数理解析研究所講究録
第309巻 1977年 146-156

Lens空間のhomeotopy群について

関西学院大学理学部
浅野孝平

§1 Introduction　Xをpolyhedronとし，H(X)をXのp.l. homeomorphism全体のつくる群とする。恒等写像にisotopicなH(X)の元全体は，H(X)の中でnormal subgroup $H^{(0)}(X)$をなす。$H(X)/H^{(0)}(X)$を$\mathcal{H}(X)$と書くことにし，homeotopy groupと呼ぶ。

3-manifoldのhomeotopy groupについては，Waldhausenのsufficiently largeな3-manifoldに対する結果[W]があるが，その他の場合については，あまり知られていない。ここでは，$(2\alpha,\beta)$というtypeのlens spaceの中にはnon-orientableなincompressible surfaceがembedできることに注目し，つぎの結果を導く。

3.4 Theorem

1) $\mathcal{H}(L(2\alpha,1)) \cong \mathbb{Z}_2$であり，$L(2\alpha,1)$の2つのhomotopicなautohomeomorphismはisotopicである。

2) $L(2\alpha, 1)$ は、orientation reversing homeomorphism を持たない。

この Theorem は、[K] の problem 3-35 の部分的な解決をあたえている。証明は、概略のみを述べることにする。§1 においては、$L(2\alpha, \beta)$ は、non-orientable surface の regular neighbourhood と solid torus との union であらわされることを示し、その solid torus の meridian system を決定する。§2 において $\beta=1$ の場合の homeotopy group が、ある種の Seifert fiber space の homeotopy group に帰着されることを示す。

§2 $L(2\alpha, \beta)$ の構造　lens space は、普通は、S^3 の上の orthogonal action の orbit space、あるいは 2 つの genus 1 の solid torus の union であらわされる。しかし、ここでは、$L(2\alpha, \beta)$ の中には、incompressible な closed non-orientable surface F が存在し、$L(2\alpha, \beta)$ は F の regular neighbourhood N(F) と solid torus V との union であらわす。一般に、$H_2(M^3; Z_2) \neq 0$ の 3-manifold M^3 について、non-orientable surface が embed できることが知られている [H] が、特に、$L(2\alpha, \beta)$ に対しては、次の Theorem が知られている。

2.1 Theorem [BW] $N(2\alpha,\beta)$ を $L(2\alpha,\beta)$ に embed できる closed non-orientable surface の genus の最小数とする。このとき

$$N(2,1)=1$$

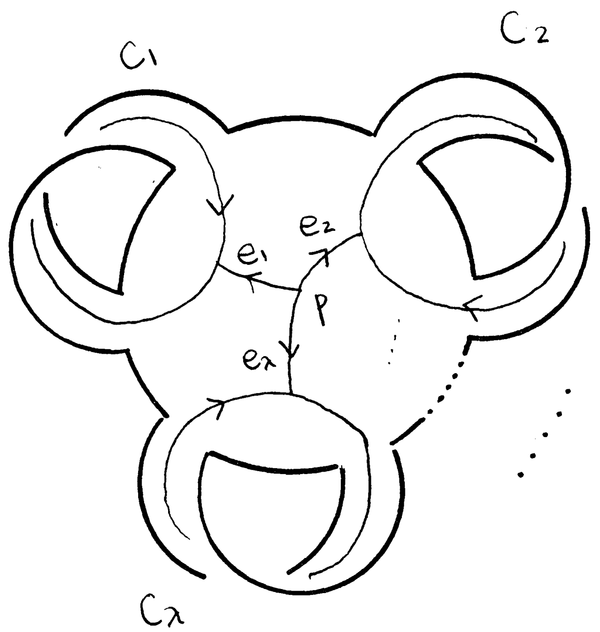
$$N(2\alpha,\beta)=N(2(\alpha-\beta),\beta')+1$$

ここで $\alpha>0$, $0<\beta\leqq\alpha$, $\beta'\equiv\pm\beta \bmod 2(\alpha-\beta)$, $0<\beta'\leqq\alpha-\beta$. また non-orientable surface の genus とは、その surface をいくつかの projective plane の connected sum と考えたときの、projective plane の個数である。

