数理解析研究所講究録
第311巻 1977年 40-47

Tight spherical designs

学習院大・理　坂内英一

§1 spherical t-design の定義

$\mathbb{R}^d$ = d 次元 Euclid 空間.

$\Omega_d = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^d$ とおく.

<u>定義 1</u>　Ω_d の<u>有限</u>部分集合 X が <u>spherical t-design</u> であるとは:

$$\sum_{\xi \in X} f(\xi) = 0$$

for $\forall$ homogeneous harmonic polynomials f of degree $1, 2, \cdots, t$ であることと定義する。ここで多項式 $f = f(x_1, \cdots x_d)$ が harmonic (調和) であるとは、通常のように、$\Delta f \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right) f = 0$ であることと定義する。

この spherical t-design の定義は Delsarte-Goethals-Seidel [7] による。この定義は(一見唐突に見えるかもしれないが)決して不自然なものではなく、種々の理由から、まったく当を得たものであると思われる。(実際、Delsarte による association schemes (特に Q-polynomial association schemes)

における"design"の定義が自然であると思えるのと、全く同じ理由から。Delsarte [6] 参照。)

なお、Delsarte-Goethals-Seidel [7] で示されているように上の定義は次の定義と同値である。

<u>定義 1′</u>　Ω_d の有限部分集合 X が spherical t-design であるとは、$k=0,1,\cdots,t$ に対して、任意の k-次の多項式 $V(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ と任意の $T\in O(d)$ (= 直交群) に対して

$$\sum_{\xi\in X} V(T\xi) = \sum_{\xi\in X} V(\xi)$$

となることである。(更に言い換えれば、$k=0,1,\cdots,t$ に対して、X のいかなる k-th moment も、任意の直交変換によって不変に保たれるということである。)

実際、この spherical t-design の概念は、単位球面 Ω_d の上の有限部分集合の対称度をはかる1つのパラメーターと見なせる。

さて、spherical t-designs についての、一つの重要問題は(通常の t-designs についてと同様に)、大きい t に対して、spherical t-design が存在するか否かであろう。$d=2$ に対しては、任意の t に対して、spherical t-design の存在は知られている。すなわち、正 $(t+1)$ 角形の頂点の集合は spherical t-design を作る。一方、$d\geqq 3$ の時は、(現在私の知る限りでは) $t\geqq 12$ に対して spherical t-design

の例は知られていないと思われる。$t \leq 11$ の例は多く知られている。（Delsarte-Goethals-Seidel [7] 参照）（なお $O(d)$ の有限部分群を用いての他の多くの examples の構成については [4] を参照。）

問題（Open ?）$d \geq 3$ を固定した時，いくらでも大きい t に対して，spherical t-design は存在するか？（答は yes と予想されるが，通常の t-design の場合にこの問題が難かしいのと同様であろう。）

§2 Tight spherical t-designs.

spherical t-design については次の不等式が知られている。

Theorem（Delsarte-Goethals-Seidel [7]）Ω_d において，spherical t-design X が存在するならば，

$$|X| \geq \binom{d+s-1}{d-1} + \binom{d+s-2}{d-1}, \quad t = 2s = \text{偶数の時},$$

$$|X| \geq 2\binom{d+s-1}{d-1}, \quad t = 2s+1 = \text{奇数の時}.$$

（これは通常の t-design（$t=2s$）における一般化された Fisher の不等式 $b \geq \binom{v}{s}$ と対比されよう。）

<u>定義 2</u>　Ω_d における spherical t-design X が <u>tight</u> であるとは，$|X|$ が上の Theorem の不等式において<u>等号</u>をみたすことと定義する。

<u>Remark</u>　$t=2, 3, 4, 5, 7, 11$ に対しては tight t-designs の存在は知られている。例えば，$d=8$ の時 E_8 型 Weyl 群の 240 個の roots 全体は tight 7-design を作り；$d=24$ の時，Leech lattice の $196560=2\cdot\binom{28}{5}$ 個からなるある部分集合は，tight 11-design を作るという具合である。

さて，ここでの話の主定理は，次の結果である。(R. M. Damerell, Royal Holloway College, Univ. of London) との共同研究による。)

<u>定理 A</u> (Bannai-Damerell)　$d \geqq 3$ と仮定する

(i)　$t=2s=$ 偶数 $\geqq 6$ の時，tight spherical t-design は存在しない。

(ii)　$t=2s+1=$ 奇数の時，s が十分大ならば（例えば $s \geqq 100$ ならば十分であるが）tight spherical t-design は存在しない。

