数理解析研究所講究録
第 313 巻 1977 年 111-125

Hopf bifurcation について

東大 理　矢野 公一

Ruelle-Takens "On the Nature of Turbulence" の紹介。

§1 Introduction

(1.1) 問題

次のような diffeomorphism の 1 parameter family を考える。

$\varphi^\mu : B \to B$ diffeomorphism of Banach space ($\mu \in \mathbb{R}$)

条件 (i) $\varphi^\mu(0) = 0$.

(ii) $d\varphi^\mu(0) : B \longrightarrow B$ linear map の spectrum は 2 つの closed set $\sigma_1(\mu), \sigma_2(\mu)$ にわかれて,

$\sigma_1(\mu) \subset$ interior of D^2 　　 $\mathbb{C} \supset D^2$ unit disk

$$\begin{cases} \sigma_2(\mu) \subset \text{interior of } D^2 & \text{if } \mu < 0 \\ \sigma_2(\mu) \subset \partial D^2 & \text{if } \mu = 0 \\ \sigma_2(\mu) \subset \mathbb{C} \setminus D^2 & \text{if } \mu > 0 \end{cases}$$

このfamilyは$\mu=0$でbifurcationを与えるが、このようなbifurcationについて何が言えるか？

特に$\sigma_2(\mu)=\{\lambda(\mu),\overline{\lambda(\mu)}\}$複素共役な2つの固有値のときは。

同様な問題がX^μ: vector field on B with 0 isolated singular pointに対しても考えられる。

(1.2) Center manifold theorem

$\varphi: B\to B$ C^{k+1} (local) diffeomorphism of Banach space, $k\geq 1$.

(i) $\varphi(0)=0$

(ii) $d\varphi(0)$のspectrumは2つのclosed set σ_1,σ_2にわかれて、$\sigma_1\subset$ interior of D^2, $\sigma_2\subset\partial D^2$。

かつ、B'をσ_2に関するgeneralized eigen spaceとするとき$\dim B'$は有限。

このとき、Bでの0の近傍VとVのclosed submanifold Mが存在して次を満たす。

(a) $0\in M$, $T_0M\simeq B'$

(b) (invariance) $x\in M$, $\varphi(x)\in V$ならば$\varphi(x)\in M$

(c) (local attractivity) $x\in V$, $\varphi^n(x)\in V$ for $n=1,2,\cdots$ であるならば$\varphi^n(x)$はMへ近づく。

(1.3) Reduction to 2-dimensional case

定理(1.2)を用いて問題(1.1)を次のように低次元へおしこめることができる。

写像 $\varphi: B\times\mathbb{R} \longrightarrow B\times\mathbb{R}$ を $\varphi(x,\mu)=(\varphi^{\mu}(x),\mu)$ で定義するとき $\varphi(0)=0$ で，$d\varphi(0)$ の spectrum は $\sigma_1(0)\cup\sigma_2(0)\cup\{1\}$。("1" は μ 方向) もし $\sigma_2(0)$ に関する generalized eigen space の次元が有限ならば (1.2) を用いて原点の近傍での submanifold M が存在し，local に φ-invariant。さらに local attractivity より $M\supset 0\times\mathbb{R}$，また $B\times\mu$ は M と transversal となるから $\tilde{\varphi}^{\mu}: M\cap B\times\mu \longrightarrow M\cap B\times\mu$ 1 parameter family of local diffeomorphisms が得られ，$d\tilde{\varphi}^{\mu}(0)$ の spectrum が $\sigma_2(\mu)$ で与えられることもわかる。

特に $\sigma_2(\mu)=\{\lambda(\mu),\overline{\lambda(\mu)}\}$ 各々が重複度1の固有値である場合は $B=\mathbb{R}^2$ として考えればよい。

flow の場合も同様に二次元の問題に帰着することができる。

§2 Hopf bifurcation theorem for flows

(2.1) Hopf theorem

X^{μ}: C^k vector field on $\mathbb{R}^2$ (μ に関しても C^k) に対し

(i) $X^{\mu}(0)=0$

(ii) $dX^{\mu}(0)$ は複素共役な固有値 $\lambda(\mu),\overline{\lambda(\mu)}$ をもち ($\lambda(\mu)\neq\overline{\lambda(\mu)}$)