以下 α, β を fix して話をすすめる。いま $\lambda=N(2\alpha,\beta)$, F_λ を $L(2\alpha,\beta)$ に embed された genus λ の non-orientable surface とする。$\lambda\geqq3$ のとき、F_λ が compressible であると仮定すれば、容易に、λ より小さい genus の non-orientable surface が embed できることになる。また、$\lambda=2$ の場合に incompressible であることは、すでに示されている。[R], [A]。故に F_λ は incompressible である。よって Hempel [H] の結果を使えば、

2.2 Lemma $V_{\lambda-1}=L(2\alpha,\beta)-\mathring{N}(F_\lambda)$ とおけば、$V_{\lambda-1}$ は genus $\lambda-1$ の solid torus である。

$\pi: T_{\lambda-1} \longrightarrow F_\lambda$ を F_λ の orientable double covering space とすると、$N(F_\lambda)$ は π の mapping cylinder $M(F_\lambda)$ と考えることができる。あいまいさをさけるために $N(F_\lambda)$ のかわりに $M(F_\lambda)$ と書くことにする。いま、F_λ 上に、図のような simple closed curve の system $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ および arc $e_1, e_2, \cdots, e_\lambda$ をとる。



2.3 Lemma　$T_{\lambda-1}$ 上に次の条件を満足する oriented simple closed curves の system $\{a_\mu, b_\mu\ ;\ \mu=1,2,\cdots \lambda-1\}$ および arcs $\{d_\mu\ ;\ \mu=1,2,\cdots \lambda-1\}$ が存在する。

1) $a_\mu \cap b_\mu$ は 1点。

2) d_μ は base point $\tilde{p}$ より $a_\mu \cap b_\mu$ へむかう arc で

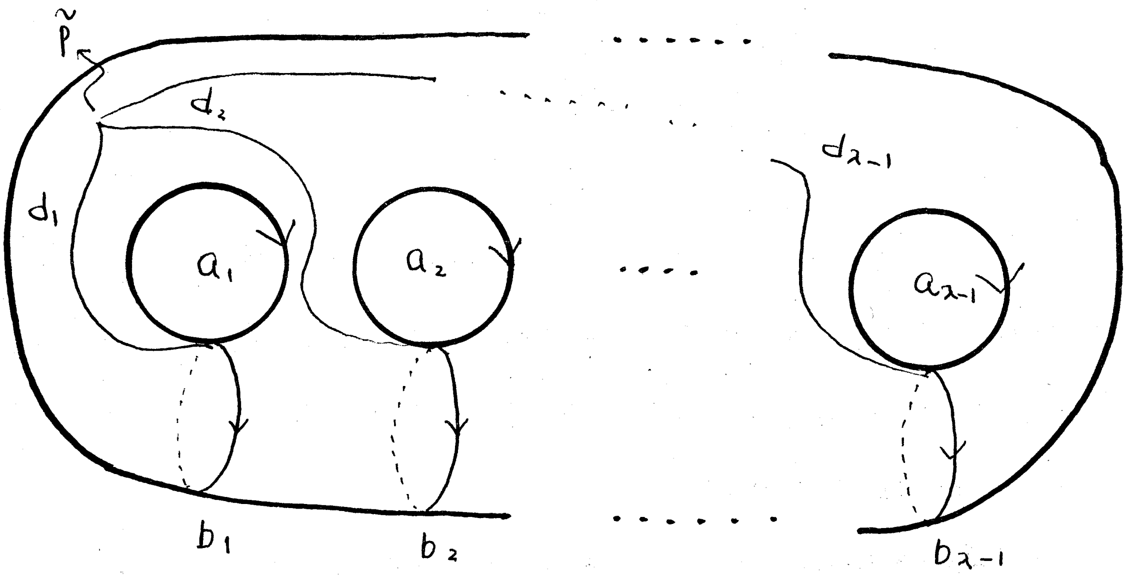
$\coprod_{\mu} a_\mu \cup b_\mu$ とは $a_\mu \cap b_\mu$ のみで交わる。 ここで $\tilde{p}$ は $\pi(\tilde{p}) = p$ なる点とする。

