数理解析研究所講究録
第313巻 1977年 137-147



# 双曲型不変集合のマルコフ分割

北大 理学部 倉田雅弘

## §1. 序

$f: M \longrightarrow M$ を微分同相, $\Lambda \subset M$ を $f$ の双曲型不変集合とすると, $\Lambda$ の拡張である双曲型不変集合 $\Lambda'$ があって、それは有型型 subshift の商になっている([5])。

ここでは, 上の $\Lambda'$ と有限型 subshift $\Sigma$ を適当にとると, $\Sigma$ は $\Lambda'$ のマルコフ分割から作られるようにできることを示そう。これは, Anosov 微分同型に対しては Sinai が、Axiom A 微分同型の非遊走点集合に対しては Bowen が証明している([1])。

<u>定義</u> $f: M \longrightarrow M$ を微分同相とする。compact $f$-不変集合 $\Lambda \subset M$ が双曲型とは以下をみたすときである。$M$ の接ベクトル・バンドルの $\Lambda$ への制限 $T_\Lambda M$ が,

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u \quad (Tf\text{-不変な subbundle の和})$$

になって、$c > 0$, $0 < \lambda < 1$ があって, $n \geq 0$ に対して

$$v \in E^s \text{のとき} \quad \|Tf^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$$
$$v \in E^u \text{のとき} \quad \|Tf^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|。$$

## §2. 双曲型不変集合の pseudo-orbit

M上の点列 $\{x_n\}_{n=j,\cdots,k}$（$j=-\infty$ 又は $k=+\infty$ でもよい）が $n=j,\cdots k-1$ に対して

$$d(f(x_n),\ x_{n+1}) < \varepsilon$$

を満すとき、$f: M \longrightarrow M$ の $\varepsilon$-pseudo-orbit という。

pseudo-orbit $\{x_n\}_{n=j,\cdots,k}$ に対して $x \in M$ が

$$d(f^n(x),\ x_n) \leq \delta \qquad \text{for } n=j,\cdots,k$$

となるとき、$x$ は $\{x_n\}_{n=j,\cdots,k}$ を $\delta$-shadow するという。次の補題は［5、定理3］から、みちびかれる。Axiom A 微分同相の非遊走点集合に対しては、Bowenが証明した。

<u>補題2．1</u>　$\Lambda$を双曲型不変集合とする。$\delta>0$ に対して、$\varepsilon>0$ があって、$\Lambda$の任意の $\varepsilon$-pseudo-orbit は、ある点 $x \in M$ によって、$\delta$-shadow される。更に $x$ は $d(f^n(x),\Lambda) \leq \delta$ となるようにとれる。

<u>注</u>　Frank-Selgrade は、$\{x_n\}$を shadow する点 $x$ は、$x \in W^s_{loc}(\Lambda) \cap W^u_{loc}(\Lambda)$ となると主張しているが、これは誤りである。

<u>系2．2</u>　$\delta>0$ に対して、$\varepsilon>0$ と$\Lambda$の近傍Wがあって

以下をみたす。$x \in W$が

$$d(f^n(x),\ x) < \varepsilon$$
$$f^k(x) \in W \qquad \text{for } k = 1, \cdots, n$$

ならば、周期$n$の周期点$p \in W$があって

$$d(f^k(x), f^k(p)) \leq \delta \qquad \text{for } k = 1, \cdots, n$$

となる。

§3、双曲型不変集合のマルコフ分割

$\Lambda$を微分同相$f: M \longrightarrow M$の双曲型不変集合、$\varepsilon > 0$を十分小さいものとする。

定義　$R \subset \Lambda$の直径が$\varepsilon$より小さく、$x, y \in R$ならば $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \neq \phi$, $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \in R$ となるとき矩形という。更に、$R = \overline{\mathrm{int}\, R}$ となるとき、矩形$R$はproperという。ただし、$\mathrm{int}\, R$は、$R$の$\Lambda$におけるinterior, $\overline{\mathrm{int}\, R}$は、$\mathrm{int}\, R$の閉包。

定義　$\Lambda$の有限被覆$\mathcal{R}$は、次をみたすとき、$\Lambda$のマルコフ分割という。

(1) $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_n\}$，各$R_i$は$\Lambda$でのproperな矩形。

(2) $R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j$ $(i \neq j)$。ただし、$\partial R_i = R_i - \mathrm{int}\, R_i$。

(3) $x \in \mathrm{int}\, R_i \cap \mathrm{int}\, f^{-1} R_j$ のとき、$f W^s(x, R_i) \subset W^s(fx, R_j)$,

