数理解析研究所講究録
第 313 巻 1977 年 59-69

実質強受動性について

早大・理工　松本　隆
横浜市大・文理　一楽重雄

1. まえがき.

昨年の電気回路の力学系研究集会に於て，著者の一人が提起した次のような問題が異種素子間の結合がない場合に肯定的に解けることを示す。([1]).

問題. regularな回路に適当に線形抵抗を足すことによって，次の条件(i),(ii)を満たし，かつ，そのときに得られる回路もregularであるように出来るか？

条件(A)　(i)　抵抗のみからなるtreeが存在する。

(ii)　キャパシタとインダクタを全て含むtreeが存在する。

なお，この問題の肯定的な解答は次のことも意味している。与えられた抵抗素子の数をρとすると，素子の特性によってρ次元の滑らかな（閉）部分多様体 $\Lambda_R \subset \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\rho$ が決まる。抵抗のパワーを表わす関数 $W_R : \Lambda_R \longrightarrow \mathbb{R}$ を，

$$W_R(i_R, v_R) = \sum_{j=1}^{\rho} i_{R_j} v_{R_j}$$

と決める。

<u>定義.</u> ある compact set $\Omega_R \subset \Lambda_R$ が存在して,

$$\inf\left\{ W_R(i_R, v_R) \,\middle|\, (i_R, v_R) \in \Lambda_R - \Omega_R \right\} > 0$$

が成立するとき，この回路の抵抗回路が（Ω_Rに関して）実質強受動であるという。

抵抗回路が実質強受動であるという性質は，その回路の抵抗素子のみによって決まり，キャパシタ及びインダクタと素子の接ぎ方にはよらない。

昨年の結果と合せて，次の結果が得られる。

キャパシタとインダクタに蓄えられるエネルギー関数Eがproper，すなわち，E^{-1}(compact set) = compact が成りたつとき，次が成立する。

<u>結果.</u> 抵抗回路が実質強受動である regular な回路に対して，適当に線形抵抗を付け加えれば，新しい回路は compact attractor を持つ。すなわち，任意の初期値に対して，ある時間より後は常に一定の compact set の中に解がはいっている。

2. 準備

与えられた回路の各素子に向きをつけて得られる向きのついたグラフをGとする。 電気回路の状態は各素子の電流と

電圧によって記述される。いま、素子の数を b とする。各素子の電流を成分とするベクトル $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_b)$ を考えると、これは b 次元のベクトル空間 $\mathbb{R}^b$ の元である。このベクトル空間を $C_1(G)$ とも書く。各素子の電圧を成分とするベクトルも b 次元ベクトル空間の元と考えられる。各 branch での電圧，電流を考えたのと同様に，各 node での電流，電圧を仮に考えることにする。node の数を n とすれば，各 node での電流（電圧）を成分とするベクトルは n 次元ベクトル空間 $C_0(G)$ の元である。各素子の電流，電圧は Kirchhoff の法則を満たし，抵抗素子の特性によって抵抗素子の電圧と電流は規定される。

まず，Kirchhoff の法則を考えよう。電流に関する Kirchhoff の法則は「各 node に流れ込む電流と流れ出す電流は等しい」であった。いま，境界写像と呼ばれる線形写像

$$\partial : C_1(G) \longrightarrow C_0(G)$$

を次のように定義する。各素子の電流を表わすベクトル $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_b)$ を $i_1b_1+\cdots+i_bb_b \in C_1(G)$ と書くことにする。ここで，b_j は j 番目の branch を，i_j は b_j を流れる電流である。いま，b_j が node n_j から $n_{j'}$ に向う branch であるとき，

$$\partial(1b_j) = 1n_{j'} - 1n_j$$

と定義し，線形に拡張して $\partial : C_1(G) \longrightarrow C_0(G)$ を得る。

すなわち，

$$\partial(\boldsymbol{i}) = \partial\left(\sum_{j=1}^{b} i_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{b} i_j \partial(b_j) = \sum_{j=1}^{b} i_j (n_{j'} - n_j)$$

である。$\partial(\boldsymbol{i})$ は，各 branch の電流 $\boldsymbol{i}$ に対して，各 node に流れ込む電流の和を表わすから，Kirchhoff の電流法則は

$$\partial(\boldsymbol{i}) = 0, \quad \text{あるいは,} \quad \boldsymbol{i} \in \mathrm{Ker}\,\partial$$

