数理解析研究所講究録
第 311 巻 1977 年 67-75

強さ2ℓの均斉配列と分解能2ℓの 2^m 釣合い型一部実施要因計画

神戸大 教育　白倉暉弘

1. 序及び準備

m個の因子で各々2水準で施される実験を考える。効果としてθ_ϕを一般平均，θ_tをt番目の因子の主効果，$\theta_{t_1 t_2}$をt_1, t_2番目の因子間の2-因子交互作，…，$\theta_{t_1 \cdots t_k}$を相当する因子間のk-因子交互作とする。ここで$2 \leqq \ell \leqq \frac{m}{2}$を満たす整数$\ell$に対して$(\ell+1)$-因子交互作用以上の効果は無視可能であるという一般的な状態を考える。ベクトル

$$\underline{\theta}' = (\theta_\phi ; \{\theta_t\} ; \{\theta_{t_1 t_2}\} ; \cdots ; \{\theta_{t_1 \cdots t_\ell}\}), \quad (1 \times \nu_\ell),$$

$$\underline{\theta}_0' = (\{\theta_t\} ; \{\theta_{t_1 t_2}\} ; \cdots ; \{\theta_{t_1 \cdots t_{\ell-1}}\}), \quad (1 \times p),$$

を考える。ただし$\nu_\ell = \sum_{\beta=0}^{\ell} \binom{m}{\beta}$，$p = \nu_{\ell-1} - 1$．

TをN個の処理組合わせ数を持つ計画とし（Tを$m \times N$の$(0,1)$行列として考える），$\underline{y}_T$をTに関する$N \times 1$の観測値ベクトルとする（$\underline{y}_T$のα番目の要素はTのα番目の処理組合わせにおける観測値からなる）。つぎの線形モデルを考える。

$$(1) \qquad \underline{y}_T = E_T \underline{\theta} + \underline{e}$$

ただし E_T は要素 ± 1 を持つTに関する $N \times \nu_\ell$ 計画行列，$\underline{e}$ は $\mathcal{E}(\underline{e}) = \underline{0}_N$，$\mathcal{E}(\underline{e}\,\underline{e}') = \sigma^2 I_N$ となる $N \times 1$ 確率ベクトル．

<u>定義 1</u>．　モデル (1) の下で $\underline{\theta}_0$ が推定可能となるとき，i.e., $\mathcal{E}(A\underline{y}_T) = \underline{\theta}_0$ となるような $\underline{\theta}$ に無関係な $p \times N$ 行列Aが存在するときTを分解能 2ℓ の 2^m 一部実施要因計画（2^m-FFD）という．

<u>定義 2</u>．　モデル (1) の下で $\underline{\theta}_0$ が推定可能かつ $\underline{\theta}_0$ の最良不偏推定量（BLUE）$\hat{\underline{\theta}}_0$ の共分散行列 $\mathrm{Var}[\hat{\underline{\theta}}_0]$ が m 個の因子間の任意の置換に対して不変となるときTを分解能 2ℓ の 2^m 釣合い型一部実施要因計画（2^m-BFFD）という．

<u>定義 3</u>．　$m \times N$ の (0, 1) 行列Tにおいて，Tの任意の t 個の行からなる部分行列 T_0 $(t \times N)$ の列に i 個の 1 の要素を持つベクトルが各々 μ_i 回現われるときTを強さ t，制約数 m，大きさ $N(=\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\mu_i)$，指標 μ_i $(i=0,1,\cdots,t)$ の均斉配列（B-array）という．

白倉 [1], [2] は強さ $t=2\ell$，制約数 m，指標 μ_i $(i=0,\cdots,2\ell)$ の

B-array T が分解能 $2l$ の 2^m-BFFD となるための十分条件を与えた。ここでは上記の B-array T が分解能 $2l$ の 2^m-BFFD となるための必要十分条件を与える。一方山本，白倉，桑田 [3] はある計画 T が分解能 $2l+1$ の 2^m-BFFD となるための必要十分条件は T が $|M_T| \neq 0$ (M_T は T に関する $\underline{\theta}$ の情報行列で $M_T = E_T' E_T$ で与えられる) となる強さ $2l$，制約数 m，指標 μ_i の B-array であることを示した。明らかに分解能 $2l+1$ の 2^m-BFFD は分解能 $2l$ の 2^m-BFFD である。よってここでは $|M_T| = 0$ となる強さ $2l$ の B-array に限定する。

