無限群な

らNは aspherical manifold になり従って $g_i \simeq f$. 又もし$\pi_1(N)$が0でない有限群であるなら点 $x \in N$ を $x \notin V_i \cup g_i(U_i)$ なるようにとる。これは $\alpha - (V_i \cup g_i(U_i)) \neq \phi$ だから可能である。$p : \tilde{N} \to N$ を universal covering とし $\Sigma^3 \subset \tilde{N}$ を $f(U_i) \underset{\partial}{\cup} g_i(U_i)$ の lifting とする。$\tilde{N}$ はホモトピー3次元球面([Sc])で $\Sigma^3 \subset \tilde{N} - \{y\}$ ($y \in p^{-1}(x)$) だから $\Sigma^3 \simeq 0$ in $\tilde{N} - \{y\}$. そこで $\tilde{N}$ で $\Sigma^3 \simeq 0$. 従ってNで $f(U_i) \underset{\partial}{\cup} g_i(U_i) \simeq 0$. 故に $g_i \simeq f$. そして $g_i^{-1}(\alpha)$ の連結成分の数は $f^{-1}(\alpha)$ のそれよりも1つ少なくなっている. この事を全ての $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して行なうと求める写像 g を得る. ⌟

Lemma 4. N を $\pi_2(N) = 0$ であるような closed, orientable 3-manifold とし, α をNの中の単純閉曲線とする. m を $\partial U(\alpha) = \partial U(\alpha, N)$ の meridian とする. もしNが種数が正であるような 2-sided, incompressible surface を含まないなら任意の $t \neq 0$ に対し $H_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ で $\eta_\#(t\langle m \rangle) \neq 0$. ここで $\eta : \partial U(\alpha) \longrightarrow N - \mathring{U}(\alpha)$ は包含写像である。

証明. もしある $t \neq 0$ に対し $\eta_\#(t\langle m \rangle) = 0$ なら $\langle \phi(\partial F') \rangle = \eta_\#(t\langle m \rangle)$ となるような proper embedding $\phi : (F', \partial F') \longrightarrow (N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ がある。$\phi(\partial F')$ は $\partial U(\alpha)$ 上の 1-spheres の和集合で各 1-sphere は $\partial U(\alpha)$ 上で m に isotopic であるとし

てよい。そこで $\phi(\partial F')$ は $U(\alpha)$ で 2-balls D_i^2 $(i=1,2,\cdots,p)$ を bound する. $F=\phi(F')\underset{\partial}{\cup}\bigcup_{i=1}^{p}D_i^2$ とおく. F は N の中の 2-sided orientable surface. もし F が incompressible でないなら ([H3. 6.1]) を使って F を surgery し F を incompressible surface F_1 に変える。すると F_1 は surgery trace によって N で F に homologous であり N に関する条件より F_1 は 2-spheres の和集合, そして F_1 と α との交叉数 $=t\neq 0$. これは $\pi_2(N)=0$ に矛盾. 従って任意の $t\neq 0$ に対し $H_1(N-\overset{\circ}{U}(\alpha))$ で $\eta_\#(t\langle m\rangle)\neq 0$.

Lemma 5. ([Sc]) M を $\pi_2(M)=0$ なるコンパクト3次元多様体とする。もし $\pi_1(M)$ が無限群なら torsion free である。

Lemma 6. M を irreducible 3-manifold とし, S を M の中の連結部分集合で M の中のどんな 3-ball にも含まれないものとする。すると M−S の各連結成分は irreducible である。

証明. Σ^2 を M−S のある連結成分に埋め込まれた 2-sphere であるとする。M が irreducible だから $\partial B^3=\Sigma^2$ となる 3-ball B^3 が M の中にある。S は B^3 の中に含まれなく $\Sigma^2\subset M-S$ という事より B^3 は Σ^2 が含まれる M−S の連結成分に含まれる。従ってその連結成分は irreducible.

Lemma 7. Nは$\pi_2(N)=0$であるような closed, orientable 3-manifoldで更に種数が正である 2-sided, incompressible surface を含まないとする。αを$\pi_1(N)$で$[\alpha]$が infinite order をもつようなNの中の単純閉曲線とする。すると$\partial U(\alpha) = \partial U(\alpha, N)$は$N-\mathring{U}(\alpha)$で incompressible.

