

完全 m 組グラフのパーティット・フロー分解-II

広島経済大学 田沢 新成
広島大・理 山本 純恭

§1. はじめに

m 個の項目(属性)についてそれぞれ n 個の水準値のいずれかをとることによって特性づけられる多値レコードの集合を考える。 k 個の項目についてそれぞれ指定された水準値をとるレコードを要求する質問を k 項目の質問という。いま、 $\binom{m}{2}n^2$ 個すなわちすべての2項目の質問の集合を考え、その部分集合に対してバケツを用意するファイル方式について考察する。そのとき、各項目を n 点集合に、水準値をその点に対応させると、2項目の質問は m 個の n 点集合からなる完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ の線に対応する。われわれはレコードの特性ベクトルの分布が一様となるとき、 c ($c \leq m-1$)個の2項目の質問に対応するバケツの冗長率すなわち1つのレコードが少くとも c 個の質問のいずれか1つに該当する確率が最小となるのはその質問の集合(バケツ)のグラフ構造が次数 c のパーティット・フローのとき、かつそのときに限ることを

示した [1], [2], [7]. ここに, パータイト・フロー (PC) とは 2 項目の貨物の集合に対応する線の集合のグラフ構造がフローであるのみならず, 各端点がいずれも異った点集合に属しているものをいう. それぞれ c 個の 2 項目の貨物に対応し, いずれも冗長さ最小のバケツのみからなる多値均衡型ファイル方式 HUBMFS₂ を構成する問題は, 完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ の線の全体を互いに線を共有しない次数 c の PC の和に分解する問題に対応する. われわれは [4] において, 分解可能であるための必要条件を与え, いくつかの十分条件を与えたが, 必要条件がいくらか甘く, 完全な解決には至っていなかった. ここでは, 必要条件をよりタイトにすることによって得た PC-分解可能であるための必要十分条件および分解アルゴリズムについて述べる.

§ 2. 主定理

完全 m 組グラフの PC-分解について, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. 完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ が互いに線を共有しない $\binom{m}{2}n^2/c$ 個の次数 c のパータイト・フローの和に分解されるための必要十分条件は

- (i) $\binom{m}{2}n^2$ が c の倍数であり, かつ
- (ii) n が偶数のとき $m \geq c+1$, n が奇数のとき $m \geq c+1 + \frac{c-1}{n^2}$ が成り立つことである.

特に, $n=1$ の場合は, 定理 2.1 は完全グラフ K_m のクロー
分解定理に帰することを注意しておく [5], [6].

§3. 必要性の証明

$K_m(n, n, \dots, n)$ が PC-分解可能とする. 明らかに (i) が必要であ
る. $K_m(n, n, \dots, n)$ の m 個の n 点集合を V_1, V_2, \dots, V_m とし, V_i の点
を根とする PC の個数を y_i とする. V_i と交わる $(m-1)n^2$ 本の線
の集合 X_i はそれらの PC に属するか属さないかで集合 X'_i と X''_i
に分割される. X''_i のどの 2 本の線も同じ PC に属さないので,

$$y_i + \{(m-1)n^2 - y_i\}c \leq \binom{m}{2}n^2/c$$

でなければならない. すなわち, y_i は不等式

$$y_i \geq \frac{n^2(m-1)(2c-m)}{2c(c-1)} \quad (3.1)$$

をみたす. 他方, V_i と V_j を結ぶ n^2 本の線は V_i の点あるいは V_j
の点を根とする PC に属し, かつどの 2 本の線も同じ PC に
属さないから, $y_i + y_j \geq n^2$ を満たさなければならない. したがって

$$y_i \geq \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil \quad (3.2)$$

が高々 1 つの i を除いて成立する. ここで $\lceil x \rceil$ は x より小さく
ない最小の整数を表わす. (3.1) と (3.2) を $\sum_i y_i$ に適用して,

$$\binom{m}{2}n^2/c \geq \frac{n^2(m-1)(2c-m)}{2c(c-1)} + (m-1)\frac{n^2}{2} \quad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$\geq \frac{n^2(m-1)(2c-m)}{2c(c-1)} + (m-1)\frac{n^2+1}{2} \quad (n \text{ が奇数のとき})$$

