数理解析研究所講究録
第 310 巻 1977 年 48-56

ある種の微分方程式の差分解が厳密解と一致する現象について

京大数理研　一松 信
UNIV. OF REGINA　佐藤大八郎

1. 問題

初等函数を解とする常微分方程式の適当な差分解が，厳密解と一致する実例がいくつか知られている。もちろんたかだか k 次の多項式を解とする方程式を，k 位の差分式で解けば，丸め誤差がない限り厳密解と一致しても不思議はないが，ここで述べるのは，自明度のもっと低い例である。その最初の例はロジスティック曲線に対する生物学者森下教授の例である([1]; 後述)。その後類似の例がいくつも見つかっている[2]。

現在までの実例はすべて解は初等函数(多項式および広い意味で"指数多項式")であり，差分式は陰的台形公式または混合型オイラー法である。何かそこに解の函数族，微分方程式，差分式の特別な族がありそうに見える。たとえば函数族についていえば，指数函数 $f(x)=e^x$ が微分方程式 $f'(x)=f(x)$ と差分方程式 $f(x+a)=c\,f(x)$　$(c=e^a)$ とを同時にみ

たすように，適当な代数的微分方程式と代数的差分方程式とを同時にみたす（位数有限の解析）函数はどういうものかという数学的問題になる。そのような函数族はたぶん多項式，指数多項式のほか，せいぜい楕円函数くらいと予想される。

上のように問題を定式化したE.G. Straus教授は，これと関連して（あるいはてがかりとして）次の予想をたてた：

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m} P_j(z)\exp(Q_j(z))\Big/\sum_{k=1}^{n} R_k(z)\exp(S_k(z))$$

（P_j, Q_j, R_k, S_k は多項式）の型の整函数は，分母が多項式の形に還元されるであろう．—— しかしこれに対しては，Mark Green [4] が次のような反例を与えた：

$$f(z)=[\exp(2\pi i z^2)-1]/[\exp(2\pi i z)-1].$$

というわけで，この講演は単に実例を並べるだけである。楕円函数に関する実験をこれからやってみたい．解析学の問題として，どのように手をつけるとよいか，などについてsuggestionがえられれば幸いである．

2. 数値的極探険

例1. $y'=y^2$, $y(0)=c>0$. 厳密解 $y(x)=c/(1-cx)=1/(c^{-1}-x)$. $x=1/c$ で"爆発"を生ずる．この例では刻み幅制御を加えた差分公式で解くと，$x\to 1/c$ のとき刻み幅が急激に小さくなって，極の存在を暗

示する。他の前進型公式でも，高段高位の公式によれば，$x=1/c$ を少し超えた所であふれを生じ，"極探険"（これはTodd教授の冗談）は可能である。

この種の2次の非線型項に対しては，y^2 を $y_m y_{m+1}$ と混合型で近似するとよいことが，小林光夫によって注意されている[3]。じっさいこの例に混合型オイラー法を適用すると，

$$y_{m+1}-y_m=h\,y_m y_{m+1}\,,\quad \text{すなわち}$$

$$1/y_{m+1}=(1/y_m)-h,\quad 1/y_0=1/c,\quad 1/y_m=(1-cmh)/c$$

となり，$y_m=c/(1-cx)$ と厳密解と一致する値がえられる。もっともこの例では，原方程式を $1/y=u$ とおきかえると $u'=-1$ となり，これにオイラー法を適用したことになるので，厳密解と一致するのは当然ともいえる。

例2　$y'=1+y^2,\quad y(0)=0$，厳密解 $y=\tan x$。$x=\pi/2$ で"爆発"する。混合型オイラー法によると

$$y_{m+1}-y_m=h(1+y_m y_{m+1}),\quad \text{すなわち}$$

$$y_{m+1}=(y_m+h)/(1-h y_m)\,,\quad y_0=0$$

だから，$h=\tan a$ ならば，$y_m=\tan(am)$ となる。したがって x の進み h と計算に使う h を区別し，後者を $h'=\tan h$ におきかえれば，$y_m=\tan(hm)=\tan x$ と厳密解と一致する解がえられる。──前のままでも $y_m=\tan(am)$ だから，いつかはあふれるか正から負にとんで極探険になる。