証明. Dehn's Lemma と Loop Theorem によって
$\eta_*: \pi_1(\partial U(\alpha)) \longrightarrow \pi_1(N-\mathring{U}(\alpha))$が injective である事を示せばよい。lemm 4 と$[\alpha]$が infinite order をもつ事より

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(\partial U(\alpha)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\eta_*"'] & H_1(\partial U(\alpha)) \arrow[d, "\eta_\#"] \\
\pi_1(N-\mathring{U}(\alpha)) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_*"'] & H_1(N-\mathring{U}(\alpha)) \\
\pi_1(N) &
\end{tikzcd}
$$

任意の$s, t\ (\neq 0)$に対し
$\eta_*([m]^s)\neq 1$, $\eta_*([l]^t)\neq 1$
ここでm, lは$\partial U(\alpha)$上のある指定された meridian と longitude. 又0でない適当なs, tに対し$\eta_*([m]^s[l]^t)=1$とすると$1=\omega_*\eta_*([m]^s[l]^t) = \omega_*([l]^t)$ これは$[\alpha]$が$\pi_1(N)$で infinite order をもつ事に矛盾、故にη_*は injective.

Lemma 8. M, Nを closed, orientable 3-manifolds とし$\pi_1(N)\neq 1$, $\pi_2(N)=0$とする。αをNの中の単純閉曲線で$[\alpha]\neq 1\in\pi_1(N)$なるものとする。$f: M\longrightarrow N$を$\alpha$に横断的なホモトピー同値写像とすると次の(1), (2)を満足するαに横断

的な写像 $g: M \longrightarrow N$ がある。 (1) $g \simeq f$ (2) $g^{-1}(\alpha)$ の任意の連結成分 β に対し $g_*([\beta]) = [\alpha]$.

証明. $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ $(\alpha_i \cong S^1)$ とする。もし $f_*([\alpha_1]) = [\alpha]^t$ $(|t| > 1)$ なら $f(e_1) = f(e_2)$ となる α_1 の点 e_1, e_2 をとる. f_* が同形だから e_1 と e_2 を結ぶ M の単純閉曲線 γ で N の中で $f(\gamma) \simeq 0$ となるものがある。γ は $\gamma \cap f^{-1}(\alpha) = \partial\gamma \cap f^{-1}(\alpha) = e_1 \cup e_2$ となっているとしてよい。lemma 3 の証明と同じ方法によって次の(3), (4)を満足する写像 $f_1: M \longrightarrow N$ を得る (3) $f_1 \simeq f$ (4) $f_1^{-1}(\alpha) = \alpha_{11} \cup \alpha_{12} \cup \alpha_2 \cup \cdots \cup \alpha_n$ で $f_{1*}([\alpha_{11}]) = [\alpha]^{t_2}$, $f_{1*}([\alpha_{12}]) = [\alpha]^{t_2}$, $t = t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2 \neq 0$ ここで α_{11}, α_{12} は lemma 3 の証明にある surgery と同じ方法により α_1 から得られたもの. 又もし $f_*([\alpha_1]) = 1$ なら α_1 を $f_*([\alpha_j]) = [\alpha]^t$ $(t \neq 0)$ なる $f^{-1}(\alpha)$ の成分 α_j に lemma を使って連結する。又もし $f_*([\alpha_1]) = [\alpha]^{-1}$ なら α_1 の向きを逆にする。このような操作を全ての α_i に対し行なう事により求める写像 g を得る。

Lemma 9. M, N, α, f を lemma 8 と同じものとする。すると次の(1), (2)を満足するホモトピー同値 $g: M \longrightarrow N$ がある. (1) $g \simeq f$ (2) $g^{-1}(\alpha) = \gamma$ は連結で $g_*([\gamma]) = [\alpha]$.

証明. $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ とする. lemma 3 と lemma 8 を

使うことにより全てのiに対し$f_*([\alpha_i])=[\alpha]$となっていると仮定してよい。γ_2をα_1とα_2を結ぶMの中の単純曲線で次の(3), (4)を満足するものとする。(3) $\gamma_2\cap\bigcup_{i=1}^{n}\alpha_i=\partial\gamma_2\cap(\alpha_1\cup\alpha_2)=\partial\gamma_2$ (4) $f(\gamma_2)$は閉曲線で$N-\alpha$で$f(\gamma_2)\simeq 0$. するとf_*が同形だからMで$\alpha_1\gamma_2\alpha_2^{-1}\gamma_2^{-1}\simeq 0$. 従って$\phi(\partial D^2)=\alpha_1\gamma_2\alpha_2^{-1}\gamma_2^{-1}$となるような写像$\phi: D^2\longrightarrow M$がある. $\phi(D^2)$を利用してα_1, α_2を変形する事により次の(5), (6), (7)を満足する写像$f_1: M\longrightarrow N$を作る. (5) $f_1\simeq f$ (6) $f_1^{-1}(\alpha)=\alpha_1'\cup\alpha_2'\cup\alpha_3\cup\cdots\cup\alpha_n$

(7) 次の(a), (b), (c)を満足する写像$\phi_1: D^2\longrightarrow M$が存在する.