3) x_μ を $\tilde{p}$ を base point とする closed curve $d_\mu a_\mu d_\mu^{-1}$ によって表現される $\pi_1(T_{\lambda-1}, \tilde{p})$ の元、 y_μ を $d_\mu a_\mu d_\mu^{-1}$ によって表現される $\pi_1(T_{\lambda-1}, \tilde{p})$ の元とするとき、

$$\pi^{\#}(x_\mu) = z_\mu z_{\mu+1}^{-1}$$

$$\pi^{\#}(y_\mu) = z_\mu z_1^2 z_2^2 \cdots z_\mu^2 z_\mu^{-1} \qquad , \mu = 1, 2, \cdots \lambda-1$$

である。ここに z_μ は $e_\mu c_\mu e_\mu^{-1}$ で表現される $\pi_1(F_\lambda, p)$ の元である。また $\pi^{\#}$ は π によって induce される injection である。



この emma により $T_{\lambda-1}$ の simple closed curve の system が決定された。故に $\pi_1(T_{\lambda-1}, \tilde{p})$ は，x_μ, y_μ, $\mu=1,2,\cdots\lambda-1$ により generate されるのだから $T_{\lambda-1}$ 上の simple closed curve は 適当な arc で $\tilde{p}$ とむすんで x_μ, y_μ の word を使ってあらわせば up to isotopy で unique にきまる。つぎに $V_{\lambda-1}$ の meridian disk の boundary を $\partial M(H_\lambda) = T_{\lambda-1}$ 上で決定する。

まず互いに素な偶数 2γ と 奇数 δ，（但し $\gamma>0$，$0<\delta<2\gamma$）の pair $(2\gamma,\delta)$ に対して 一つの整数列 $\{I_\mu(2\gamma,\delta)\}$ を定義する。長さは δ^* を $\delta^*\equiv\pm\delta \mod 2\gamma$ $0<\delta^*\leq\gamma$ なる整数としたときに $N(2\gamma,\delta^*)-1$ である。ここに $N(2\gamma,\delta^*)$ は Theorem 2.1 の function である。定義は帰納的に行う。γ', δ' を次のような整数とする。

1) $\gamma>\delta$ のとき $\gamma'=\gamma-\delta$, $\delta'\equiv\delta \mod 2\gamma'$, $0<\delta'<2\gamma'$

2) $\delta>\gamma$ のとき $\gamma'=\delta-\gamma$, $\delta'\equiv-\delta \mod 2\gamma'$ $0<\delta'<2\gamma'$

いま pair $(2\gamma',\delta')$ に対して整数列 $\{I_\mu(2\gamma',\delta')\}$ が定義されていると仮定する。$\{I_\mu(2\gamma',\delta')\}$ の長さは function $N(\ \ )$ の定義により $N(2\gamma,\delta^*)-2$ である。ここで

1) $\gamma>\delta$ のとき

$$\delta = \delta' + 2I\gamma'$$

2) $\delta>\gamma$ のとき

$$-\delta = \delta' + 2I\gamma'$$

であるような integer を I とおくと、$\{I\mu(2\gamma,\delta)\}$ を以下の如く定義する。

$$I\mu(2\gamma,\delta)\begin{cases} = I\mu(2\gamma',\delta'), & \mu=1,2,\cdots,N(2\gamma',\delta^*)-2 \\ = I & \mu=N(2\gamma',\delta^*)-1 \end{cases}$$

ここで $\gamma=1$ の場合には、$N(2\gamma,\delta^*)=1$ なので $\{I\mu(2\gamma,\delta)\}$ は $\emptyset$ と考えておく。

Example $\{I\mu(64,23)\}$

(1) $\gamma=32$, $\delta=23$ とおくと

$\gamma'=9$, $\delta'=5$, $I=2$

(2) $\gamma=9$, $\delta=5$ とおくと

$\gamma'=4$, $\delta'=5$, $I=0$

(3) $\gamma=4$, $\delta=5$ とおくと

$\gamma'=1$, $\delta'=1$, $I=-6$.