<u>Remarks</u> (1). (ii) において tight $(2s+1)$-design の非存在の証明出来ていない $s\,(\geqq 6)$ は<u>いくつか</u>残っているが，近いうちに

全部消したいと思う。実際、大部分の d は既に消せたが、いくつかの d については必ずしも易しくない場合がある。

(2) $t=6$ の場合は Delsarte-Goethals-Seidel [7] による。

(3) 各 $t \geq 6$, $t \neq 7$ を fix した時、spherical t-design の存在するかも知れない d の値は高々有限個であることは既に [2] で証明されている。ここでの結果は完全に非存在を証明するものである。この方法は perfect codes [1], tight designs [3] の結果を拡張して、完全な非存在を証明しようとする時に役立たせられないかと思っているが、まだ今の所、成算は不明である。 尚 $t=2, 3, 4, 5, 7$ に対する tight spherical t-designs の分類は非常に難かしいと思われる。—— 通常の tight 4-designs の分類、perfect 2-codes の分類が難かしいのと同じ理由で。

(4) tight spherical 9-designs は存在しない。また、tight spherical 11-design が存在すれば $d=24$ に限る。(これらは B. Diviš (passed away July 26, 1976) による、これらの不定方程式の問題を解くことによって得られる。)

(5) Open problem $10X^4 - Y^2 = 1$ の整数解を決定せよ。もしこれが解ければ (i.e. $X > 1$ なる解を持たないことがわかれば) tight spherical 13-design の非存在が示せるであろう。

定理Aの証明の概略

証明は次の Lloyd 型定理 を用いてなされる。すなわち、spherical t-design X が存在するならば、次の多項式 $R_s(x)$ ($t=2s$ の時) 又は $C_s(x)$ ($t=2s+1$ の時) の零点は全て有理数 でなければならない。

(a) $R_s(x) = (\text{constant}) \cdot P_s^{(\frac{1}{2}(d-1),\, \frac{1}{2}(d-3))}(x)$. ($t=2s$ の時)
(通常の Jacobi 多項式)

(b) $C_s(x) = C_s^{\frac{1}{2}d}(x)$. ($t=2s+1$ の時)
(通常の Gegenbauer 多項式)

Remark
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} F(-n, \alpha+n, \beta; x),$$
$$C_{2n}^{\nu}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} (\text{const}) \cdot F(-n, n+\nu, \tfrac{1}{2}; x^2),$$
$$C_{2n+1}^{\nu}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} (\text{const}) \cdot 2x \cdot F(-n, n+\nu+1, \tfrac{3}{2}; x^2).$$
但、F は Gauss の hypergeometric series. この場合はいずれも有限個できれる。

さて、(a), (b) の場合いずれも、$R_s(x)$ および $C_s(x)$ の零点$(\neq 0)$は(もし有理数であれば)全て $\frac{1}{\text{integer}}$ の形でなければならないことが容易にわかる。次にそれらの逆数を根とする多項式(それの零点は全て整数でなければならない)

を考えると、

(a) の場合は、それらの根の分布が原点に対してほぼ対称であるが少しだけズレていて、そのズレを調べることにより矛盾が得られる。 方法は [1]、[2]、[3] などでなされたのと同じであるが、今度の場合は、直交多項式の理論がうまく使えて、きれいに、完全な形で解決出来る。

(b) の場合は、それらの根の分布は原点に関して完全に対称になり、ズレを調べる方法は用いられない。しかし、この場合に不定方程式のことが使える。すなわち、この場合は不定方程式

$$\frac{k(k+2)(k+4)\cdots(k+2(s-1))}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s\pm 1)} = y^2$$

をとくことに帰着され、上の不定方程式は $k>s^2$、s 十分大の時は解を持たないことが実際に証明出来る。方法は Erdös による不定方程式

$$\binom{x}{i} = y^2 \qquad (i\geqq 3)$$

の場合をまねるが、この場合はもっと複雑である。

References

1. E. Bannai : On perfect codes in the Hamming schemes H(n, q) with q arbitrary. ~~To appear in~~ J. Comb. Theory (A). 23 (1977), 52–67
2. ———— : On tight spherical designs : To appear in J. Comb. Theory (A)
3. ———— : On tight designs. To appear in Quat. J. Math (Oxford).
4. ———— : On some spherical t-designs (preprint).
5. E. Bannai and R. M. Damerell : Tight spherical designs (in Preparation)
6. P. Delsarte : An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips. Res. Repts. Suppl. 10 (1973).
7. P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel : Spherical codes and designs. To appear in Geometriae Dedicata.