例3　$y'=1-y^2$, $y(0)=0$,　厳密解　$y=\tanh x$

これは極探険ではないが（$|y(0)|>1$ ならば，極探険になる）例2と似ている。混合型オイラー法で解けば

$$y_{m+1}-y_m=h(1-y_m y_{m+1}),$$

$$y_{m+1}=(y_m+h)/(1+hy_m),\quad y_0=0,\ \text{ゆえに}$$

$$y_m=\tanh(am),\quad h=\tanh a$$

となる。したがって計算に使う h を $h'=\tanh h$ にかえれば，厳密解と同じ値をうる。

$y'=y(1-y)$,　$0<y(0)<1$ も同様である。このときは $h'=2\tanh(h/2)$ とすればよい。森下教授が最初に発見したのは，この場合であった[1]。

3　一意性が成立しない場合の数値解

例4.　$y'=2y^{1/2}$,　　$y(0)=0$

変数分離形の公式を適用すれば，解 $y(x)=x^2$ をうる。しかし解の一意性が成立せず，真の"一般解"は，$a>0$ に対し

$$y(x)=0\quad(0\leqq x\leqq a),\quad y(x)=(x-a)^2\quad(x>a)$$

である。$a=0$ のときが上記の"最大解" x^2 であり，$a\to\infty$ の極限が，いわゆる"特異解" $y=0$ である。

これを前進型の差分公式で解けば，あらゆる解法は $y=0$ を与え，"期待される解" x^2 はでてこない。私はかつて"摂動"

$\varepsilon>0$ を与えて，初期条件を $y(0)=\varepsilon$ として解いて，$\varepsilon\to 0$ とすればよかろうと提案したが，これは失敗であった。その理由は差分解（刻み h）$\varphi(x;\varepsilon,h)$ は $\varepsilon\to 0$，$h\to 0$ の二重極限値が存在せず，x^2 をうるためには，$\varepsilon\to 0$ にすると同時に ε よりも早く $h\to 0$ としなければならないためであった。

この場合陰的台形公式を使い，

$$y_{m+1}-y_m=h\left(y_m^{1/2}+y_{m+1}^{1/2}\right)$$

とすると，$y_0=0$，$y_1>0$ ならば，$y_m^{1/2}+y_{m+1}^{1/2}>0$ で，

$$y_{m+1}^{1/2}-y_m^{1/2}=h, \quad y_m=(hm)^2=x^2$$

と，正に期待された解を得る。一般にこの種の例では，後退型公式を利用するのが不可欠らしい。

4. 幻の解を防ぐ工夫

例5　$y'=-ay$，$a>0$（定数），$y(0)=1$

厳密解は $y=e^{-ax}$ で，$x\to\infty$ になると急激に0に近づく。しかし前進型公式で h が大きすぎると，y_m が振動したり，$+\infty$ に発散する"幻の解"を生ずる。後退オイラー法，あるいは陰的台形公式（いわゆるクランク・ニコルソン法）によれば，単調に0に収束する解がえられる。たとえば後退オイラー法では

$$y_{m+1}-y_m=-ahy_{m+1}, \quad y_{m+1}=y_m/(1+ah)$$

したがって $y_m = 1/(1+ah)^m$

である．$1/(1+ah)$ は e^{-ah} の (0, 1) 次パデ近似であるが，もしもこの h を $1/(1+ah') = e^{-ah}$，すなわち

$$h' = (e^{ah}-1)/a$$

にかえ，x の進み h と計算に使う h' とを区別することができれば $y_m = e^{-ahm} = e^{-ax}$ と厳密解と一致する値がえられる。

例6　$y' = ay$，$a > 0$（定数），$y(0) = 1$，解 $y = e^{ax}$ では，直接上記の h' による前進型の普通のオイラー法を使えば，厳密解をうる．

例7　$y'' + y = 0$，$y(0) = 1$，$y'(0) = 0$，厳密解 $y = \cos x$．　［2階の例］

中心差分によると

$$y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1} + h^2 y_m = 0$$

となる。この一般解は

$$y_m = A\lambda^m + B\mu^m,\quad \lambda, \mu = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) \pm ih\sqrt{1 - \frac{h^2}{4}}$$

