数理解析研究所講究録
第 311 巻 1977 年 25-36

Tight design について

東大 理　　榎本 彦衛

§1. Fisher の不等式の拡張と tight design

$(X, \mathcal{L})$ を $t-(v, k, \lambda)$ design とします。すなわち、X は v 個の"点"から成る集合，$\mathcal{L}$ は X の k 点部分集合の集まり (i.e. $\mathcal{L} \subseteq X^{(k)}$，ただし $X^{(i)}$ というのは X の i 点部分集合の全体と定義する) であり、X に含まれる任意の t 点部分集合 Y (i.e. $Y \in X^{(t)}$) に対して

$$\#\{B \in \mathcal{L} \mid Y \subseteq B\} = \lambda$$

が成り立ちます。

$t = 2$ の時、$|\mathcal{L}| \geqq |X|$ が成り立つというのが、有名な Fisher の不等式ですが、Petrenjuk，野田，Ray-Chaudhuri，Wilson らにより、$t > 2$ の場合に拡張されました。

<u>定理 1</u> ([8] Theorem 1) $t = 2s$，$v - s \geqq k \geqq 2s$ ならば、

$$|\mathcal{L}| \geqq \binom{v}{s}$$

が成り立つ。

定理1の不等式において等号が成り立つ場合（i.e. $|\mathcal{B}| = \binom{v}{s}$ となる）、*tight* $2s$-*design* と呼ぶことにします。なお、$k = v - s$ の場合、すなわち $\mathcal{B} = X^{(v-s)}$ のとき、*trivial tight* $2s$-*design* と呼ばれます。

（注）$t = 2s + 1$ の時には *derived design* に上の定理1を適用する以外、有力な条件が知られていないようです。したがって、*tight* $(2s+1)$-*design* というのは *tight* $2s$-*design* の拡大ということになってしまいます。

§2. *Blocks* の *intersection numbers*

異なる2つの *blocks* に共通に含まれる点の数を（*block*）*intersection number* と呼ぶことにします。

<u>定理2</u>（[8] *Theorem* 3）*Intersection numbers* が s 種類ならば、$|\mathcal{B}| \leqq \binom{v}{s}$ となる。

(注）上の定理2は任意の $\mathcal{B} \subseteq X^{(k)}$（i.e. 0-*design*）に対して成り立ちます。しかも、等号を満せば $(X, \mathcal{B})$ は自動的に $2s$-*design* になることが証明されています（[3] *Theorem* $(15.6)'$）。

定理3（[8] Theorem 4） $2s$-design において次の2つの条件は同値である。

（i） Intersection numbers が s 種類である。

（ii） Tight $2s$-design である。

定理1と定理2により、（i）ならば（ii）が成り立つということと、intersection numbers が s 種類以上あるということがわかるので、残っているのは tight ならば intersection numbers が高々 s 種類になるということです。それには、すべての intersection numbers が零点になるような s 次の多項式が存在すればよいわけです。[8] においてはそのような多項式の存在証明だけが与えられていますが、具体的な形も求めることができ、

$$\psi_s(X) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i} \frac{\binom{v-s}{i}\binom{k-i}{s-i}\binom{k-1-i}{s-i}}{\binom{s}{i}} \binom{X}{i}$$

となることが知られています。

§3. Association scheme

集合 $\mathfrak{X}$ に対し、$\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ から $s+1$ 点集合 S の上への写像 a が次の性質（i）〜（iv）を満たす時、$\mathfrak{X}$ は（a に関して）クラス s の association scheme になる、といいます。

(i) $a(A, B) = a(B, A)$

(ii) $a(A, A) = a(B, B)$

(iii) $a(A, B) = a(A, A)$ ならば $A = B$ となる。

(iv) $A, B \in \mathcal{L}$ の時

$$\#\{C \in \mathcal{L} \mid a(C, A) = i,\ a(C, B) = j\}$$

は $i, j\ (\in S)$ および $a(A, B)$ だけで決まる。(そこで $a(A, B) = k$ の時のこの数のことを μ^i_{jk} と書くことにします。)

(注) $S = \{0, 1, 2, \cdots, s\}$ にとり、$a(A, A) = 0$ と定義するのが普通です。なお、$a(A, B) = i$ の時、AとBとは i-associate であるといいます。μ^i_{jk} という数は intersection numbers と呼ばれることもありますが、design を扱っているときには前節の block intersection numbers とまぎらわしくなるので、association numbers という呼び方を使うことにします。文献によっては μ^i_{jk} のことを p^k_{ij} と書かれることも多く、それとは添数の場所がずれているので注意して下さい。なお、

$$R_i = \{(A, B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid a(A, B) = i\}$$

と定義すると、$R_i\ (i \in S)$ は $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ の分割になっています。この分割の言葉を使って association scheme を定義することもできます。

i-associate という関係によって定義される$\mathcal{L}$上の adjacency matrix をA_iとします。すなわち、A_iの(A, B)-成分は、$a(A, B)=i$の時に1, それ以外は0と定義されます。A_i達の間には