(a) $\phi_1(\partial D^2)=\alpha_1'\gamma_2\alpha_2'^{-1}\gamma_2^{-1}$

(b) $\phi_1(D^2)\cap(\alpha_3\cup\cdots\cup\alpha_n)=\phi$

(c) $\phi_1^{-1}(\gamma)\subset\partial D^2\cap S_2(\phi_1)$ 且つ $S(\phi_1)-\phi_1^{-1}(\gamma)\subset\mathring{D}^2$.

ここで$S(\phi_1)=Cl\{x\in D^2 \mid \#\phi_1^{-1}\phi_1(x)>1\}$, $S_2(\phi_1)=\{x\in D^2 \mid \#\phi_1^{-1}\phi_1(x)=2\}$である。Dehn's Lemmaを使って$\phi_1$を$S(\phi_2)=\phi_2^{-1}(\gamma)\subset\partial D^2$となるような写像$\phi_2: D^2\longrightarrow M$に変える。従って次のような埋め込み$\phi_3: S^1\times I\longrightarrow M$があるとしてよい。

(8) $\phi_3(S^1\times\{0\})=\alpha_1'$, $\phi_3(S^1\times\{1\})=\alpha_2'$

(9) $\phi_3(S^1\times I)\cap f_1^{-1}(\alpha)=\phi_3(S^1\times I)\cap(\alpha_1'\cup\alpha_2'\cup\alpha_3\cup\cdots\cup\alpha_n)$
$=\alpha_1'\cup\alpha_2'$.

又$f_{1*}([\alpha_i])=[\alpha]$と$f_1$が$\alpha$にtransversal ([R & S])という事より([H3. 13.1])を使って$f_1|U(\alpha_i): U(\alpha_i)\longrightarrow U(\alpha)$は

位相同形であると仮定してよい。$P=U(\varphi_3(S^1\times I),M)$ とおくと $P\cong S^1\times D^2$. そこで $\psi(S^1\times D^2)=P$, $\psi(S^1\times\{0\})=\alpha_1$ なる埋め込み $\psi: S^1\times D^2\longrightarrow M$ をとる（ここで $\{0\}$ は D^2 の中心）. 写像 $g_1: M-P\longrightarrow N$ を $g_1=f_1|M-P$ と定義し $g_1\psi(S^1\times\{0\})=\alpha$, $g_{1*}\psi_*([S^1\times\{0\}])=[\alpha]$ と定義する。$g_1\psi(p\times D^2)$ を $g_1\psi(p\times(D^2-\{0\}))\subset N-\alpha$ となるように定義する。ただし $\psi(p\times D^2)\supset\gamma_2$ となるようにしておく。$U(p)=U(p,S^1)$ とおいて g_1 を $U(p)\times D^2$ 迄拡大. このとき $g_1(U(p)\times(D^2-\{0\}))\subset N-\alpha$ と出来る。今 ω を D^2 の中心と ∂D^2 の点とを結ぶ線分で $\psi(\omega)\supset\gamma_2$ なるものとする。$f_1\psi(\alpha_1\gamma_2\alpha_2^{-1}\gamma_2^{-1})\simeq 0$ in $N-\alpha$ と $f_1|U(\alpha_i):U(\alpha_i)\longrightarrow U(\alpha)$ が位相同形より $N-\alpha$ で $g_1\psi(\partial((S^1-\mathring{U}(p))\times\omega))\simeq 0$. 従って $g_1\psi((S^1-\mathring{U}(p))\times\omega)\subset N-\alpha$ となるように g_1 を拡大出来る。$Q=(S^1\times D^2)-(U(p)\cup(S^1-U(p))\times\omega)$ は open 3-ball で $\pi_2(N-\alpha)=0$ だから $g_1(Q)\subset N-\alpha$ となるように g_1 を拡大出来る。従って我々は次をみたす map $g_1: M\longrightarrow N$ を得た事になる。(10) $g_1\simeq f$ (11) $g_1^{-1}(\alpha)=\alpha_1\cup\alpha_3\cup\cdots\cup\alpha_n$ (12) $g_{1*}([\alpha_1])=g_{1*}([\alpha_i])=[\alpha]$ $(i=3,4,\cdots,n)$. この操作を繰り返していくと求める g が得られる。