上記の強さ $2l$ の B-array に対して，山本，白倉，桑田 [4] によって導入されたつぎの l 個の $(l-\beta+1)\times(l-\beta+1)$ 対称行列 ($\beta = 0, 1, \cdots, l$) を考える。

(2) $$K_\beta = \| \kappa_\beta^{i,j} \|$$

ただし

(3) $$\kappa_\beta^{i,j} = \kappa_\beta^{j,i} = \sum_{\alpha=0}^{\beta+i} \gamma_{j-i+2\alpha} z_{\beta\alpha}^{(\beta+i,\beta+j)} , \quad (0 \le i \le j \le l-\beta),$$

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{2l} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \binom{2l-k}{j-k+p} \mu_j ,$$

(4) $$z_{\beta\alpha}^{(u,v)} = \sum_{b=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-b} \frac{\binom{u-\beta}{b}\binom{u-b}{u-\alpha}\binom{m-u-\beta+b}{b}\left\{\binom{m-u-\beta}{v-u}\binom{v-\beta}{v-u}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\binom{v-u+b}{b}} ,$$

2. 分解能 $2l$ の 2^m-BFFD

$O_{p\times q}$ をすべて 0 の要素からなる $p\times q$ 行列，特に $\underline{0}_p = O_{p\times 1}$

とする。

<u>補題 1</u>. ある計画Tが分解能2ℓの2^m-FFDであるための必要十分条件は $X_1 M_T = C_1$ となる $p \times \nu_\ell$ 行列 X_1 が存在することである。ただし C_1 は

$$C_1 = [\, \mathbf{0}_p : I_p : O_{p\times g} \,] \qquad \left(g = \binom{m}{\ell}\right)$$

で与えられる $p \times \nu_\ell$ 行列.

<u>証明</u>. (必要) 定義1より $\mathcal{E}(A\boldsymbol{y}_T) = AE_T\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 = C_1\boldsymbol{\theta}$. 故に $AE_T = C_1$ となる A が存在する。よって $\mathrm{rank}\, E_T' = \mathrm{rank}[E_T' : C_1']$. よって $\mathrm{rank}\, M_T = \mathrm{rank}[M_T : C_1']$.
(十分) (1)より $\mathcal{E}(X_1E_T'\boldsymbol{y}_T) = X_1E_T'E_T\boldsymbol{\theta} = X_1M_T\boldsymbol{\theta} = C_1\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

<u>補題 2</u>. Tを分解能2ℓの2^m-FFDとする。そのとき$\boldsymbol{\theta}_0$の BLUE $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$とその共分散行列 $\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_0]$ はつぎで与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = X_1E_T'\boldsymbol{y}_T ,$$

$$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_0] = X_1M_TX_1'\sigma^2 = X_1C_1'\sigma^2 = X_{11}\sigma^2 .$$

ただし X_1, C_1 は補題1の行列, X_{11} は $X_1 = [\,\boldsymbol{x}_1 : X_{11} : X_{12}\,]$ となる $p \times p$ 行列.

<u>証明</u>. Gauss-Markov の定理より明らか.

$K_\beta^{(0)}$ ($\beta<\ell$) を K_β の最後の行と列を除いて得られる行列かつ $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ をそれぞれ K_0 の最初と最後の列からなるベクトルとする($\boldsymbol{k}_1'=(\kappa_0^{0,0},\kappa_0^{1,0},\cdots,\kappa_0^{\ell,0})$, $\boldsymbol{k}_2'=(\kappa_0^{0,\ell},\cdots,\kappa_0^{\ell,\ell})$)。

<u>定理</u>　強さ 2ℓ, 制約数 m, 指標 μ_i ($i=0,\cdots,2\ell$) の B-array T が分解能 2ℓ の 2^m-BFFD であるための必要十分条件は T がつぎの条件を満たすことである。$|K_{\beta_i}|=0$ ($0\le\beta_1<\cdots<\beta_r\le\ell$) かつ $|K_\alpha|\ne 0$ ($\alpha\ne\beta_1,\cdots,\beta_r;0\le\alpha\le\ell$) となる r 個の整数 β_i に対して,

(i) $\beta_1=0$ のとき

$|K_0^{(0)}|\ne 0$ かつ $\boldsymbol{k}_2=d\boldsymbol{k}_1$ となる $d(\ge 0)$ が存在する,

(5a) $\kappa_{\beta_i}^{\ell-\beta_i,\ell-\beta_i}=0$, $(1\le\beta_i\le\ell)$,

$|K_{\beta_i}^{(0)}|\ne 0$, $(1\le\beta_i\le\ell-1)$,

(ii) $\beta_1\ge 1$ のとき

(5b) $\kappa_{\beta_i}^{\ell-\beta_i,\ell-\beta_i}=0$, $(1\le\beta_i\le\ell)$,

$|K_{\beta_i}^{(0)}|\ne 0$, $(1\le\beta_i\le\ell-1)$.