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{s} \mu_{jk}^{i} A_k$$

という関係が成り立ちます。すなわち、$A_0, A_1, ---, A_s$で張られる(複素数体$\mathbb{C}$上の)ベクトル空間を$\mathcal{A}$とおくと、$\mathcal{A}$は全行列環の部分多元環になっており、$A_0, A_1, ---, A_s$を基底にとると$\{\mu_{jk}^{i}\}$が構造常数になります。写像aの対称性より$\mathcal{A}$が可換環になることがわかりますが、さらに$\mathcal{A}$は半単純環になり、

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus ---- \oplus \mathcal{E}_s$$

と、一次元部分環$\mathcal{E}_i$ $(\cong \mathbb{C})$の直和として表わされます。なお、

$$A_0 (= I) = E_0 + E_1 + --- + E_s \qquad (E_i \in \mathcal{E}_i)$$

と表わすと、E_iは$\mathcal{A}$の primitive idempotents になっており、$\mathcal{E}_i = \mathbb{C} E_i$となります。

§4. Tight design からつくられる association scheme

$(X, \mathcal{L})$を tight $2s$-design とします。定理3により、intersection numbers はs種類になるので、それらを

$x_1, x_2, \cdots, x_s$ とし、さらに $x_0 = k$ とおきます。

<u>定理4</u> ([2] *Theorem 1*) $A, B \in \mathcal{L}$ に対し、$|A \cap B| = x_i$ となるとき A と B は i-associate であると定義すると、$\mathcal{L}$ はクラス s の association scheme になる。

[2] の証明はあまりわかりやすくないと思われるので、もっと一般化した定理 ([4] Theorem 5.25) の場合の方針に沿った証明を紹介しておきます。

1°) 定理4における association の定義が、前節の (i), (ii), (iii) を満たすことはすぐにわかります。この時、$\mathcal{L}$ が association scheme になるには、ベクトル空間 $\mathcal{A}$ が多元環になること、すなわち積に関して閉じていることをいえばよいということはすぐにわかります。(構造常数が association number になります。)

2°) $X^{(s)}$ にはクラス s の association scheme の構造が自然に定義されます (Johnson scheme とも呼ばれています)。すなわち、$S, T \in X^{(s)}$ に対して、$|S \cap T| = s - i$ の時 S と T は i- issociate であると定義されます。この時の adjacency matrices を C_i,

$$\mathcal{C} = \langle C_0, C_1, \cdots, C_s \rangle$$

とおくと、前節の結果より、

$$C_0\,(=I) = E_0 + E_1 + \cdots + E_s$$

と *primitive idempotents* の和に書くことができます。

3°) $X^{(s)}$ と $\mathcal{L}$ の間の *incidence matrix* を N とおきます。すなわち、$\binom{v}{s} \times \binom{v}{s}$ 行列 N の (S, B)-成分は、$S \subseteq B$ の時には 1, それ以外は 0 と定義します。定理 1 (の証明) より N が正則行列になることがわかります。

4°) ${}^tN C_i N$ の (A, B)-成分は

$$\#\{(S, T) \in X^{(s)} \times X^{(s)} \mid S \subseteq A,\ T \subseteq B,\ |S \cap T| = s - i\}$$

であるが、これは $|A \cap B|$ だけで決る。したがって

$${}^tN C_i N \in \mathcal{A}$$

となる。

5°) $N\,{}^tN$ の (S, T)-成分は

$$\#\{B \in \mathcal{L} \mid S, T \subseteq B\}$$

であるが、これは $|S \cap T|$ だけで決る。したがって

$$N\,{}^tN \in \mathcal{C}$$

となる。とくに

$$N\,{}^tN = \sum_{i=0}^{s} c_i E_i$$

となる常数 c_i が存在し、これらは

$$N\,{}^tN E_i = c_i E_i$$

を満たす。

6°) $F_i = \frac{1}{c_i}\,{}^tN E_i N$

と定義すると、4°) より $F_i \in \mathcal{A}$ となり、5°) より

$$F_i F_j = \frac{1}{c_i c_j} \, {}^tN E_i N \, {}^tN E_j N$$
$$= \frac{1}{c_i} \, {}^tN E_i E_j N$$
$$= \delta_{ij} F_i$$

となるから、F_i 達は互に直交する idempotents になっている。N が正則行列であるから $F_i \neq 0$ で、$\mathcal{F}_i = \mathbb{C} F_i$ とおくと、これは $\mathcal{A}$ の一次元部分空間になっており、$\dim A = s+1$ だから

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_s$$

となり、$\mathcal{A}$ が積に関して閉じていることがわかります。

（注 1） この定理はもっと一般に "$(2s-2)$-design $(X, \mathcal{B})$ において、intersection numbers が s 種類ならば、それを使って blocks の間の association を定義すると、クラス s の association scheme になる" という形で成り立ちます。この定理は、$X^{(s-2)}$ と $\mathcal{B}$ の間の incidence matrix を使って、s 個の idempotents F_i $(0 \leq i \leq s-1)$ を上の 6°) と同じようにつくり、最後の一個は $F_s = A_0 - \sum_{i=0}^{s-1} F_i$ と定義することにより $\mathcal{A}$ が可換環になることが証明されます。