Lemma 10. M, N, α, f は lemma 9 と同じとする。$f^{-1}(\alpha)=\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_n$ とおく, ただし $f_*([\alpha_i])=[\alpha]$. 今 $[\alpha_1]$ に

よって生成される部分群 $gp(\{[\alpha_1]\}, \pi_1(M))$ に対応する M の covering space $\tilde{M}$ が $S^1\times R^2$ に位相同形で α_1 の $\tilde{M}$ への lifting $\tilde{\alpha_1}$ が $\tilde{\alpha_1}=S^1\times\{0\}\subset S^1\times R^2$ となっていると次のような写像 $g: M \longrightarrow N$ がある. (1) $g\simeq f$ (2) $g^{-1}(\alpha)=\alpha_1$ で $g_*([\alpha_1])=[\alpha]$.

証明. lemma 9 の証明において f を g_1 に変形したとき $g_1^{-1}(\alpha)=\alpha_1'\cup\alpha_3\cup\cdots\cup\alpha_n$ でなく $g_1^{-1}(\alpha)=\alpha_1\cup\alpha_3\cup\cdots\cup\alpha_n$ と変形出来ればよい。そのためには lemma 9 の証明で $\phi(D^2)$ を利用して f から f_1 を作るとき α_1 と α_2 の両方を変えずに α_2 のみを変えて作ればよい。$\tilde{\alpha_i}$ を α_i の $\tilde{M}$ への lifting $(i=1,2)$ とする。すると $\tilde{\alpha_1}\simeq\tilde{\alpha_2}$ in $\tilde{M}$. 今 $U_0=U(\tilde{\alpha_1},\tilde{M})=U(S^1\times\{0\}, S^1\times R^2)$ を $\tilde{\alpha_1}$ の小さな近傍で $U_0\cap\tilde{\alpha_2}=\phi$ なるものとする。すると $[\tilde{\alpha_2}]=[m_0]^a[l_0]\in\pi_1(\tilde{M}-\mathring{U}_0)$ $(a\in \mathbb{Z})$. 従って $\phi: S^1\times I\longrightarrow\tilde{M}$ を $\phi(S^1\times\{0\})=\tilde{\alpha_1}$, $\phi(S^1\times\{1\})=\tilde{\alpha_2}$ となる $\tilde{\alpha_1}$ と $\tilde{\alpha_2}$ との間のホモトピーとすると $S(\phi)\cap S^1\times\{0\}=\phi$ と出来る. ここで $S(\phi)=Cl\{x\in S^1\times I \mid \#\phi^{-1}\phi(x)>1\}$ 従って α_2 のみを変えて lemma 9 の f_1 が作れる。$\lrcorner$

Proposition 1. M, N を closed, orientable, irreducible 3-manifolds としそれらの基本群は無限群であるとする。$f: M\longrightarrow N$ をホモトピー同値写像とし α を $\pi_1(N)$ で $[\alpha]\neq 1$ なる N の中の単純閉曲線とする。すると次の (1), (2) (3) を満

足する写像 $g: M \to N$ がある。(1) $g \simeq f$ (2) $g|g^{-1}(U(\alpha)): g^{-1}(U(\alpha)) \to U(\alpha)$ は位相同形写像 (3) $(g|M - g^{-1}(\mathring{U}(\alpha)))_*: \pi_1(M - g^{-1}(\mathring{U}(\alpha))) \to \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ は surjective homomorphism ここで $U(\alpha) = U(\alpha, N)$ は α の N における正則近傍.