を得る。それ故、条件(ii)の必要性が導びかれる。

§4. 隣接行列とパータイト・クロール分解可能性

定理2.1の条件(i)と(ii)の十分性の証明に入る前に、2つの補助的な定理を与える。

$K_m(n, n, \dots, n)$ の各線に1つの方向が割りつけられるものとする。方向づけられた $K_m(n, n, \dots, n)$ に mn 次の隣接行列 $M = \|M_{ij}\|$ が対応する。ここに、 $M_{ij} = \|m_{ip, jq}\|$ は n 次の0-1行列で

$$m_{ip, jq} = \begin{cases} 1 & v_{jq} \text{ が } v_{ip} \text{ に隣接しているとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

によって定義される。 v_{ip} は点集合 V_i の p 番目の点で、 $ip = (i-1)n+p$ である。明らかに、すべての p, q, i, j に対して、

$$m_{ip, iq} = 0, \quad m_{ip, jq} + m_{jq, ip} = 1 \quad (i \neq j) \quad (4.1)$$

が成立する。すなわち、 $M_{ii} = 0, M_{ij} + M'_{ji} = G_{n, n} \quad (i \neq j)$ である。ここで $G_{t, u}$ はその要素がすべて1である $t \times u$ 行列である。

逆に、0-1行列 M が(4.1)を満たすならば、 M は $K_m(n, n, \dots, n)$ の各線に1つの方向を与える隣接行列である。

定理4.1. 完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ が互いに線を共有しない次数 c のパータイト・クロールの和に分解されるための必要十分条件は、 $K_m(n, n, \dots, n)$ の各線に適当な方向を与え、方向づけられた $K_m(n, n, \dots, n)$ の mn 次の隣接行列 $M = \|M_{ij}\|$ が

(a) M の各行和は C の倍数, すなわち

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^n m_{ip, jq} = a_{ip} C, \text{ かつ}$$

(b) M の各部分行列 M_{ij} の行和は j に関係なく

$$\sum_{q=1}^n m_{ip, jq} \leq \min(a_{ip}, n),$$

をみたすことである.

証明は [4], [7] を参照.

定理 4.1 について, $\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^n a_{ip} = \binom{m}{2} n^2 / c$ をみたす非負整数 a_{ip} ($i=1, 2, \dots, m; p=1, 2, \dots, n$) を適当に定めることにより, 条件 (a) と (b) をみたす mn 次の隣接行列 M が構成できるならば, $K_m(n, n, \dots, n)$ は互いに線と共有しない次数 C の PC の和に分解できることを定理 4.1 は示している. 次の定理は条件 (a) と (b) をみたす隣接行列 M の構成および定理 2.1 の十分性の証明に有効である.

定理 4.2. $\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^n a_{ip} = \binom{m}{2} n^2 / c$ をみたす非負整数 a_{ip} ($i=1, 2, \dots, m; p=1, 2, \dots, n$) に対して, もし

1) $\sum_{j=1}^m x_{ij} = C \sum_{p=1}^n a_{ip}$, $x_{ii} = 0$ および $x_{ij} + x_{ji} = n^2 (i+j)$ をみたす m 次の非負整数行列 $X = \|x_{ij}\|$ を構成することができ,

2) 各々の i に対して,

$$\sum_{j=1}^m y_{ip, j} = a_{ip} C, \quad \sum_{p=1}^n y_{ip, j} = x_{ij}, \quad \text{かつ} \quad (4.2)$$

$$0 \leq y_{ip, j} \leq \min(a_{ip}, n) \quad (4.3)$$

をみたす $n \times m$ 非負整数行列 $Y_i = \|y_{ip, j}\|$ を構成することができ, かつ

3) $1 \leq i < j \leq m$ をみたす i と j のすべての組に対して,

$\sum_{q=1}^n m_{ip, jq} = y_{ip, j}$ と $\sum_{p=1}^n m_{ip, jq} = n - y_{jq, i}$ をみたす n 次の 0-1 行列 $M_{ij}^* = \|m_{ip, jq}\|$ を構成することができるならば, $K_m(n, n, \dots, n)$ は次数 c の パータイト・クロール分解可能である.

証明

$$M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}^* & i < j \text{ のとき} \\ 0 & i = j \text{ のとき} \\ G_{n,n} - M_{ji}^* & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される mn 次の 0-1 行列 $M = \|M_{ij}\|$ を考える. そのとき, M は $K_m(n, n, \dots, n)$ の隣接行列である. さらに, M の各部分行列 M_{ij} について, M_{ij} の第 p 行の行和は $y_{ip, j}$ であるから, M は定理 4.1 の条件 (a) と (b) を満足している.