$f^{-1}W^u(fx, R_j) \subset W^u(x, R_i)$。ただし $W^s(x, R_i) = W^s_\varepsilon(x) \cap R_i$。

定理3.1　$\Lambda$を微分同相$f: M \longrightarrow M$の双曲型不変集合, $U$を$\Lambda$の近傍とする。双曲型不変集合$\Lambda'$で　$\Lambda \subset \Lambda' \subset U$となるものがあって、$\Lambda'$はマルコフ分割をもつ。

証明

$\delta > 0$を十分小さくとる。補題2.1から$\varepsilon > 0$があって、$\Lambda$の$\varepsilon$-pseudo-orbitは、ある$x \in M$で　$\delta$-shadowされる。更に$f^n(x) \in U$　$(n \in \mathbb{Z})$となる。$\gamma > 0$を

$$\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x, y \in U,\ d(x, y) < \gamma \implies d(fx, fy) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように選ぶ。$P = \{p_1, \cdots, p_r\}$を$\Lambda$の$\gamma$-denseな有限集合とする。

$$\Sigma(P) = \{(q_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in P^{\mathbb{Z}} \mid d(f(q_i), q_{i+1}) < \varepsilon \text{ for } i \in \mathbb{Z}\}$$

は有限型subshiftになる。写像

$$\Theta : \Sigma(P) \longrightarrow U$$

を、$\Theta((q_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = x$, $x$は$(q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$を$\delta$-shadowする点、で定義する。

$$\Lambda' = \Theta(\Sigma(P))$$

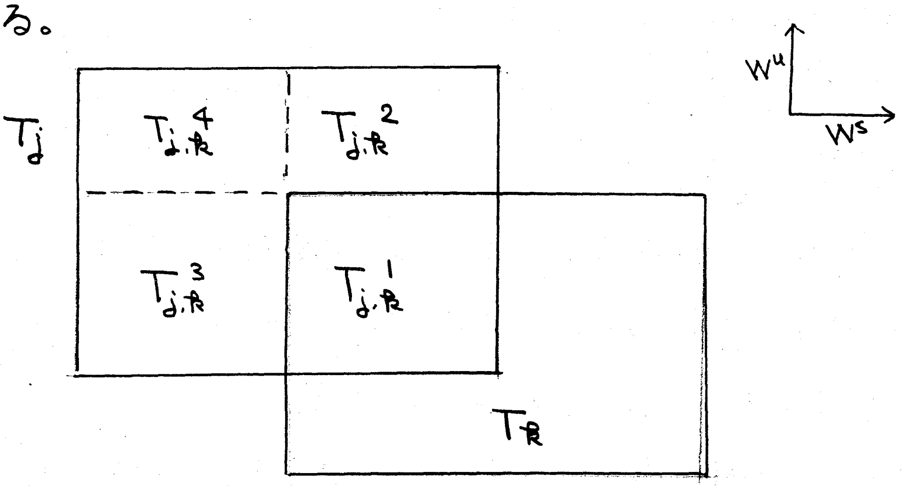
とすると、$\Lambda \subset \Lambda' \subset U$で、$\varepsilon$が十分小さいとき、$\Lambda'$は双曲型不変集合である。

$$T_s = \{\Theta((q_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \mid (q_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma(P),\ q_0 = p_s\}$$

とすると、$T_s$は矩形で、$\{T_s\}_{s=1,\cdots,r}$ は$\Lambda'$の被覆となる。

$$T_{j,k}^1 = T_j \cap T_k$$
$$T_{j,k}^2 = \{x \in T_j \mid W^u(x, T_j) \cap T_k \neq \phi,\ W^s(x, T_j) \cap T_k = \phi\}$$
$$T_{j,k}^3 = \{x \in T_j \mid W^u(x, T_j) \cap T_k = \phi,\ W^s(x, T_j) \cap T_k \neq \phi\}$$
$$T_{j,k}^4 = \{x \in T_j \mid W^u(x, T_j) \cap T_k = \phi,\ W^s(x, T_j) \cap T_k = \phi\}$$

とする。




$$R(x) = \cap \{T_{j,k}^n \mid x \in T_j,\ T_k \cap T_j \neq \phi,\ x \in T_{j,k}^n\}$$
$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\mathrm{int}\, R(x)\} = \{R_1, \cdots, R_m\}$$