証明. N が正の種数をもつ 2-sided, incompressible surface を含むなら N は sufficiently large. 従って結果は Waldhausen ([W]) から得られる。そこで N はそのような曲面を含まないとする。f は α に横断的であると仮定してよい ([R & S]). Lemma 9 によって次の (4), (5) を満足する写像 $g_0: M \to N$ がある。(4) $g_0 \simeq f$ (5) $g_0^{-1}(\alpha) = \beta$ は連結で $\pi_1(N)$ で $g_{0*}([\beta]) = [\alpha]$. g_0 は α に横断的だから $g_{0\#}: H_1(\partial U(\beta)) \to H_1(\partial U(\alpha))$ は同形である ([R & S]). すると ([H3. 13.1]) によって次の (6), (7) を満足する写像 $g: M \to N$ がある。(6) $g \simeq g_0$ (7) $g|U(\beta): U(\beta) \to U(\alpha)$ は位相同形写像. さて $g_{1*} = (g|M - \mathring{U}(\beta))_*: \pi_1(M - \mathring{U}(\beta)) \to \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ が surjective である事を示す。対 $(M - \mathring{U}(\beta), \partial U(\beta))$, $(N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ のホモトピー完全系列より

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1(\partial U(\beta)) \arrow[r] \arrow[d, "g_{2*}"] & \pi_1(M - \mathring{U}(\beta)) \arrow[r] \arrow[d, "g_{1*}"] & \pi_1(M - \mathring{U}(\beta), \partial U(\beta)) \arrow[r] \arrow[d, "g_{3*}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1(\partial U(\alpha)) \arrow[r] & \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha)) \arrow[r] & \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで g_i $(i = 1, 2, 3)$ は全て g の適当な制限写像であ

り，$\partial U(\alpha), \partial U(\beta)$ が lemma 7 より各々 $N-\mathring{U}(\alpha)$，$M-\mathring{U}(\beta)$ で incompressible だから i_α，i_β は injective である。そして上の議論によって g_{2*} は同形である。γ を $N-\mathring{U}(\alpha)$ の中の単純曲線で $\pi_1(N-\mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ の 0 でない元を表現しているものとすると，$\partial U(\beta)$ を固定したまゝ $g_3' \simeq g|M-\mathring{U}(\beta)$ となり且つ γ に横断的な写像 $g_3': M-\mathring{U}(\beta) \longrightarrow N-\mathring{U}(\alpha)$ がある．$\partial g_3' = g_3|\partial U(\beta)$ は位相同形だから $g_3'^{-1}(\gamma)$ の component δ で $\pi_1(M-\mathring{U}(\beta), \partial U(\beta))$ で $[\delta] \neq 1$ なるものがある。従って g_{3*} は surjective そこで g_{1*} は surjective 故に g は求める写像である。

Proposition 2．M, N を closed, orientable, irreducible 3-manifolds とし $\pi_1(N)$ は無限群とする．$\pi_1(M), \pi_1(N)$ で各々 $[\alpha] \neq 1$，$[\beta] \neq 1$ なるような M, N の中の単純閉曲線 α, β とホモトピー同値写像 $h: M \longrightarrow N$ があって次の (1)，(2)，(3) を満足するとする。(1) $h^{-1}(\beta) = \alpha$ (2) $h_*([\alpha]) = [\beta]$ (3) $(h|M-\mathring{U}(\alpha))_*: \pi_1(M-\mathring{U}(\alpha)) \longrightarrow \pi_1(N-\mathring{U}(\beta))$ は同形．すると h にホモトピックな位相同形写像 $h: M \longrightarrow N$ がある。

注．Proposition 1 によって上の性質(3)以外の性質を満足する単純閉曲線 α, β とホモトピー同値 $h: M \longrightarrow N$ は常に存在する。

証明．$M_0 = M-\mathring{U}(\alpha)$，$N_0 = N-\mathring{U}(\beta)$，$h_0 = h|M-\mathring{U}(\alpha)$ とおく

すると Proposition 1 と([H3. 13. 1])より次の(4),(5),(6)を満足するホモトピー $g_t: M \longrightarrow N$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ がある。(4) $g_0 = h$
(5) $g_t(M - \mathring{U}(\alpha)) = N - \mathring{U}(\beta)$, $g_t(U(\alpha)) = U(\beta)$ (6) $g_1|U(\alpha): U(\alpha) \longrightarrow U(\beta)$ は位相同形写像。そこで $(g_1|M - \mathring{U}(\alpha)) \simeq h_0$. 従って $g_1|M - \mathring{U}(\alpha): M - \mathring{U}(\alpha) \longrightarrow N - \mathring{U}(\beta)$ は $g_1|\partial U(\alpha)$ が位相同形写像であるようなホモトピー同値。M_0, N_0 は lemma 6 によって irreducible で $\partial N_0 \cong S^1 \times S^1$ だから([H3. 6.6., 6.7])より N_0 は sufficiently large. そこで([W])より $\partial U(\alpha)$ 上では g_1 と一致し $g_1|M - \mathring{U}(\alpha)$ にホモトピックな位相同形写像
$g_2: M - \mathring{U}(\alpha) \longrightarrow N - \mathring{U}(\beta)$ がある。そこで

$$h = \begin{cases} g_1 & \text{on } U(\alpha) \\ g_2 & \text{on } M - \mathring{U}(\alpha) \end{cases}$$
と定義すればよい。