$\mu \gtreqless 0$ に従って $\mathrm{Re}\,\lambda(\mu) \gtreqless 0$

さらに $\frac{d}{d\mu}\mathrm{Re}\,\lambda(\mu)\big|_{\mu=0} > 0$ を仮定する。

このとき，$X=(X^{\mu},0)$ vector field on $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ に関して次が成立する。

(a) 0の近傍で C^{k-2} 函数 $\tilde{\mu}$ が存在して，$\tilde{\mu}(0)=0$ かつ $(x,0,\tilde{\mu}(x))$ は X の closed orbit の上にある。さらに $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ の原点の適当な近傍に含まれる closed orbit はこの 1 parameter family でつくされる。

(b) もし，$(0,0)$ が X^0 に関して "vague attractor"（定義後述）であれば，$x\neq 0$ に対して $\tilde{\mu}(x)>0$，また(a)で与えられる closed orbit は attracting。

以下，(2.2)〜(2.5) でこの定理の証明を与える。

(2.2) $dX^{\mu}(0)$ の標準化

$dX^{\mu}(0)$ の固有値が $\lambda(\mu),\overline{\lambda(\mu)}$ であるから，$\mathbb{R}^2$ の座標を変換して，（変換は μ-dependent で μ に関して C^{k-1}）

$$dX^{\mu}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\lambda(\mu), & -\mathrm{Im}\,\lambda(\mu)\\ \mathrm{Im}\,\lambda(\mu), & \mathrm{Re}\,\lambda(\mu)\end{pmatrix} \text{--------} (2.2.1)$$

とできる。特に $\lambda(\mu)$ は $\mathrm{Im}\,\lambda(\mu)>0$ にとっておく。

ここで(2.2.1)は $SO(2)$ conjugate で不変であるから，座標軸の片方は変換で不変としてよい。以後この座標を用いる。

(2.3) Microscope lemma

X : C^k vector field on $\mathbb{R}^2$, $X(0)=0$

$P: \mathbb{R}\times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $P(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

このとき $\mathbb{R}\times S^1$ 上の C^{k-1} vector field $\tilde{X}$ で X と P-related となるものが存在する。

~~proof~~ $X = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ とおくとき (x_1, x_2 は $\mathbb{R}^2$ の座標)
$\tilde{X} = \tilde{X}_r\frac{\partial}{\partial r} + \tilde{X}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}$ を

$$\begin{cases} \tilde{X}_r = X_1\cos\theta + X_2\sin\theta \\ \tilde{X}_\theta = -\frac{X_1}{r}\sin\theta + \frac{X_2}{r}\cos\theta \end{cases} \quad \text{-------------------- } (2.3.1)$$

で定義すれば, 条件 $X(0)=0$ より $r=0$ のときも well-defined で C^{k-1} class, かつ X と $\tilde{X}$ は P-related となる。/

(2.2) と (2.3) より, $\tilde{X}^\mu$: 1 parameter family of vector fields on $\mathbb{R}\times S^1$ が得られたが, (2.2) で μ 方向の, (2.3) で $\mathbb{R}^2$ 方向の微分可能性が各々1つずつ落ちるだけだから, これは C^{k-1} class。

(2.4) Poincaré map

(2.2.1), (2.3.1) によって

$$\begin{cases} \tilde{X}^\mu_r(r,\theta) = (\mathrm{Re}\lambda)r + O(r^2) \\ \tilde{X}^\mu_\theta(r,\theta) = \mathrm{Im}\lambda + O(r) \end{cases} \quad \text{---------------- } (2.4.1)$$

r が充分小さければ, $\tilde{X}^\mu_\theta > 0$ であるから, $\mathbb{R}\times S^1$ に於て $\tilde{X}^\mu$ は $\mathbb{R}$ 方向に transversal。よって $\mathbb{R}\times 0$ に関する Poincaré map が考

えられる。これを、定義域は適当に考えて、$\Pi^\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

もしくは　$\Pi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$　$\Pi(x,\mu)=\Pi^\mu(x)$　とおこう。