ただし $R_i \neq \phi$ とする。$\Lambda'$は、Axiom A 微分同相の basic set の場合と違って、local product structure をもたないので、$\mathrm{int}\, T_j$、$\mathrm{int}\, T_{j,k}^n$は開矩形にはならない。しかし、後にのべる補題3.2 ～3.4によって、$R_i$は開矩形になる。$R_i$は、いずれらの$T_j$に含まれているので、$\overline{R_i}$は矩形である。従って、Bowen [4, p78-83] と同様にして、

$$\mathcal{R} = \{\overline{R_1}, \cdots, \overline{R_m}\}$$

は$\Lambda'$のマルコフ分割となる。

<u>補題3.2</u>　$x \in T_i$, $y \in W^s(x, T_i)$, $x \in \mathrm{int}\, W^u(x, T_i)$, $y \notin \mathrm{int}\, W^u(x, T_i)$ ならば、$T_j$が存在して、$x \in T_j$, $y \notin T_j$ となる。ここで $\mathrm{int}\, W^u(x, T_i)$ は、$W^u_\varepsilon(x) \cap \Lambda'$ の部分集合としての interior。

<u>補題3.3</u>　(1). $\partial T_j \ni z \Longleftrightarrow z \notin \mathrm{int}\, W^s(z, T_j)$ 又は、$z \notin \mathrm{int}\, W^u(z, T_j)$。

(2). $\partial R(x) \ni y \Longleftrightarrow y \notin \mathrm{int}\, W^s(y, R(x))$ 又は、$y \notin \mathrm{int}\, W^u(y, R(x))$。

ただし、$\mathrm{int}\, W^u(y, R(x))$ は、$W^u_\varepsilon(y) \cap \Lambda'$での interior。

<u>補題3.4</u> (1) $z \in \partial R_i$, $z \notin \mathrm{int}\, W^s(z, R_i)$

$\Longrightarrow$ 任意の $y \in W^u(z, R_i)$ に対して、$y \notin \mathrm{int}\, W^s(z, R_i)$。

(2). $z \in \partial R_i$, $z \notin \mathrm{int}\, W^u(z, R_i)$

$\Longrightarrow$ 任意の $y \in W^s(z, R_i)$ に対して、$y \notin \mathrm{int}\, W^u(z, R_i)$。

## §4. 有限型subshiftの構成とその応用

$\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_n\}$ を双曲型不変集合$\Lambda$のマルコフ分割とすると、以下のように有限型subshift $\Sigma$ とsemi-conjugacy $\pi : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ （即ち、$\pi$は上への写像で、$f\pi = \pi\rho$, $\rho$は shift map ）が構成できる。

$n \times n$ 0-1 行列 $T = (t_{ij})$ を

$\mathrm{int}\, R_i \cap \mathrm{int}\, f^{-1} R_j \neq \phi$ のとき　　$t_{ij} = 1$
他のとき　　$t_{ij} = 0$

とする。

$\Sigma = \{(a_i)_{i\in Z} \in \mathcal{R}^Z \mid t_{n_i n_{i+1}} = 1$ ただし $a_i = R_{n_i}\}$,
$\mathcal{R}$, $\mathbb{Z}$ の位相を離散位相として、$\mathcal{R}^Z$ の位相は compact-open 位相とする。shift map $\rho : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ は、$\rho((a_i)_{i\in Z}) = (a_i')_{i\in Z}$ ただし $a_i' = a_{i+1}$ で定義する。semi-conjugacy $\pi : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ は、$\pi((a_i)_{i\in Z}) = \bigcap_{i\in Z} f^{-i}(a_i)$ で与えられる。

<u>定理4.1</u>　双曲型集合 $\Lambda$ と、その近傍 $U$ に対して、双曲型不変集合 $\Lambda'$、有限型 subshift $\Sigma$ と写像 $\pi : \Sigma \longrightarrow \Lambda'$ があって、以下をみたす。

(1) $\pi$ は semi-conjugacy 即ち、$\pi$ は $\Lambda'$ の上への写像で $f\pi = \pi\rho$。

(2) $\pi$ は finite-to-one, 即ち、$N > 0$ があって、全ての $x \in \Lambda'$ に対して、$\# \pi^{-1}(x) \leq N$。

証明

(1) は、定理3.1と、上に書いたことからでてくる。(2) は、$\Lambda'$ がマルコフ分割をもつことから、[2] より、みちびかれる。

<u>定義</u>　$A \subset M$ が minimal set
$\Longleftrightarrow$ (1) $A$ は $f$-不変な閉集合で、$A \neq \phi$、　(2) $B \subset A$ が