と表わせる。

次に，各素子の電圧 $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_b)$ に対して，$C_1(G)$ の dual space $C^1(G)$ の元 $P_{\boldsymbol{v}}$ を次のようにして決める。$P_{\boldsymbol{v}} : C_1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ は線形写像で，$\boldsymbol{i} \in C_1(G)$ に対して，

$$P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{i}) = \sum_{j=1}^{b} v_j i_j$$

によって定義されるものとする。$\boldsymbol{v}$ と $P_{\boldsymbol{v}}$ を同一視して，$\boldsymbol{v}$ を $C_1(G)$ の元と考え，$\boldsymbol{v} = v_1 b_1^* + \cdots + v_b b_b^*$ と表わす，但し，$b_1^*, \cdots, b_b^*$ は $b_1, \cdots, b_b$ の dual basis である，(すなわち，$b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$)。

同様に，各 node での電圧 $\boldsymbol{w}$ も各 node での電力関数を仮に考えることによって，$C_0(G)$ の dual space $C^0(G)$ の元と考えることが出来，$\boldsymbol{w} = w_1 n_1^* + \cdots + w_n n_n^*$ と表わす。

$\partial^* : C^0(G) \longrightarrow C^1(G)$ を写像 $\partial : C_1(G) \longrightarrow C_0(G)$ の双対写像とする，すなわち，

$$(\partial^* P_{\boldsymbol{w}})(\boldsymbol{i}) = P_{\boldsymbol{w}}(\partial \boldsymbol{i}).$$

このとき，Kirchhoff の電圧法則は，

$$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\,\partial^*, \quad \text{あるいは,} \quad \boldsymbol{v} = \partial^* \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w} \in C^0(G)$$

と表わせる。 ある $w \in C^0(G)$ に対して，$v = \partial^* w$ と書けるとすると，

$$
\begin{aligned}
P_v(i) &= P_{\partial^* w}(i) = P_w(\partial i) \\
&= P_w\left(\sum_{j=1}^{b} i_j (n_{j'} - n_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{b} (w_{j'} - w_j) i_j ,
\end{aligned}
$$

となるから，

$$v_j = w_{j'} - w_j$$

となる。 これは，各 branch の電圧がその branch の両端の電圧の差として得られることを示していることに他ならない。

結局，Kirchhoff の法則を満足する電圧，電流 (i, v) の条件は，$(i, v) \in \mathrm{Ker}\,\partial \times \mathrm{Im}\,\partial^* \subset C_1(G) \times C^1(G)$ である。$K = \mathrm{Ker}\,\partial \times \mathrm{Im}\,\partial^*$ は $C_1(G) \times C^1(G)$ の b 次元の部分空間であり，Kirchhoff space と呼ぶ。

次に，抵抗の特性を考えよう。 以下，異種素子間の結合はないものと仮定する。 従って，抵抗の branch の電圧，電流を v_R, i_R とすれば，特性多様体 Λ は次の様に与えられる。

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \Lambda_R \times \mathbb{R}^{b-\rho} \times \mathbb{R}^{b-\rho} \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b , \\
&= \{ (i, v) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \mid (i_R, v_R) \in \Lambda_R \} .
\end{aligned}
$$

ただし，$\Lambda_R \subset \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\rho$ は ρ 次元の部分多様体であり，$(i, v) = (i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C)$ とする。

K と Λ が transeverse ([2]) なら，

$$\Sigma = K \cap \Lambda \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$$

は，$(b-\rho)$ 次元の（滑らかな）部分多様体であり，Σ 上でダイナミクスが起こる。キャパシタの数を γ，インダクタの数を λ とすれば，$b = \rho + \gamma + \lambda$ である。

キャパシタの電圧，インダクタの電流に注目して，写像

$$\pi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda$$

を，射影：$\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b = (\mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda) \times (\mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda$ の Σ への制限とする。すなわち，$(i, v) = (i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C)$ に対して，

$$\pi(i, v) = (i_L, v_C)$$

と決める。π が diffeomorphism のとき，regular な回路と呼び，このとき，Σ 上のダイナミクスは (v_C, i_L) によって記述される。（[3]）