Πに関して次の性質がわかる。

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \Pi(0,\mu)=0 \\ \text{(ii)}\ \left.\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\right|_{x=0} = \exp(2\pi \mathrm{Re}\lambda / \mathrm{Im}\lambda) \end{cases} \quad \text{-------------}(2.4.2)$$

~~proof of (ii)~~　$\Pi(x,\mu) = x + \int_0^{\tau(x,\mu)} \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))\,dt$

ここで $\tilde{\varphi}_t^\mu$ は $\tilde{X}^\mu$ で生成される 1 parameter transformation group。

$\tau(x,\mu)$ は $(x,0)$ の $\tilde{\varphi}_t^\mu$ での $\mathbb{R}\times 0$ への 1st return time。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 1 + \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}^\mu_{\tau(x,\mu)}(x,0))\frac{\partial \tau(x,\mu)}{\partial x} + \int_0^{\tau(x,\mu)} \frac{\partial}{\partial x}\tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))\,dt$$
$$\text{-------}(2.4.3)$$

$$(2.4.1)\text{より}\begin{cases} \tilde{\varphi}_t^\mu(0,0) = (0,(\mathrm{Im}\lambda)t) \\ \tilde{X}_r^\mu(0,\theta)=0 \\ \dfrac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial r}(0,\theta) = \mathrm{Re}\lambda,\ \dfrac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial \theta}(0,\theta)=0 \end{cases} \quad \text{-------}(2.4.4)$$

$x=0$ のとき，(2.4.4)より(2.4.3)の第二項は0。第三項を計算するために

$$\frac{\partial}{\partial t} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0)) = \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x\partial t} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0)) = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))$$
$$= \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0)) + \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\theta(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))$$
$$\text{-------}(2.4.5)$$

(2.4.4)より　$\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))\right|_{x=0} = (\mathrm{Re}\lambda)\left.\dfrac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))\right|_{x=0}$

$\therefore \left.\dfrac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))\right|_{x=0} = \exp((\mathrm{Re}\lambda)t)$

(2.4.5)より　$\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x,0))\right|_{x=0} = (\mathrm{Re}\lambda)\exp((\mathrm{Re}\lambda)t)$

これより(2.4.3)の第三項は，$\tau(0,\mu)=2\pi/\mathrm{Im}\lambda$ であるから

$x=0$ のとき $\int_0^{2\pi/\mathrm{Im}\lambda}(\mathrm{Re}\lambda)\exp((\mathrm{Re}\lambda)t)dt=\exp(2\pi\mathrm{Re}\lambda/\mathrm{Im}\lambda)-1$

$\therefore \left.\frac{\partial\pi}{\partial x}\right|_{x=0}=1+\exp(2\pi\mathrm{Re}\lambda/\mathrm{Im}\lambda)-1+0$ /

$\pi(x,\mu)=x+V(x,\mu)$ とおく。closed orbit は $V(x,\mu)$ の零点と対応しているから，$V(x,\mu)=0$ を解けばよいが，$x=0$ は critical point なので除いて考えたい。そのため，さらに

$\tilde{V}(x,\mu)=\frac{V(x,\mu)}{x}$ とおくとこの函数は C^{k-2} class で，

$\tilde{V}(0,\mu)=\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\pi}{\partial x}\right|_{x=0}-1=\exp(2\pi\mathrm{Re}\lambda(\mu)/\mathrm{Im}\lambda(\mu))-1$

これより $\begin{cases}\tilde{V}(0,0)=0\\ \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\mu}(0,0)=\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\lambda(0)}\left.\frac{d}{d\mu}\mathrm{Re}\lambda(\mu)\right|_{\mu=0}>0\end{cases}$

よって陰函数定理を用いることにより，$\tilde{\mu}$: C^{k-2} 函数が 0 の近傍で存在して，$\tilde{\mu}(0)=0$，$\tilde{V}(x,\tilde{\mu}(x))=0$ を満足する。さらに原点の適当な近傍に含まれる closed orbit は Poincaré map π の固定点として得られるものでつくされることも明らか。