したがって $\{I\mu(64,23)\}$ は $\{-6, 0, 2\}$ である。

2.4 Theorem $T_{\lambda-1}$ 上に互いに交わらない oriented simple closed curve の集まり，$\{a\mu' ;\ \mu=1,2,\cdots,\lambda-1\}$ があって次の条件を満す。

1) $a\mu' \cap b\mu = a\mu \cap b\mu$, $a\mu' \cap b\nu = a\mu' \cap d\nu = \emptyset$, $\mu\neq\nu$.

2) $x\mu'$ を $d\mu\, a\mu'\, d\mu^{-1}$ が表現する $\pi_1(T_{\lambda-1}, \hat{p})$ の元とすれ

は $x_\mu' = x_\mu y_\mu^{-I_\mu(2\alpha,\beta)}$, $\mu=1,2,\cdots,\lambda-1$ である。

3) $V_{\lambda-1}$ の meridian disk の system : $\{D_\mu ; \mu=1,2,\cdots,\lambda-1\}$ があって $\partial D_\mu = a_\mu'$, for $\mu=1,2,\cdots\lambda-1$。

さらに $\mu=1,2,\cdots,\lambda-1$ に対して $H_\mu^{(2)}$ を $L(2\alpha,\beta)$ の中で $M(F_\lambda)$ に attach された D_μ を core とする 2-handle とするとき、つぎの定理が成立する。

2.5 Theorem $M = M(F_\lambda) \cup H_1^{(2)} \cup H_2^{(2)} \cup \cdots \cup H_{\lambda-2}^{(2)}$ は、Seifert fiber space であって、base space は disk. exceptional fiber は 2 つで type $(2,1)$ と $(2(\alpha-\beta), \beta^*)$.
但し、$\beta^* \equiv \beta \pmod{2(\alpha-\beta)}$, $0<\beta^*<2(\alpha-\beta)$。