（注 2） $A_i = \sum_{j=0}^{s} \lambda_{ij} E_j$

と表わした時、λ_{ij} $(0 \leq j \leq s)$ は A_i の固有値となり、E_j の rank が λ_{ij} の重複度になります。rank E_j = rank F_j ですから、tight $2s$-design における adjacency matrix

A_i の固有値の重複度は Johnson scheme $X^{(s)}$ における固有値の重複度と一致することがわかります。固有値 λ_{ij} が決まれば association numbers μ^i_{jk} も一意的に決まるのですが、一般に tight $2s$-design のパラメータだけで λ_{ij} が一意的に決まるのかどうかはまだわかっていないようです。

§5. Tight design の分類問題

Tight 2-design というのは symmetric 2-design のことですから、実例もたくさんあり、完全な分類というのは絶望的です。自明でない tight 4-design は 4-(23, 7, 1) design，およびその complementary design である 4-(23, 16, 52) design だけが知られており、それ以外には存在しないだろうと予想されていますが、まだ未解決です。自明でない tight $2s$-design は $s \geqq 3$ の時には存在しないだろうと予想されていますが、いまのところ $s = 3$ の時しか証明されていません（[7]）。ただし、s を決めると、自明でない tight $2s$-design は高々有限個しか存在しない、ということはわかっています（[1]）。その証明は、§2 で述べた $\Psi_s(X)$ の零点がすべて整数になるような可能性は有限個しかないことを示す、という方法によっています。

§6. Tight 4-design の分類問題

Tight 4-design の分類に関する論文［6］には重大なgapがあり、tight 4-designの分類はまだ完成していません。可能性が有限個であることがいえれば、あとは時間の問題なのですが、この場合

$$4\Psi_2(X) = X^2 - \left(\frac{2(k-1)(k-2)}{v-3} + 1\right)X + \frac{k(k-1)^2(k-2)}{(v-2)(v-3)}$$

には根が2つしかなく、［1］の方法は適用できません。実際、整数解を持つような(v, k)の組は無限にあります。(たとえば、$v = 16m^2+16m+6$, $k = 8m^2+6m+2$ の時、$x_1 = 4m^2+m$, $x_2 = 4m^2+3m+1$ となる。) しかし、デザインのパラメータ(1, 2, 3, 4点を含むblocksの数)がすべて整数になるようなものは、実際に存在するdesignの場合以外には知られていないようです。

§4の(注2)では、blocksのつくるassociation schemeの構造常数がblock designのパラメータだけで決るかどうかわかっていない、と書きましたが、$s = 2$の時には一意的に決まります(［5］)。クラス2のassociation schemeというのは強正則グラフになっており、［6］ではblocksのつくる強正則グラフのパラメータが整数になるという条件を調べています。

Intersection numbers を x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, ある block との intersection が x_i 点になるような blocks の数を n_i ($i = 1, 2$), $a = x_2 - x_1$, $e = (k - x_2)/a$ とおくと、他のパラメータはすべて a と e を使って表わすことができます。たとえば、A_1 の固有値は、n_1 (重複度 1), e (重複度 $v(v-3)/2$), $e - \frac{k(v-k)}{2a}$ (重複度 $v-1$) となります。

[6] の前半には本質的な誤りはなく、

定理5. (i) 自明でない tight 4-designs で、k が素数になるのは 4-(23, 7, 1) design だけである。

(ii) 自明でない tight 4-design で、$n_2 \geqq n_1$ となるのは 4-(23, 7, 1) design と 4-(23, 16, 52) design だけである。

という定理は成り立ちます ([9]).

追記：最近、伊藤、野田両氏により、"自明でない tight 4-design は有限個しかない" ということが証明されたようで、完全な分類の完成も間近ではないかと思われます。

文　献

[1] E. Bannai, On tight designs, to appear.

[2] P. J. Cameron, Near-regularity conditions for designs, Geometriae Dedicata 2 (1973) 213–223.

[3] P. J. Cameron and J. H. van Lint, "Graph Theory Coding Theory and Block Designs", Cambridge Univ. Press (1975).

[4] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Repts. Suppl. 10 (1972).

[5] J. M. Goethals and J. J. Seidel, Strongly regular graphs derived from combinatorial designs, Canad. J. Math. 22 (1970) 597–614

[6] N. Ito, On tight 4-designs, Osaka J. Math. 12 (1975) 493–522.

[7] C. Peterson, On tight 6-designs, to appear.

[8] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, On t-designs, Osaka J. Math. 12 (1975) 737–744

[9] N. Ito, Corrections and supplements to the paper "On tight 4-designs", to appear.