<u>注意</u>　ここでは $|M_T|=0$ となる B-array T を考えているので, 定理において $|K_\beta|=0$ となる β の個数 r は必ず $r\ge 1$ である(M_T と K_β との関係については [4] を参照)。

定理の証明 （必要） 補題１より

(6) $$X M_T = C$$

となる $\nu_\ell \times \nu_\ell$ 行列 X が存在する．ただし $C = C_1' C_1 = \mathrm{diag}(0, I_p, O_{q\times q})$．B-array T に対して $M_T \in \mathfrak{A}$, $C \in \mathfrak{A}$．ただし $\mathfrak{A}$ は $l+1$ sets triangular type multidimensional partially balanced association algebra で詳細は［2］,［3］,［4］参照．このことは

(7) $$Q' M_T Q = \mathrm{diag}(K_0, K_1, \cdots, K_1, \cdots, K_\ell, \cdots, K_\ell) \equiv K$$
$$Q' C Q = \mathrm{diag}(\Gamma_0, \underbrace{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_1}_{\phi_1}, \cdots, \underbrace{\Gamma_\ell, \cdots, \Gamma_\ell}_{\phi_\ell}) \equiv \Gamma$$

となる直交行列 Q が存在することを意味する．ただし

$$\phi_\beta = \binom{m}{\beta} - \binom{m}{\beta-1},$$

(8) $$\Gamma_0 = \mathrm{diag}(0, I_{\ell-1}, 0), \quad \Gamma_\ell = 0$$
$$\Gamma_\beta = \mathrm{diag}(I_{\ell-\beta}, 0), \quad (\beta = 1, 2, \cdots, \ell-1).$$

∴ (6) より

$$X^* K = \Gamma, \qquad (X^* = Q' X Q).$$

故に $X_\beta K_\beta = \Gamma_\beta$ $(\beta = 0, 1, \cdots, \ell)$ となる $(\ell-\beta+1)\times(\ell-\beta+1)$ 行列 X_β が存在する．∴

(9) $$\mathrm{rank}\, K_\beta = \mathrm{rank}\,[K_\beta : \Gamma_\beta], \quad (\beta = 0, \cdots, \ell).$$

(i) $\beta = 0$ のとき

(9) より

$$(10) \qquad \mathrm{rank}\, K_0 = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1' & O_{1\times(\ell-1)} \\ O_{(\ell-1)\times(\ell+1)} & I_{\ell-1} \\ \boldsymbol{k}_2' & O_{1\times(\ell-1)} \end{bmatrix}$$

$\kappa_0^{0,0} = \sum_{i=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{i}\mu_i = N \neq 0$ より $\mathrm{rank}\, K_0 = \ell+1$ 又は ℓ. $\mathrm{rank}\, K_0 = \ell$ のとき (10) より任意の $i, j = 0, 1, \cdots, \ell; i \neq j$ に対して $(\kappa_0^{\ell,i}, \kappa_0^{\ell,j}) = d_{ij}(\kappa_0^{0,i}, \kappa_0^{0,j})$ となる $d_{ij} \geq 0$ が存在する。このことは $\boldsymbol{k}_2 = d\,\boldsymbol{k}_1$ となる $d \geq 0$ が存在することを意味する. そのとき $|K_0^{(0)}| \neq 0$ は明らか.

(ii) $\beta > 0$ のとき

$$(11) \qquad \mathrm{rank}\, K_\beta = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} O_{(\ell-\beta)\times(\ell-\beta+1)} & I_{\ell-\beta} \\ \kappa_\beta^{\ell-\beta,0}\ \kappa_\beta^{\ell-\beta,1} \cdots \kappa_\beta^{\ell-\beta,\ell-\beta} & O_{1\times(\ell-\beta)} \end{bmatrix}$$

よって $\mathrm{rank}\, K_\beta = \ell-\beta+1$ 又は $\ell-\beta$. $\mathrm{rank}\, K_\beta = \ell-\beta$ のとき (11) より $\kappa_\beta^{\ell-\beta,i} = 0$ $(i=0,\cdots,\ell-\beta)$. ところが K_β は一般には非負値行列なので $\kappa_\beta^{\ell-\beta,\ell-\beta} = 0$ が成り立てばよい ($\kappa_\beta^{\ell-\beta,\ell-\beta} = 0 \Rightarrow \kappa_\beta^{\ell-\beta,i} = 0$ $(i=0,\cdots,\ell-\beta-1)$). そのとき $|K_\beta^{(0)}| \neq 0$ は明らか.