前にも述べたように，抵抗のパワー

$$W_R : \Lambda_R \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$W_R(i_R, v_R) = \sum_{i=1}^{\rho} v_{R_i} i_{R_i}$$

で定義する。次に，$\iota : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ を自然な inclusion とし，$\pi'_R : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \longrightarrow \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\rho$ を射影，$\pi'_R(i, v) = (i_R, v_R)$ とする。このとき，

$$W = W_R \circ \pi'_R \circ \iota : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

W_Rは回路のトポロジー，つまり素子の接ぎ方によ
るが，Wはそうでないことに注意する。

ンパクト部分集合$\Omega \subset \Sigma$があって

$$f\{W(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma - \Omega\} > 0$$

回路網を，Ωに関して実質強受動という。

ト集合$\Omega_R \subset \Lambda_R$があって，

$$\{W_R(i_R, v_R) \mid (i_R, v_R) \in \Lambda_R - \Omega_R\} > 0$$

Λ_Rを，Ω_Rに関して実質強受動という。

たように，回路が実質強受動だという性質は回路
ーによっているが，抵抗回路Λ_Rが実質強受動で
性質はΛ_Rのみによっているから，後者を調べる
よりはるかにたやすい。

regularな回路で，Λ_RがあるΩ_Rに関して実質
るとする。このとき，次が成りたつ。

ンタに並列，及び，インダクタに直列に線形抵抗
　条件(A)を満たすようにできる。

できた回路もregularである。

できた抵抗の特性多様体$\Lambda_R^{\#}$はある$\Omega_R^{\#}$に対して
である。

[証明] 与えられた回路から決まる(向きのついた)グラフをGとする。回路はregularだから, proper tree (すべてのキャパシタを含み, インダクタを含まないtree) が存在する。([4]) このtreeをTとする。Tの(従ってGの)キャパシタ全部からなる部分グラフをT_Cとし, $T = T_C \cup T_{R_1}$ とする。すなわち, T_{R_1} はTに含まれる抵抗からなる部分グラフである。キャパシタに並列に線形抵抗 f_k, $k=1,\dots,r$ を加える。加えた抵抗によるグラフを$\mathcal{F}$と書けば, $T_{R_1} \cup \mathcal{F}$ は $G \cup \mathcal{F}$ のtreeになっている。次に$\tilde{T}$をGのTに関するlinkとする, すなわち, $G = T \cup \tilde{T}$。$\tilde{T}$はキャパシタを含まないから, インダクタからなる部分グラフと抵抗からなる部分グラフに分割でき, $\tilde{T} = \tilde{T}_L \cup \tilde{T}_{R_2}$ と書く。各インダクタに直列に線形抵抗 h_k, $k=1,\dots,s$ を挿入する。挿入した抵抗からなる部分グラフを$\mathcal{H}$と書く。このとき,

$$T_1^{\#} = T_{R_1} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$$

は連結で

$$G^{\#} = G \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$$

の全てのnodeを含む。また, $T_1^{\#}$ はループを持たないから, $G^{\#}$のtreeである。$T_1^{\#}$ は抵抗のみからなるtreeで, まえがきの中の条件(A)の(i)を満足する。次に,

$$T_2^{\#} = T \cup \tilde{T}_L$$

とすれば，これも$G^{\#}$の tree になり，$T_2^{\#}$ は$G^{\#}$のすべてのキャパシタとインダクタを含む。これで条件(A)の(ii)が満たされる。

さて，定理の(iii)は，線形抵抗を付け加えただけだから，明らかに満足するので，定理の(ii)，すなわち，新しい回路も regular であることを言えば良い。

もとの回路には proper tree Tがあるから，これに関してキルヒホフの法則を，基本カットセット行列Q，基本ループ行列Bを用いて具体的に書き下すと(1)~(4)になる。

$$v_L + F_{LR_1} v_{R_1} + F_{LC} v_C = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$v_{R_2} + F_{R_2R_1} v_{R_1} + F_{R_2C} v_C = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$i_{R_1} - F_{R_2R_1}^T i_{R_2} - F_{LR_1}^T i_L = 0 \quad \text{---(3)}$$