§ 5. 十分性の証明

条件 (i) をみたす完全 m 組グラフと PC のおつパラメーター m, n, c に対して,

$$a_{ip} = \begin{cases} a+1 & \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, \Delta \text{ のとき } p=1, 2, \dots, d+1 \\ i=\Delta+1, \dots, m \text{ のとき } p=1, 2, \dots, d \end{array} \\ a & \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, \Delta \text{ のとき } p=d+2, \dots, n \\ i=\Delta+1, \dots, m \text{ のとき } p=d+1, \dots, n \end{array} \end{cases} \quad (5.1)$$

とする. ここで, a, d, Δ は非負の整数で,

$$\binom{m}{2} n^2 / c = mna + md + \Delta, \quad 0 \leq d < n, \quad 0 \leq \Delta < m$$

をみたす. $\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^n a_{ip} = \binom{m}{2} n^2 / c$ であるから, 残りの条件 (ii) の十分性は, 定理 4.2 における行列 X, Y_i および M_{ij}^* が (5.1) で与えられた a_{ip} に対して構成できるということを示すことによつて証明される. 行列 X, Y_i, M_{ij}^* の構成は n が偶数, 奇数で若

干の差違はあるが、ほぼ同様にできるので、ここでは n が偶数の場合のみを記す。

§ 5.1. X の作成

$$X_{11} + X'_{11} = n^2(G_{s,s} - I_s), \quad X_{22} + X'_{22} = n^2(G_{m-s,m-s} - I_{m-s}) \quad (5.2)$$

$$X_{12} + X'_{21} = n^2 G_{s,m-s}$$

$$[X_{11} \ X_{12}] j_m = c(na+d+1) j_s, \quad [X_{21} \ X_{22}] j_m = c(na+d) j_{m-s} \quad (5.3)$$

をみたす4つの部分行列 $X_{k,l}$ ($k, l=1, 2$) からなる m 次の非負整数行列

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

を構成することが十分である。ここで、 j_t はその成分がすべて1である長さ t のベクトル、 I_t は次数 t の単位行列を表わす。

$$X^* = \begin{bmatrix} X_{11}^* & X_{12}^* \\ X_{21}^* & X_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n^2}{2}(G_{s,s} - I_s) & \frac{n^2}{2} G_{s,m-s} \\ \frac{n^2}{2} G_{m-s,s} & \frac{n^2}{2}(G_{m-s,m-s} - I_{m-s}) \end{bmatrix}$$

を考える。そのとき、 X^* は (5.2) を満たし、その行和は

$$[X_{11}^* \ X_{12}^*] j_m = (m-1) \frac{n^2}{2} j_s, \quad [X_{21}^* \ X_{22}^*] j_m = (m-1) \frac{n^2}{2} j_{m-s}$$

である。 $x = c(na+d+1) - (m-1)n^2/2 = (m-s)c/m$, $y = (m-1)n^2/2$

$- c(na+d) = sc/m$ とおく。そのとき、 $0 \leq x < m-s$, $0 \leq y < s$

であるから、各行和が x に等しく、各列和が y に等しい $s \times$

$(m-s)$ 0-1行列 B が存在することから Ryser 定理 [3], [6] から

簡単にわかる。従って、次のように X_{kl}^* に B を重ねることに
よって X_{kl}^* を調整して X_{kl} を得る。そのとき X_{kl} は (5.2) はも
ちろん (5.3) を満足する。

$$\begin{aligned} X_{11} &= X_{11}^* & X_{12} &= X_{12}^* + B \\ X_{21} &= X_{21}^* - B' & X_{22} &= X_{22}^* \end{aligned}$$

§ 5.2. Y_i の作成 $n \times m$ 非負整数行列

$$Y_i^* = \begin{bmatrix} Y_{1i}^* \\ Y_{2i}^* \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

を考える。ここで、

$$Y_{1i}^* = \begin{cases} \frac{n}{2}(G_{d+1,m} - H_{d+1}^{(i)}) & i = 1, 2, \dots, A \text{ のとき} \\ \frac{n}{2}(G_{d,m} - H_d^{(i)}) & i = A+1, \dots, m \text{ のとき} \end{cases} \quad Y_{2i}^* = \begin{cases} (\frac{n}{2}-1)(G_{n-d-1,m} - H_{n-d-1}^{(i)}) & i = 1, 2, \dots, A \text{ のとき} \\ (\frac{n}{2}-1)(G_{n-d,m} - H_{n-d}^{(i)}) & i = A+1, \dots, m \text{ のとき} \end{cases}$$