§3. $L(2\alpha,1)$ の自己同相写像. §3 においては $\beta=1$ にかぎって話をすすめる。

3.1 Theorem F, F' をそれぞれ $L(2\alpha,1)$ の中の incompressible surface とする。このとき F, F' は互いに isotopic である。

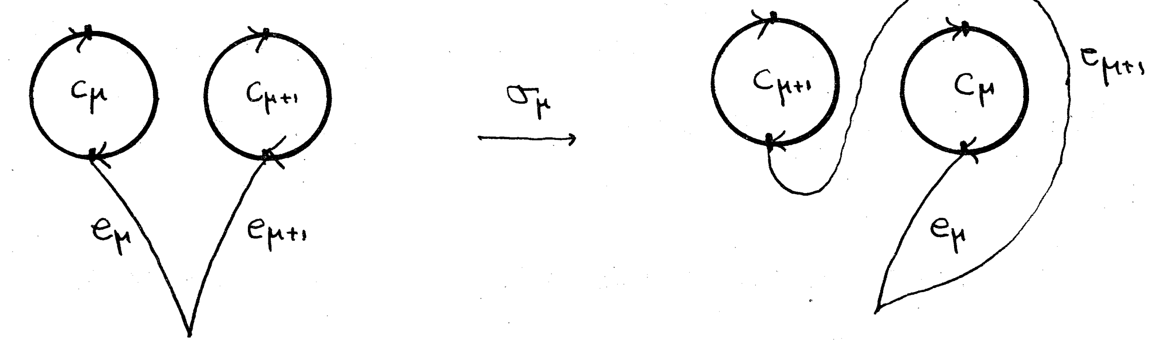
証明は [BW] の中の議論と、良く似ている。これを使って、

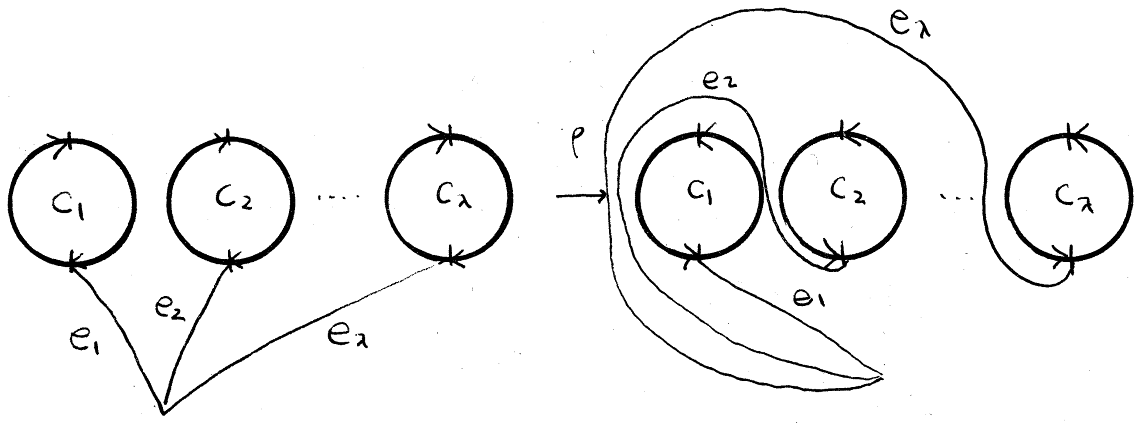
3.2 Lemma　任意の $H(X)$ の元 φ に対して、適当な $H^{(0)}(X)$ の中の元があって、

1)　$\varphi'\varphi(X) = F_\lambda$,

2)　$\varphi'\varphi(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_\lambda) = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_\lambda$

Theorem 2.1より、条件(1)を満足する φ' の存在は明白である。しかし(2)をも満足する φ' の存在は明らかではなく、いくつかのSTEPを必要とする。しかしここでは証明は述べない。　今 F_λ の homeomorphism σ_μ, $\mu = 1, 2, \cdots, \lambda-1$ および ρ を次の図のように定義する。





ここで $\sigma_\mu(c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_\lambda) = c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_\lambda$,
$\rho(c_1 \cup \cdots \cup c_\lambda) = c_1 \cup \cdots \cup c_\lambda$。 F_λ を $c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_\lambda$ で cut すると、λ個の穴のあいた 2-sphere である。そして、穴のあいた 2-sphere の homeotopy group は、[B] において決定されており、その結果をつかうと、$F_\lambda - \mathring{N}(c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_\lambda)$ は、$\sigma_\mu \mid F_\lambda - \mathring{N}(c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_\lambda)$, $\rho \mid F_\lambda - \mathring{N}(c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_\lambda)$ で generate されている。

2.3 Proposition　$H(F_\lambda)$ の元 ϕ が、$\phi(\bigcup_\mu c_\mu) = \bigcup_\mu c_\mu$ であると仮定すると、ϕ は σ_μ, $\mu = 1, 2, \cdots, \lambda-1$ および ρ の適当な積と isotopic である。

いま、$\phi \in H(L(2\alpha, 1))$ をとると、ϕ は σ_μ, ρ のいくつかの product であらわされた F_λ の homeo. の $L(2\alpha, 1)$ への extension に isotopic であることになる。したがって、いま σ_μ, ρ がそれぞれ $L(2\alpha, 1)$ の orientation preserving homeo. に extend できることを示し、その extension $\tilde{\sigma}_\mu$, $\tilde{\rho}$ に対して、$\tilde{\sigma}_\mu(M) = M$, $\tilde{\rho}(M) = M$ であることがわかれば、Theorem 3.3 の証明は終る。実際それはいくつかの段階をへることにより証明できる。

References

[A] K. Asano, "Homeomorphisms of prism manifolds", preprint

[B] J. S. Birman, "Braids, Links and Mapping Class Groups," Annals of Mathematics Studies 82, Princeton University Press, 1975.

[BW] G. E. Bredon and J. W. Woods, "Non orientable surfaces in orientable 3-manifolds," Invent. Math. 7 (1968) 83-110.

[K] R. Kirby (ed.), "Problems in Low Dimensional Manifold Theory," to appear.

[H] J. Hempel, "One sided incompressible surfaces in 3-manifolds," Lecture Note in Math. 438 Springer-Verlag (1974), 251-258

[R]. J. H. Rubinstein, "On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles," to appear

[W] F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large," Ann. of Math. 87 (1968) 56 - 88.