$$i_C - F_{R_2C}^T i_{R_2} - F_{LC}^T i_L = 0 \quad \text{---(4)}$$

$$(i_{R_1}, i_{R_2}, v_{R_1}, v_{R_2}) \in \Lambda_R \quad \text{---(5)}$$

次に，

$$T_3^{\#} = T \cup H$$

とおくと$T_3^{\#}$ は$G^{\#}$の proper な tree になっている。新しい回路に関して，Kirchhoff の法則と，抵抗の特性条件を上と同様に書き下すと，加えた線形抵抗の接ぎ方より次が得られる。

$$v_L + F_{LR_1} v_{R_1} + F_{LC} v_C + v_h = 0 \quad \cdots (1)^{\#}$$

$$v_{R_2} + F_{R_2R_1} v_{R_1} + F_{R_2C} v_C = 0 \quad \cdots (2)^{\#}$$

$$v_f + F_{fC} v_C = 0 \quad \text{---}(i)$$

$$\mathring{i}_{R_1} - F_{R_2R_1}^T \mathring{i}_{R_2} - F_{LR_1}^T \mathring{i}_L = 0 \quad \text{---}(3)^\#$$

$$\mathring{i}_C - F_{R_2C}^T \mathring{i}_{R_2} - F_{LC}^T \mathring{i}_L - \mathring{i}_f = 0 \quad \text{---}(4)^\#$$

$$\mathring{i}_h - F_{Lh}^T \mathring{i}_L = 0 \quad \text{---}(ii)$$

$$(\mathring{i}_{R_1}, \mathring{i}_{R_2}, v_{R_1}, v_{R_2}) \in \Lambda_R \quad \text{---}(5)^\#$$

$$v_f - f\, i_f = 0 \quad \text{---}(iii)$$

$$v_h - h\, i_h = 0 \quad \text{---}(iv)$$

さて，もとの回路が regular だから，$\pi : \Sigma = K \cap \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\gamma$ が diffeomorphism，すなわち $\pi^{-1} : \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\gamma \longrightarrow \Sigma$ が存在して微分可能な写像である。言いかえると，式 (1), (2), (3), (4), (5) によって，$(i, v) = \pi^{-1}(i_L, v_C)$ が微分可能写像として決まっている。新しい回路での state space $\Sigma^\# = K^\# \cap \Lambda^\#$ は，式 $(1)^\# \sim (5)^\#$ 及び式 $(i) \sim (iv)$ によって与えられている。今，$v_L' = v_L + v_h$，$\mathring{i}_C' = \mathring{i}_C - \mathring{i}_f$ とおくと，式 $(1)^\# \sim (4)^\#$ はそれぞれ式 (1) ～ (4) と全く同じものになり，$(5)^\#$ は最初から (5) と同じであるから，新しい回路においても，

$$(\mathring{i}_C', \mathring{i}_{R_1}, \mathring{i}_L, \mathring{i}_{R_2}, v_C, v_{R_1}, v_L', v_{R_2}) = \pi^{-1}(\mathring{i}_L, v_C)$$

が成りたっている。また，(i), (ii) より，v_f, $\mathring{i}_h$ は $\mathring{i}_L$, v_C によって（滑らかに）決まっている。さらに，(iii), (iv) によって v_f, v_h が決まり，最後に，$v_L' = v_L + v_h$, $\mathring{i}_C' = \mathring{i}_C - \mathring{i}_f$ の関係から，v_L, $\mathring{i}_C$ も決まる。結局，

$$(i^\#, v^\#) = (\pi^\#)^{-1}(i_L, v_C)$$

と書け，今の決り方から $(\pi^{\#})^{-1}$ は滑らかであり，明らかに，$\pi^{\#}: \Sigma^{\#} \longrightarrow \mathbb{R}^{\lambda} \times \mathbb{R}^{\gamma}$ の逆写像であるから，π は diffeomorphism である。これは新しい回路が regular であることを示している。（証明終り。）

文 献

[1] 松本隆，"電気回路網のエネルギー，パワーそして混合ポテンシャルについて"，数理研講究録 284，"電気回路の力学系" 1976年10月，pp. 1～17

[2] S. Ichiraku, "On the transeversality conditions in electrical circuits.", to appear in Yokohama Math. J.

[3] S. Smale, "On the mathematical foundation of electrical circuit theory.", J. Differential Geometry, 7, pp. 193～210, (1972).

[4] T. Matsumoto, "On the dynamics of electrical networks.", J. Differential Equations, 21, pp. 179～196, (1976).