以上の結果を直交座標に戻して，定理の(a)が証明された。

(2.5) Vague attractor

(2.4)で得られた $\pi,\tilde{\mu}$ に関して次が成立する。

$$\begin{cases}\text{(i) } \tilde{\mu}'(0)=0\\ \text{(ii) } \frac{\partial\pi}{\partial x}(0,0)=1\\ \text{(iii) } \frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}(0,0)=0\end{cases} \qquad \text{-----------------} (2.5.1)$$

~~proof~~ (i) Πの構成より $\tilde{\mu}(x)=\text{constant}$ であるようなxは正と負にpairで現われるからRolleの定理より。

(ii) (2.4.2)より。

(iii) $\Pi(x,\tilde{\mu}(x))=x$ をxに関して二回微分して

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial\mu}\tilde{\mu}'+\frac{\partial^2\Pi}{\partial\mu^2}(\tilde{\mu}')^2+\frac{\partial\Pi}{\partial\mu}\tilde{\mu}''=0$$

$\frac{\partial\Pi}{\partial\mu}=\frac{\partial}{\partial\mu}(x\tilde{V}+x)=x\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\mu}$ であるから，上の式に $x=0$ を代入して(iii)を得る。/

<u>Definition</u> $\left.\frac{d^3\Pi^0}{dx^3}\right|_{x=0}=\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}(0,0)<0$ であるとき，$(0,0)$ はX^0のvague attractorであると呼ぶ。

この仮定の下で定理の(b)を証明しよう。

まず$x\neq 0$のとき $\tilde{\mu}(x)>0$ を言うためには，$\tilde{\mu}(0)=\tilde{\mu}'(0)=0$ であるから $\tilde{\mu}''(0)>0$ を示せば充分である。

$\Pi(x,\tilde{\mu}(x))=x$ をxで三回微分して $x=0$ を代入すれば

$$\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}(0,0)+3\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial\mu}(0,0)\tilde{\mu}''(0)=0 \quad \text{-----------------} (2.5.2)$$

$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial\mu}(0,0)=\frac{\partial V}{\partial\mu}(0,0)>0$ であったから証明された。

次にclosed orbitがattractingを言うには，Poincaré mapの微分の絶対値が1以下であることを示せばよい。

$f(x)=\frac{\partial\Pi}{\partial x}(x,\tilde{\mu}(x))$ とおく。

(2.5.1)より $f(x)>0$ for x near 0 。

また, $f'(0)=\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}(0,0)+\frac{\partial^2\pi}{\partial x\partial\mu}(0,0)\tilde{\mu}'(0)=0$.

$$f''(0)=\frac{\partial^3\pi}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3\pi}{\partial x^2\partial\mu}\tilde{\mu}'+\frac{\partial^3\pi}{\partial x\partial\mu^2}(\tilde{\mu}')^2+\frac{\partial^2\pi}{\partial x\partial\mu}\tilde{\mu}''\Big|_{x=\mu=0}$$

$$=\frac{\partial^3\pi}{\partial x^3}(0,0)-\frac{1}{3}\frac{\partial^3\pi}{\partial x^3}(0,0)<0 \qquad \text{((2.5.2)を用いた)}$$

よって $x\neq 0$, near 0 ならば $f(x)<f(0)=1$ /

以上で定理(2.1)はすべて証明された。

(2.6) Criterion for vague attractor

定理(2.1)に於ては$\frac{d^3\pi}{dx^3}(0)$の値が重要な役割を果たすので, この値を直交座標表示のまま知ることができれば便利である。これに関して Marsden-MaCraken による次の結果がある。

(x_1, x_2) を $\mathbb{R}^2$の座標

$X=X_1\frac{\partial}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ vector field on $\mathbb{R}^2$, $X(0)=0$.