(十分) 条件 (5a, b) より (9) 式が成り立つ. よって $X_\beta K_\beta = \Gamma_\beta$ $(\beta=0,\cdots,\ell)$ となる行列 X_β が存在する (特に $X_\ell = 0$).
今, つぎで与えられる $\nu_\ell \times \nu_\ell$ 行列 $X \in \mathfrak{A}$ を考える (Q は (7) で用いられた直交行列である).

$$(12) \qquad Q'XQ = \mathrm{diag}\,(x_0,\ \underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{\phi_1},\cdots,\underbrace{x_\ell,\cdots x_\ell}_{\phi_\ell})$$

この X は $Q'XQK=\Gamma$ より $XM_T=C$ を満たす．故に

$$(13) \qquad X_1 M_T = C_1$$

となる $p\times\nu_\ell$ 行列 X_1 が存在する．よって補題1より T は分解能 2ℓ の 2^m-FFD である．補題2より

$$Var[\hat{\theta}_0] = X_{11}\,\sigma^2$$

この $p\times p$ 行列 X_{11} は

$$(14) \qquad X = \left[\begin{array}{c:c:c} * & * & * \\ \hdashline * & X_{11} & * \\ \hdashline * & * & * \end{array}\right] \in \mathfrak{A}$$

であり algebra $\mathfrak{A}$ の性質より m 個の因子間の任意の置換に対して不変である．よって T は分解能 2ℓ の 2^m-BFFD である．

<u>注意</u>　条件 (5a, b) は $d=0$ (i.e., $\kappa_0^{\ell,\ell}=0$) のとき [2] で与えた十分条件と一致する．又 $r=1$ で $\beta_1=\ell$ (i.e., $|K_\alpha|\neq 0$ $(\alpha=0,\cdots,\ell-1)$, $K_\ell=0$) のときこの条件は [1] で与えた十分条件と一致する．

3. 例

ここでは強さ $t=4$ $(\ell=2)$ の B-array に対して条件 (5a, b) を

満たすものを与える。

(i) $m \geq 4$, $\mu_0 = \lambda_0 + (m-4)\lambda_1$, $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = \lambda_2$, $\mu_4 = (m-4)\lambda_2 + \lambda_3$ (λ_i は $\lambda_0 + \lambda_3 \geq 1$, $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_2 \geq 1$ を満たす整数) に対して, $|K_\alpha| \neq 0$ $(\alpha = 0, 1)$, $K_2 = \kappa_2^{0,0} = 0$ (i.e., $r=1$; $\beta_1 = 2$)。

(ii) $m \geq 4$, $\mu_0 = (m-4)$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = (m-4)$ に対して, $|K_0| = 0$, $|K_1| \neq 0$, $K_2 = \kappa_2^{0,0} = 0$, $|K_0^{(0)}| \neq 0$ (i.e., $r=2$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2$), $\underline{k}_1' = (2m,\ 0,\ 2(m-4)\sqrt{\binom{m}{2}})$, $\underline{k}_2' = (2(m-4)\sqrt{\binom{m}{2}},\ 0,\ (m-1)(m-4)^2)$ よって $d = (m-4)\sqrt{m-1}/\sqrt{2m}$.

(iii) $m = 4$, $\mu_0 = 2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$, $\mu_1 = 1$ に対して $|K_0| \neq 0$, $|K_1| = 0$, $|K_2| \neq 0$ (i.e., $r=1$; $\beta_1 = 1$), $\kappa_1^{1,1} = 0$, $|K_1^{(0)}| = 0$

References

[1] Shirakura, T. (1976). Balanced fractional 2^m factorial designs of even resolution obtained from balanced arrays of strength 2ℓ with index $\mu_\ell = 0$. Ann. Statist. 4 723-735.

[2] Shirakura, T. (1977). Contributions to balanced fractional 2^m factorial designs derived from balanced arrays of strength 2ℓ. Hiroshima Math. J. 7 217-285.

[3] Yamamoto, S., Shirakura, T. & Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math. 27 143-157.

[4] Yamamoto, S., Shirakura, T. & Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. Essays in Prob. & Statist., Ogawa Volume (Ed., S. Ikeda et al.) 73-94.