$f$-不変な閉集合で $B \neq \phi$ ならば $B = \Lambda$。

定理3.1と[2]から

系4.2　$\Lambda$ が双曲型不変集合で minimal set $\Rightarrow \dim \Lambda = 0$。

定義　$f$ の zeta 函数 $\zeta_f$ は以下で与えられる formal power series である。

$$\zeta_f(z) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} z^m\right).$$

ここで、$N_m$ は $f$ の周期 $m$ の周期点の個数とする。

定理4.1と[8]から、

系4.3　$\Lambda$ を双曲型不変集合、$U$ をその近傍とすると、双曲型不変集合 $\Lambda'$ で、$\Lambda \subset \Lambda' \subset U$, $\zeta_{f|\Lambda'}$ は有理函数となるものがある。

§5　flow の場合

$f_t : M \longrightarrow M$ を $C^r$-flow $(r \geq 1)$ とする。以下 $\Lambda \subset M$ は $f_t$ の不動点を含まないものとする。

定義　$\Lambda$ は以下をみたすとき、flow $f_t$ の双曲型不変集合という。

(1) $\Lambda$ は $f_t$-不変な compact 集合で

(2) $T_1M$ は $Tf_t$-不変な subbundle の和

$$T_1M = E^s \oplus E^u \oplus E^1$$

になっており、$c>0$, $0<\lambda<1$ があって、$t \geq 0$ に対し

$$v \in E^s \text{ のとき } \quad \|Tf_t v\| \leq c\lambda^t \|v\|$$

$$v \in E^u \text{ のとき } \quad \|Tf_{-t} v\| \leq c\lambda^t \|v\|,$$

(3) $E^1$ は flow 方向の一次元 subbundle。

flow の双曲型不変集合も、適当に拡張すると、有限型 subshift の suspension の商になる。$\Sigma$ を有限型 subshift,

$$\varphi : \Sigma \longrightarrow (0, \infty)$$

を連続写像とする。

$$Y = \{ (a, t) \in \Sigma \times R \mid 0 \leq t \leq \varphi(a) \}$$

とし、

$$\Sigma(\rho, \varphi) = Y / \sim,$$

ただし、$(a, \varphi(a)) = (\rho(a), 0)$ とする。$\Sigma(\rho, \varphi)$ には、suspension flow

$$sus_t = sus_t(\rho, \varphi) : \Sigma(\rho, \varphi) \longrightarrow \Sigma(\rho, \varphi)$$

が、$t \geq 0$ に対し、

$$sus_t([a, s]) = [\rho^k(a), v]$$

ただし、

$$v = t + s - \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(\rho^j(a))$$

$$0 \leq v \leq f(\rho^{k}(a)),$$

で定義される。$t \leq 0$ に対しても同様。

<u>定義</u> $\Sigma$ を有限型 subshift, $\varphi : \Sigma \longrightarrow (0, \infty)$ を Lipschitz 写像とする。このとき

$$sus_t(\rho, \varphi) : \Sigma(\rho, \varphi) \longrightarrow \Sigma(\rho, \varphi)$$

を双曲型 symbolic flow という。

次は Bowen [3] の拡張である。微分同相の場合と同様に、マルコフ分割のようなものを構成し、それから双曲型 symbolic flow を作る。

<u>定理4.1([7])</u> $\Lambda$ を flow $f_t$ の双曲型不変集合で、不動点を含まないものとする。$U$ を $\Lambda$ の近傍とすると、双曲型不変集合 $\Lambda'$ で、$\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ となるものと、双曲型 symbolic flow $sus_t : \Sigma(\rho, \varphi) \longrightarrow \Sigma(\rho, \varphi)$, 写像 $\pi : \Sigma(\rho, \varphi) \rightarrow \Lambda'$ があって、以下をみたす。

(1) $\pi$ は semi-conjugate 即ち、$\pi$ は $\Lambda'$ の上への写像で、$f_t \circ \pi = \pi \circ sus_t$。

(2). $\pi$ は、finite-to-one 。

<u>系4.2</u> flow の双曲型不変集合 $\Lambda$ が minimal set のとき、$\dim \Lambda = 1$。

## References

[1] R. Bowen, Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math., 92 (1970), 725-745.

[2] ———, Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math., 92 (1970), 907-918.

[3] ———, Symbolic dynamics for hyperbolic flows, Amer. J. Math., 95 (1973), 429-460.

[4] ———, "Equilibium States and Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms," Lecture notes in Math., 470, Springer.

[5] M. Kurata, Hartman's theorem for hyperbolic sets, Nagoya Math. J., 69 (1977).

[6] ———, Markov partitions of hyperbolic sets,

[7] ———, in preparation

[8]. A. Manning, Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc., 3 (1971), 215-220.