座標 x_1, x_2 に関して $dX(0)=\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -\lambda & 0\end{pmatrix}$ ここで λは実数。

このとき

$$\frac{d^3\pi}{dx^3}(0)=\frac{3\pi}{4|\lambda|}\left\{\frac{\partial^3X_1}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3X_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3X_2}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3X_2}{\partial x_2^3}\right\}$$
$$+\frac{3\pi}{4|\lambda|^2}\left\{-\frac{\partial^2X_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2X_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2X_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2X_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2X_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2X_2}{\partial x_1\partial x_2}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2X_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2X_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2X_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2X_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2X_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2X_2}{\partial x_2^2}\right\}$$

ただし, 右辺は$x_1=x_2=0$での値である。

§3 Hopf bifurcation theorem for diffeomorphisms

(3.1) 1 parameter family of diffeomorphisms

§2に対応して次のような family を考える。

$\varphi^\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^k family of diffeomorphisms

条件 (i) $\varphi^\mu(0)=0$

(ii) $d\varphi^\mu(0)$の固有値は複素共役な $\lambda(\mu)$ と $\overline{\lambda(\mu)}$ で

($\lambda(\mu) \neq \overline{\lambda(\mu)}$, i.e. $\mathrm{Im}\,\lambda(\mu) \neq 0$)

$|\lambda(\mu)| = 1+\mu$

§2と同様，極座標を用いるのが便利であるが，それに関して次のような lemma がある。

(3.2) Normal form lemma

φ^μ は (i),(ii) を満足し，かつ $k \geq 5$, $\lambda(0)^m \neq 1$ for $m=1,\cdots,5$ とするとき，μ に関しては C^{k-1} である smooth な座標変換が存在して，φ^μ は新座標では次で表わされる。

$$\varphi^\mu(x,y) = N\varphi^\mu(x,y) + O(r^5) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

ここで $N\varphi^\mu$ は新座標に対する極座標により次で与えられる。

$$N\varphi^\mu(r,\theta) = ((1+\mu)r - f_1(\mu)r^3,\ \theta + f_2(\mu) + f_3(\mu)r^2)$$

(3.3) Hopf theorem for diffeomorphisms

$\Phi^\mu : \mathbb{R}\times S^1 \to \mathbb{R}\times S^1$ 1 parameter family of C^5 diffeomorphisms

(parameter μ に関しては C^5 連続)

$$\Phi^\mu(r,\theta)=N\Phi^\mu(r,\theta)+(O(r^5),O(r^4)) \quad \text{----------} (3.3.1)$$

($N\Phi^\mu$ は (3.2) に与えたもの)

さらに $f_1(0)>0$ を仮定する。

このとき $\varepsilon>0$ が存在し, $0<\mu<\varepsilon$ に対する curve の連続な 1 parameter family C_μ がとれ, C_μ は Φ^μ-invariant でかつ attracting。

($f_1(0)>0$ は flow の場合の "vague attractor" の条件に対応)

以下 (3.4) ~ (3.6) でこの定理の証明を与える。

(3.4) Change of coordinates

まず, $N\Phi^\mu$ で不変な curve は, $(1+\mu)r-f_1(\mu)r^3=r$ を解いて $r^2=\frac{\mu}{f_1(\mu)}$ と求まる。($f_1(\mu)>0$ for μ near 0)

Φ^μ は $N\Phi^\mu$ の perturbation であるから, この curve の近くに invariant curve が存在すると期待される。これをみつけやすいように座標を変換しよう。

$$r=\sqrt{\frac{\mu}{f_1(\mu)}}(\sqrt{\mu}z+1) \quad \text{for } \mu>0 \quad とおく。$$

以後 z-θ 座標を用いて話を進める。

$\Phi^\mu(z,\theta)$ の z,θ 座標をそれぞれ Φ_1^μ, Φ_2^μ とすれば.

$$\Phi_1^\mu(z,\theta)=(1-2\mu)z-\mu^{\frac{3}{2}}(3z^2+\mu^{\frac{1}{2}}z^3)$$
$$+\mu^{\frac{3}{2}}\frac{1}{f_1(\mu)^2}g_1^\mu\left(\sqrt{\frac{\mu}{f_1(\mu)}}(\sqrt{\mu}z+1),\theta\right)(\sqrt{\mu}z+1)^5$$

$$\Phi_1^\mu(z,\theta)=(1-2\mu)z+\mu^{\frac{3}{2}}H^\mu(z,\theta) \qquad (3.4.1)$$