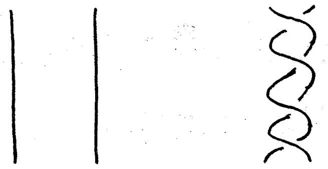
┘

定義. M を closed, connected 3-manifold で基本群が無限群であるようなものとする。$g \in \pi_1(M)$ によって生成される部分群 $gp(\{g\}, \pi_1(M))$ に対応する M の被覆空間 $\tilde{M}$ が $S^1 \times R^2$ に位相同形のとき $\pi_1(M)$ は(※)-条件を満足するといい、上の g を(※)-類という。

定理 1. M, N を closed, connected, orientable, irreducible 3-manifolds とし $\pi_1(M), \pi_1(N)$ は(※)-条件を満足

する無限群とする。もし$f_*(g_M)=g_N$なるホモトピー同値写像$f:M\longrightarrow N$があればfにホモトピックな位相同形写像$h:M\longrightarrow N$がある。

証明。Proposition 2 の条件を満足するM, Nの中の単純閉曲線α, βとホモトピー同値写像$h:M\longrightarrow N$を作ればよい。$G=gp(\{g_M\}, \pi_1(M))$とおくと$f_*(G)=gp(\{g_N\}, \pi_1(N))$である。$p_1:\tilde{M}\longrightarrow M$, $p_2:\tilde{N}\longrightarrow N$を$G$, $f_*(G)$に対応するM, Nの被覆空間とする。(☆)-条件より$\tilde{M}\cong S^1\times R^2\cong\tilde{N}$. $\tilde{f}$をfのliftingとする。$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$を$\tilde{M}, \tilde{N}$の中の単純閉曲線で$S^1\times\{0\}\subset S^1\times R^2\cong\tilde{M}\cong\tilde{N}$に対応するものとする。$p_{1*}:\pi_1(\tilde{M})\longrightarrow\pi_1(M)$, $p_{2*}:\pi_1(\tilde{N})\longrightarrow\pi_1(N)$は injective で$p_{1*}(\pi_1(\tilde{M}))=G$, $p_{2*}(\pi_1(\tilde{N}))=f_*(G)$だから$p_{1*}([\tilde{\alpha}])=g_M$, $p_{2*}([\tilde{\beta}])=g_N$。$\alpha=p_1(\tilde{\alpha})$, $\beta=p_2(\tilde{\beta})$をg_M, g_Nを表現する単純閉曲線とする。$p_1^{-1}(\alpha)=\tilde{\alpha}_1\cup\tilde{\alpha}_2\cup\cdots$, $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}$とおくと$\tilde{\alpha}=S^1\times\{0\}\subset S^1\times R^2=\tilde{M}$であり各$\tilde{\alpha}_i$に対し被覆変換写像$\phi_i:(\tilde{M}, \tilde{\alpha}_1)\longrightarrow(\tilde{M}, \tilde{\alpha}_i)$があるから$\tilde{\alpha}_1$と$\tilde{\alpha}_i$の位置関係は図1の(a)又は(b)になっているとしてよい。従って



(a)　図1.　(b)

$\Phi_i(S^1\times\{0\})=\tilde{\alpha}_1$, $\Phi_i(S^1\times\{1\})=\tilde{\alpha}_i$となるような埋め込み$\Phi_i:S^1\times I\longrightarrow\tilde{M}$がある。今$\phi_i^2(\tilde{\alpha}_1)=\phi_i(\tilde{\alpha}_i)=\tilde{\alpha}_{i+1}$, $\phi_i^{n+1}(\tilde{\alpha}_1)=\phi_i(\phi_i^n(\tilde{\alpha}_1))=\tilde{\alpha}_{i+n}$とおく。もし$\tilde{\alpha}_1$と$\tilde{\alpha}_i$が$S^1\times R^2\subset R^3$の中で linking number $L(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_i)=p_i\neq 0$