である。 $H_t^{(i)}$ は $t \times m$ 行列で、 i 列の要素がすべて 1, 他の
要素はすべて 0 である。 Y_i^* の行和は $Y_{1i}^* \delta_m = (m-1)\frac{n}{2}\delta_m$, $Y_{2i}^* \delta_m$
 $= (m-1)(\frac{n}{2}-1)\delta_m$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 列和は $Y_i^{*'} \delta_n = \left\{ \frac{n^2}{2} - (n-d-1) \right\} \delta_n$
($i = 1, 2, \dots, A$), $Y_i^{*'} \delta_n = \left\{ \frac{n^2}{2} - (n-d) \right\} \delta_n$ ($i = A+1, \dots, m$) である。

$u = (A+1)C - (m-1)\frac{n}{2}$, $v = AC - (m-1)(\frac{n}{2}-1)$ とおく。

$$Y_{ip} = \begin{cases} u & i = 1, 2, \dots, A \text{ のとき } p = 1, 2, \dots, d+1 \\ & i = A+1, \dots, m \text{ のとき } p = 1, 2, \dots, d \\ v & i = 1, 2, \dots, A \text{ のとき } p = d+2, \dots, n \\ & i = A+1, \dots, m \text{ のとき } p = d+1, \dots, n \end{cases}$$

とおき、行列 X に対し、 $j = 1, 2, \dots, m$ に対して、

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \left\{ \frac{n^2}{2} - (n-d-1) \right\} & i=1, 2, \dots, s (i \neq j) \text{ のとき} \\ x_{ij} - \left\{ \frac{n^2}{2} - (n-d) \right\} & i=s+1, \dots, m (i \neq j) \text{ のとき} \\ x_{ij} & i=1, 2, \dots, m (i=j) \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。そのとき、 $m \geq c+1$ 、 $0 \leq d \leq n-1$ であるから、 $1 \leq Y_{ip} \leq m-1$ 、 $0 \leq \Delta_{ip} \leq n$ である。そして、各 $i=1, 2, \dots, m$ に対して行和 Y_{ip} 、列和 Δ_{ij} をもつ $n \times m$ 0-1 行列 Z_i が存在する (Ryser 定理 [3], [6])。従って、次のように Z_i を Y_i^* に重ねるとによって、 Y_i^* を調整して Y_i を得る。

$$Y_i = Y_i^* + Z_i \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Y_i は (4.2) を満たす。 $m \geq c+1$ であるから $a \geq \frac{n}{2}$ より、 Y_i は (4.3) を満たす。

§ 5.3. M_{ij}^* の作成 $n \geq 4$ の場合、 $i \neq j$ のとき、 $y_{ip,j}$ は $\frac{n}{2}$ 、 $\frac{n}{2} \pm 1$ のいずれかを値にもち、 $i=j$ のとき $y_{ip,j} = 0$ である。それ故、 n 次の 0-1 行列 M_{ij}^* を作る事ができる (Ryser 定理 [3], [6])。 $n=2$ の場合、 $d=0$ のとき、 $1 \leq i, j \leq s$ に対し $y_{i2,j} = 1 (j-i \equiv 1, 2, \dots, \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor \pmod{s})$ なるように Y_i が作れる。 $d=1$ のとき、 $s+1 \leq i, j \leq m$ に対し、 $y_{i2,j} = 1 (j-i \equiv 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m-s-1}{2} \rfloor \pmod{m-s})$ なるように Y_i が作れる。行和、列和ベクトルがともに $(2, 0)$ となるので M_{ij}^* が作れる。

参考文献

- [1] 潮和考, 田沢新成, 池田秀人, 山本純恭 (1976). 完全 m 組グラフのパーティット・クロ-分解, 日本数学会年会応用数学会分科会講演予稿集, 46-53.
- [2] 潮和考, 田沢新成, 池田秀人, 浜田昇, 山本純恭 (1975). 多値レコードに対する均衡型ファイル方式 (HUBMFS₂) について, 情報処理学会昭和50年度第16回大会講演論文集, 69-70.
- [3] Ryser, H.J. (1957). Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.* 9, 371-377.
- [4] 田沢新成, 潮和考, 池田秀人, 山本純恭 (1976). 完全 m 組グラフのパーティット・クロ-分解について, 数理解析研究所講究録 285, 112-121.
- [5] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Uehio, K. and Hamada, N. (1975). Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy, *Information and Control* 28, 156-175.
- [6] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Uehio, K. and Hamada, N. (1975). On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, *Hiroshima Math. J.* 5, 33-42.
- [7] Yamamoto, S., Tagawa, S., Uehio, K. and Ikeda, H. (1977). Design of a balanced multiple-valued file organization scheme with the least redundancy, To appear in *Proceedings of the Third International Conference on Very large data bases*.