g_1^μ は (3.3.1) の剰余項。
$H^\mu(z,\theta)$ はこの式で定義する。
次の g_2^μ, K^μ も同様である。

$$\Phi_2^\mu(z,\theta)=\theta+f_2(\mu)+\mu\frac{f_3(\mu)}{f_1(\mu)}(\sqrt{\mu}z+1)^2 + \frac{\mu^2}{f_1(\mu)^2}g_2^\mu\left(\sqrt{\frac{\mu}{f_1(\mu)}}(\sqrt{\mu}z+1),\theta\right)(\sqrt{\mu}z+1)^4$$
$$=\theta+f(\mu)+\mu^{\frac{3}{2}}K^\mu(z,\theta) \qquad (3.4.2)$$

このとき, H^μ, K^μ は C^5 class であって μ に関しては C^5 連続。

$$C(\mu)=\sup_{\substack{\theta\in S^1\\ -1\le z\le 1}}\max\left\{|H^\mu|,|K^\mu|,\left|\frac{\partial H^\mu}{\partial z}\right|,\left|\frac{\partial K^\mu}{\partial z}\right|,\left|\frac{\partial H^\mu}{\partial\theta}\right|,\left|\frac{\partial K^\mu}{\partial\theta}\right|\right\}$$

とおくと $\mu\to 0$ のとき $C(\mu)$ は有界。よって μ が充分小さいとき, $C(\mu)\le C$: constant とおく。 (3.4.3)

(3.5) Graph transformation

$N\Phi^\mu$ の不変な curve は新座標で $z=0$ であることに注意して、graph-transformation の方法により, この近くで Φ^μ 不変な curve を捜す。

$$G=\left\{u:S^1\to\mathbb{R};\ \begin{array}{l}|u(\theta)|\le 1\\ u \text{ は Lipschitz 定数 1 以下の Lipschitz 函数}\end{array}\right\}$$

とおくとき, G は supremum norm によって完備距離空間。

$\mathcal{F}^\mu:G\to G$ を Φ^μ による graph-transformation で定義する。即ち, $\mathcal{F}^\mu$ は $u\in G$ に対して "$\Phi^\mu\{z=u(\theta)\}$ をグラフとする

S^1から$\mathbb{R}$への函数"を対応させる写像である。明らかに$\mathcal{F}^\mu$の固定点はΦ^μの不変なcurveを与えている。

<u>Assertion</u> μが充分小さければ，$\mathcal{F}^\mu$はwell-definedでかつcontraction。

もしこの主張が正しければ，$\mathcal{F}^\mu$がμに関し連続な写像であることよりinvariant curveの連続な1 parameter familyが得られ，さらに$\mathcal{F}^\mu$がcontractionであることからこれらのcurveのattractingたる性質も従う。即ち(3.3)が証明されたこととなる。

<u>(3.6) Proof of Assertion</u>

$u \in G$をとる。（以下suffix μは落とす。）

<u>Step 1</u> $\mathcal{F}u$がS^1から$\mathbb{R}$への函数を与えていること。

θに対して$\tilde{\theta}$を　$\Phi_2(u(\tilde{\theta}),\tilde{\theta})=\theta$ ---------- (3.6.1)

の解と定める。この解の一意性を言えばよい。

(3.6.1)によって　$\tilde{\theta}_1 \longmapsto \theta_1$, $\tilde{\theta}_2 \longmapsto \theta_2$　とすると

$$|\theta_1-\theta_2| = |\Phi_2(u(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)-\Phi_2(u(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)|$$

$$\underset{(3.4.2)}{\geq} |\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2| - \mu^{\frac{3}{2}}|K(u(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)-K(u(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)|$$

$$\underset{(3.4.3)}{\geq} (1-2\mu^{\frac{3}{2}}C)|\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2| \text{ -------------- } (3.6.2)$$

μが充分小であれば，Step 1の結論は正しい。また，このとき$\mathcal{F}u$は $\mathcal{F}u(\theta)=\Phi_1(u(\tilde{\theta}),\tilde{\theta})$ で与えられる。