とすると（即ち図1.(b)のような事が起ったとすると）$\tilde{\alpha}_i$は lemma 5より infinite order をもつから $L(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_i)=p_i$, $L(\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_{i+1})=p_i$ より $L(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_{i+n})=(n+1)p_i$, $L(\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_{i+n})=np_i$ が出る。そこでこの事を繰り返していくと α_1 と α_i の間に張られた annulus $\Phi_i(S^1\times I)$ に交わる無限個の単純閉曲線の族，$\tilde{\alpha}_{i+1},\tilde{\alpha}_{i+2},\cdots,\tilde{\alpha}_{i+n},\cdots$ がある。これは $\Phi_i(S^1\times I)$ が有限単体的複体である事に矛盾．従って図1(a)のような場合のみが起る。そこで $p_1^{-1}(\alpha)$ の任意の成分 $\tilde{\alpha}_\lambda$ は $\tilde{\alpha}_\lambda=S^1\times\{p_\lambda\}\subset S^1\times R^2=\tilde{M}$ $(p_\lambda\in R^2,\ \lambda\in\Lambda)$ という形をしているとしてよい。$\tilde{N}$ についても同様だから $p_2^{-1}(\beta)$ の任意の成分 $\tilde{\beta}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ は $\tilde{\beta}_\lambda=S^1\times\{q_\lambda\}\subset S^1\times R^2=\tilde{N}$ $(q_\lambda\in R^2)$ という形をしているとしてよい。次に $f_1\simeq f$, $f_1(\alpha)=\beta$ を満足する写像 $f_1:M\longrightarrow N$ がある。そして lemma 10 によって (1) $h\simeq f$ (2) $h^{-1}(\beta)=\alpha$ (3) $\pi_1(N)$ で $h_*([\alpha])=[\beta]$ を満足する写像 $h:M\longrightarrow N$ がある。上の条件(2)より $h^{-1}(N-\mathring{U}(\beta))=M-\mathring{U}(\alpha)$． $M_0=M-\mathring{U}(\alpha)$, $N_0=N-\mathring{U}(\beta)$, $h_0=h|M-\mathring{U}(\alpha)$ とおく。h_{0*} が同形写像である事を証明する（即ち Proposition 2 の条件(3)が満足される事を示す）．先ず Proposition 1 によって h_{0*} は surjective である。

<u>h_{0*}: injective</u>　$\tilde{h}:\tilde{M}\longrightarrow\tilde{N}$ を h の lifting とすると上の条件(2), (3)より $\tilde{h}^{-1}p_2^{-1}(N-\mathring{U}(\beta))=\tilde{M}-p_1^{-1}(\mathring{U}(\alpha))$． $h_*([\alpha])=[\beta]$ で h は α に横断的だから $(\partial h_0)_*([m_\alpha])=[m_\beta]$, $(\partial h_0)_*([l_\alpha])$

$=[m_\beta]^a[l_\beta]$ $(a\in\mathbb{Z})$ ([R & S]) 即ち$(\partial h_0)_*$は同形である。ここでm_α, m_βは各々$\partial U(\alpha)$, $\partial U(\beta)$の meridians, l_α, l_βは各々$\partial U(\alpha)$, $\partial U(\beta)$のある指定されたlongitude. ([H3. 13. 1])を使うと$\partial h_0 : \partial U(\alpha) \longrightarrow \partial U(\beta)$は位相同形写像と仮定してよい。$\chi(\pi_1(M):G)=(\pi_1(N):f_*(G))$だから$\tilde{h}|p_1^{-1}(\partial U(\alpha)) : p_1^{-1}(\partial U(\alpha)) \longrightarrow p_2^{-1}(\partial U(\beta))$も位相同形と仮定してよい。$\gamma$を$M-\mathring{U}(\alpha)$の中の単純閉曲線で$M-\mathring{U}(\alpha)$で$\gamma\neq 0$, $N-\mathring{U}(\beta)$で$h_0(\gamma)\simeq 0$なるものとする。$\tilde{\gamma}$を$p_1^{-1}(\gamma)$の1つの成分とする。Mで$\gamma\simeq 0$だから$\tilde{\gamma}$は$\tilde{M}-p_1^{-1}(U(\alpha))$で$\tilde{\gamma}\neq 0$となる単純閉曲線である。$\tilde{\gamma}$はコンパクトだから$p_1^{-1}(\alpha)$の有限個の成分$\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_p$に対し$\tilde{M}-(U(\tilde{\alpha}_1)\cup\cdots\cup U(\tilde{\alpha}_p))$の中で$\tilde{\gamma}\neq 0$としてよい。ここで$U(\tilde{\alpha}_i)=U(\tilde{\alpha}_i, \tilde{M})$. $\tilde{h}(\tilde{\alpha}_i)=\tilde{\beta}_i\in p_2^{-1}(\beta)$とおく。$\Phi_i : S^1\times I \longrightarrow \tilde{M}$, $\Psi_i : S^1\times I \longrightarrow \tilde{N}$ $(i=1, 2, \cdots, p)$を前述したような次の(4), (5)を満足する埋め込みとする