である。この実部・虚部は $\cos h$，$\sin h$ の2次の近似であるが，もし $h' = 2\sin(h/2)$，すなわち $1 - (h'^2/2) = \cos h$ である h' におきかえると，$y_0 = 1$，$y_1 = \cos h$ に対して

$$y_m = \mathrm{Re}\,(\cos h + i\sin h)^m = \cos(mh) = \cos x$$

と厳密解と一致する値がえられる。

ところで，もとの微分方程式を $y'=z$ とおきかえて連立方程式

$$y'=z,\quad z'=-y,\quad y(0)=1,\quad z(0)=0,$$

厳密解　$y(x)=\cos x,\quad z(x)=-\sin x$

に直してオイラー法その他の前進型公式で計算すれば，周期的にならず，y^2+z^2 は次第に増加する。じっさい $x=\pi/2$，π などでは，$|z|$，$|y|$ が 1 をこえる値がえられる。

中心差分は連立形にして，一方に後退オイラー法，他方に前進オイラー法を適用したものとみなされるが，もしも双方に陰的台形公式を適用すると，

$$y_{m+1}-y_m=(h/2)(z_{m+1}+z_m),\quad z_{m+1}-z_m=-(h/2)(y_{m+1}+y_m)$$

となるので，これから h を消去すると

$$y_{m+1}^2+z_{m+1}^2=y_m^2+z_m^2\ (\text{上の初期値では}=1)$$

という厳密解と一致する等式をうる。またこれを y_{m+1}，z_{m+1} について解くと

$$y_{m+1}=Ay_m+Bz_m,\quad z_{m+1}=-By_m+Az_m,$$

$$A=[1-(h/2)^2]/[1+(h/2)^2],\quad B=2(h/2)/[1+(h/2)^2]$$

となるから，この h を $h'=2\tan(h/2)$ におきかえれば

$$A=\cos h,\quad B=\sin h$$

となる。初期値 $y_0=1$，$z_0=0$ に対しては，加法定理から ちょうど

$$y_m=\cos x,\quad z_m=-\sin x\quad(x=mh)$$

をうる.(h のままなら $x_m=2m\arctan(h/2)$ に対する値をうる.)

例8　Lanchester の戦闘モデルの方程式

$$y'=-az,\quad z'=-by \qquad (a,b>0 ;\ 定数)$$

についても,例7と同じ性質がある.陰的台形公式により,厳密解と同じく $by^2-az^2=$ 一定　をみたす差分解がえられる.ただし OR 応用のためには,$y,z\geqq 0$ の範囲に限る.

5. 総括

他にもいくつか同様の例があるが,主要な例は以上でつきる.上記の諸例を通覧すると,次のことがわかる.

(i) 方程式はすべて線型か2次の非線型項をもつ.

(ii) 例1,例4は解が有理函数で,そのまま厳密解がでる.他はすべて指数函数の一族で,x を進める h と計算に使う h' とを区別し,うまく h' を選んだときに厳密解と一致する解がえられる.

(iii) 差分法は陰的台形公式,混合型オイラー法,ないしはそれに帰着されるものに限られている.

これらが単にうまくゆく実例ばかり並べたためなのか,それともう少し深い本質的な性格によるものなのか,いろいろ speculation は可能であるが,いまのところまだ五里霧中である.

実用上の見地からいえば、xの進み方と方$'$を区別するような公式はインチキ（少なくとも非実用的）といえる。多少実用になる場合があるとすれば、e^x, $\cos x$, $\sin x$ などの函数値計算用であろう。—— 少なくとも電卓で、これらの函数値を微分方程式の数値解法で求めようとした試みはいくつかあったようである。

純粋数学の見地からは、冒頭にのべたような、代数的微分方程式と代数的差分方程式をみたす位数有限の整函数、または全平面有理型函数の決定という形で、一つの問題になるように思う（Straus 教授の suggestion に負う）。

参考文献

[1] 山口昌哉, 非線形現象の数学, 朝倉, 1972

[2] 一松 信, 微分方程式と解法, 教育出版, 1976

[3] 小林光夫, 2次の非線型微分方程式の総合的研究, 短期共同, 1973年3月27日—30日での講演 ——（残念ながら、この内容は、その研究会の講究録 No.190：「非線型方程式の数値解析」には収録されていない。）

[4] A private letter received by Dr. D. Sato from Prof. E.G. Straus, on August 9, 1976.