Step 2　$\mathcal{F}u\in G$

まず，
$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}u(\theta)| &= |\Phi_1(u(\tilde{\theta}),\tilde{\theta})| \\
(3.4.1)\quad &= |(1-2\mu)u(\tilde{\theta})+\mu^{\frac{3}{2}}H(u(\tilde{\theta}),\tilde{\theta})| \\
(3.4.3)\quad &\leq 1-2\mu+C\mu^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

次に(3.6.1)により $\theta_1\mapsto\tilde{\theta}_1$，$\theta_2\mapsto\tilde{\theta}_2$ とすると
$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}u(\theta_1)-\mathcal{F}u(\theta_2)| &= |\Phi_1(u(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)-\Phi_1(u(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)| \\
(3.4.1)\quad &\leq (1-2\mu)|u(\tilde{\theta}_1)-u(\tilde{\theta}_2)|+\mu^{\frac{3}{2}}|H(u(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)-H(u(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)| \\
(3.4.3)\quad &\leq (1-2\mu+2C\mu^{\frac{3}{2}})|\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2| \\
(3.6.2)\quad &\leq (1-2\mu+2C\mu^{\frac{3}{2}})(1-2C\mu^{\frac{3}{2}})^{-1}|\theta_1-\theta_2|
\end{aligned}
$$

これよりμが充分小さければ，$\mathcal{F}u$は$|\mathcal{F}u|\leq 1$でかつLipschitz定数1以下のLipschitz函数となることがわかる。

Step 3　$\mathcal{F}$はcontraction。

$u_1,u_2\in G$，$\theta\in S^1$に対して$\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2$を次の解とする。
$$\theta=\Phi_2(u_1(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)=\tilde{\theta}_1+f(\mu)+\mu^{\frac{3}{2}}K(u_1(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)$$
$$\theta=\Phi_2(u_2(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)=\tilde{\theta}_2+f(\mu)+\mu^{\frac{3}{2}}K(u_2(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)$$

このとき
$$
\begin{aligned}
|\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2| &= \mu^{\frac{3}{2}}|K(u_1(\tilde{\theta}_1),\tilde{\theta}_1)-K(u_2(\tilde{\theta}_2),\tilde{\theta}_2)| \\
(3.4.3)\quad &\leq C\mu^{\frac{3}{2}}(|u_1(\tilde{\theta}_1)-u_2(\tilde{\theta}_2)|+|\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2|)
\end{aligned}
$$

ここで $|u_1(\hat{\theta}_1)-u_2(\hat{\theta}_2)| \le \|u_1-u_2\| + |\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2|$ ------- (3.6.3)

（$\|.\|$ は G での supremum norm）

よって $|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2| \le C\mu^{\frac{3}{2}}(1-2C\mu^{\frac{3}{2}})^{-1}\|u_1-u_2\|$ ---------- (3.6.4)

これより $|\mathcal{F}u_1(\theta)-\mathcal{F}u_2(\theta)| = |\Phi_1(u_1(\hat{\theta}_1),\hat{\theta}_1)-\Phi_1(u_2(\hat{\theta}_2),\hat{\theta}_2)|$

(3.4.1) $\le (1-2\mu)|u_1(\hat{\theta}_1)-u_2(\hat{\theta}_2)| + \mu^{\frac{3}{2}}|H(u_1(\hat{\theta}_1),\hat{\theta}_1)-H(u_2(\hat{\theta}_2),\hat{\theta}_2)|$

(3.6.3) $\le (1-2\mu)(\|u_1-u_2\|+|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2|) + C\mu^{\frac{3}{2}}(\|u_1-u_2\|+2|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2|)$

(3.6.4) $\le \{(1-2\mu+C\mu^{\frac{3}{2}}) + (1-2\mu+2C\mu^{\frac{3}{2}})C\mu^{\frac{3}{2}}(1-2C\mu^{\frac{3}{2}})^{-1}\}\|u_1-u_2\|$

これは μ が充分小さいとき $\mathcal{F}$ が contraction であることを示している。／

以上で定理(3.3)の証明が終った。

References

D. Ruelle – F. Takens "On the Nature of Turbulence"
Comm. Math. Phys. 20 ('71) pp 167–192, 23 ('71) pp 343–344

J. E. Marsden – M. McCracken "The Hopf Bifurcation and its Applications" Springer-Verlag ('76)