(4) $\Phi_i(S^1\times\{0\})=\tilde{\alpha}_1$, $\Phi_i(S^1\times\{1\})=\tilde{\alpha}_i$, $\Psi_i(S^1\times\{0\})=\tilde{\beta}_1$,
$\Psi_i(S^1\times\{1\})=\tilde{\beta}_i$

(5) $\Phi_i(S^1\times I)\cap\Phi_j(S^1\times I)=\phi$, $\Psi_i(S^1\times I)\cap\Psi_j(S^1\times I)=\phi$ $(i\neq j)$

これらの埋め込みは前述したような$\{\tilde{\alpha}_\lambda\}$, $\{\tilde{\beta}_\lambda\}$の$\tilde{M}$, $\tilde{N}$における位置関係から存在する。$K=\bigcup_{i=1}^{p}\Phi_i(S^1\times I)$, $L=\bigcup_{i=1}^{p}\Psi_i(S^1\times I)$とおく. すると包含写像によって

$$\pi_1(\tilde{M}-\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\alpha}_i))\cong\pi_1((\bigcup_{i=1}^{p}\partial U(\tilde{\alpha}_i)\cup K)-(K\cap\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\alpha}_i))),$$

$$\pi_1(\tilde{N}-\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\beta}_i)) \cong \pi_1((\bigcup_{i=1}^{p}\partial U(\tilde{\beta}_i)\cup L)-(L\cap\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\beta}_i))).$$

簡単のために $P=(\bigcup_{i=1}^{p}\partial U(\tilde{\alpha}_i)\cup K)-(K\cap\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\alpha}_i)))$

$Q=(\bigcup_{i=1}^{p}\partial U(\tilde{\beta}_i)\cup L)-(L\cap\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\beta}_i)))$ とおく.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\tilde{M}-\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\alpha_i)) & \xrightarrow{(\tilde{h}|\tilde{M}-\bigcup\mathring{U}(\tilde{\alpha}_i))_*} & \pi_1(\tilde{N}-\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\beta}_i)) \\
\cong\uparrow & & \uparrow\cong \\
\pi_1(P) & \underset{\cong}{\xrightarrow{(\partial\tilde{h}_0)_*}} & \pi_1(Q)
\end{array}$$

上の可換な図式より $(\tilde{h}|\tilde{M}-\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\alpha}_i))_*$ は同形. そこで $\tilde{N}-\bigcup_{i=1}^{p}\mathring{U}(\tilde{\beta}_i)$ で $\tilde{h}(\tilde{\gamma})\not\simeq 0$. 従って $\tilde{N}-p_2^{-1}(\mathring{U}(\beta))$ で $\tilde{h}(\tilde{\gamma})\not\simeq 0$. これは $N-\mathring{U}(\beta)$ で $h_0(\gamma)\simeq 0$ という事に矛盾. そこで h_{0*} は injective. 以上で h_{0*} が同形である事が言えた。従って Proposition 2 より f にホモトピックな位相同形写像 $h: M \longrightarrow N$ が存在する。

参 照

[E & J] B. Evans and W. Jaco: Varieties of groups and three manifolds, Topology 12 (1973) 83–97

[H] W. Heil: On P^2-irreducible 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1963) 772–775

$[H]_2$ ———: Almost sufficiently large Seifert fiber space, Michigan Math. J. 20 (1973) 217–223

$[H]_3$ J. Hempel: 3-manifolds, Ann. Math. Studies 86 Princeton Univ. Press.

[L] F. Laudenbach: Topologie de la dimension trois homotopie et isotopies, Societe Math. de France. Asterisque 12.

[R&S] C.P. Rourke and B.J. Sanderson: Block bundles II, Transversality. Ann. Math. 87 (1968) 255–277.

[Sc] P. Scott: An introduction to 3-manifolds, Lecture note #11 Univ. of Maryland.

[W] F. Waldhausen: On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. Math. 87 (1968) 56-88.