数理解析研究所講究録
第314巻 1977年 1-12

ファクターの内部自己同型写像の接合積への拡張

大阪教育大　長田まりゑ

$\mathcal{A}$ を von Neumann algebra, G を discrete countable group, α を G から $\mathcal{A}$ の automorphism group への表現とし, $\mathcal{A}$ の G による α に関する接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ を $\mathcal{M}$ で表わすことにする。$\mathcal{A}$ の automorphism の拡張となっている $\mathcal{M}$ の automorphism 全体のなす群を $Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ で, $\mathcal{A}$ の automorphism の拡張となっている $\mathcal{M}$ の inner automorphism 全体のなす群を $Int(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ で表わす. $Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の研究は, まず, Singer によって, group measure space construction による finite factor $\mathcal{M}$ に対してなされた([13]). G を $\mathcal{A}$ の freely acting automorphism のなす群としたとき, $Int(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の要素の構造に関する, いくつかの結果は [2], [3], [9], [11] で得られ, [1] に於て, $Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の Singer の結果の拡張がこころみられている。又 $Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の要素と G の 2-cocycle との関係が, von Neumann algebra の群による接合積の一般化を考えることにより, [7], [12], [4]

[16] 等で得られている。

ここでは、$\mathcal{A}$ はファクターと仮定し、$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ 及び $\mathcal{A}$ までは inner automorphism であるような $\mathcal{M}$ の automorphism 全体のなす群を、群 G との関連のもとで、決定付ける問題について記す。

尚、ここでは話を統一する為に、扱う群 G は discrete countable group とするが註で述べるように、結果のあるものは、G が locally compact group のときも成立する ([6])。又、接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ と共に、接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ (一般化された接合積で定義は下記) も取り扱う。

<u>$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ について.</u>

$\mathcal{A}$ を separable Hilbert space 上の von Neumann algebra とし、$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$、$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$、$\mathrm{Out}(\mathcal{A})$ によって、夫々 $\mathcal{A}$ 上の automorphism, inner automorphism, outer automorphism 全体のなす群を示す。

G を discrete countable group, α を G から $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ への写像で、次の条件 (1) を充すものとする；

$$(1) \qquad \alpha_{gh}^{-1}\alpha_g\alpha_h \in \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \qquad g, h \in G.$$

この (1) の inner automorphism を $i(g, h)$ で記す。G の単位元 1 に対して、α_1 が identity automorphism でないときには、

$\alpha_g \alpha_1^{-1}$ を α_g とおくことにより，α_1 は identity automorphism であると仮定することができる。$\mathcal{A}$ のユニタリの族 $\{v(g,h);\ g, h \in G\}$ が，次の二つの関係式を充たすとき，(G, α) に関する factor set とよぶ；

$$\begin{cases} (2) \quad i(g,h)(x) = \mathrm{Ad}\, v(g,h)(x) = v(g,h)\, x\, v(g,h)^*, & x \in \mathcal{A} \\ (3) \quad v(g,hk)\, v(h,k) = v(gh,k)\, \alpha_k^{-1}(v(g,h)), & g, h, k \in G. \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ の各元 x と，G の各元 g に対し，

$$\begin{cases} (4) \quad (\pi_\alpha(x)\xi)(g) = \alpha_g^{-1}(x)\,\xi(g), & \xi \in l^2(\mathcal{A}, G),\ g \in G \\ (5) \quad (\rho_g \xi)(h) = v(g, g^{-1}h)\,\xi(g^{-1}h) & \xi \in l^2(\mathcal{A}, G),\ h \in G \end{cases}$$

とおくと，π_α は $\mathcal{A}$ の $l^2(\mathcal{A}, G)$ 上への normal representation となり，ρ_g は各 g に対して，ユニタリとなる。又，次の二式

$$\begin{cases} (6) \quad \rho_g \rho_h = \rho_{gh}(\pi_\alpha(v(g,h))), & (g, h \in G) \\ (7) \quad \pi_\alpha(\alpha_g(x)) = \rho_g\, \pi_\alpha(x)\, \rho_g^*, & (x \in \mathcal{A},\ g \in G) \end{cases}$$

が充される。$l^2(\mathcal{A}, G)$ 上の $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ と ρ_G によって生成された von Neumann algebra を $R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ で示す。もし，α が表現で，G の全ての元 g，h に対して，$v(g,h)$ = 恒等作用素となるときは，$R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ は，通常の接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ に他ならない。

$R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ を $\mathcal{M}$ で表わし，

$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M});\ \beta(\pi_\alpha(\mathcal{A})) = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$

$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{\beta \in \mathrm{Int}(\mathcal{M});\ \beta(\pi_\alpha(\mathcal{A})) = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$

とおく。

以下，$\pi_\alpha(v(g,h))$ を改めて，同じ記号 $v(g,h)$ で記す．又 $\mathcal{A}$ の inner automorphism 及び α_g $(g\in G)$ は，そのまゝ自然な形で，$\mathcal{M}$ の automorphism に拡張することができるので，同じ記号 $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$，及び α_g $(g\in G)$ でもって，拡張された $\mathcal{M}$ の automorphism の群及び automorphism を表わすことにする；

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Ad}\,u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})\ ;\ u\in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))\}$$

$$\alpha_g = \mathrm{Ad}\,\rho_g|_{\mathcal{M}} \qquad g\in G,$$

ただし，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ は von Neumann algebra $\mathcal{A}$ のユニタリの群．

$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ 及び α_G は共に $\mathrm{Int}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ の部分集合であるが，それらによって $\mathrm{Int}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ は完全に決定付けることができる。

仮定 (*) $\left(\begin{array}{l}\mathcal{A}\text{ を factor},\ G\text{ を discrete countable group},\\ \alpha\text{ を (1) を充す } G\text{ から } \mathrm{Aut}(\mathcal{A})\text{ への写像}.\end{array}\right.$

仮定 (**) $\left(\begin{array}{l}(*)\text{ と同じ},\ \mathcal{A}, G, \alpha\text{ に対して，単位元を除く全て}\\ \text{の } g\in G\text{ に対して } \alpha_g\in \mathrm{Out}(\mathcal{A}).\end{array}\right.$

$$\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A}) = \{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})\ ;\ u\,\pi_\alpha(\mathcal{A})\,u^* = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$$

とおく．

<u>定理 1</u>．(*) のもとで，$\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ の各要素 u は，

(8) $\qquad u = w w' \rho_g, \qquad w\in\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})),\ w'\in\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})'\cap\mathcal{M}),\ g\in G$

とかける。(**) のもとでは，

(9) $\qquad u = w\rho_g, \qquad w\in\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})),\ g\in G$

と唯一通りにかける。

(証明) [5, Lemma 1] によって, $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元 u の Fourier 展開を $u = \sum_{g \in G} u(g) \rho_g$ ($u(g) \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$) とする。$u$ は $u \pi_\alpha(\mathcal{A}) u^* = \pi_\alpha(\mathcal{A})$ を充すから, 全ての $a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$ に対して,

$$\sum_{g \in G} u(g) \alpha_g(a) \rho_g = \sum_{g \in G} u a u^* u(g) \rho_g$$

を充す。従って $u(g) \alpha_g(a) = u a u^* u(g)$ が全ての $a \in \pi_\alpha(A)$ と $g \in G$ に対して成立つ. $\alpha_g^{-1} \mathrm{Ad}\, u$ が $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ の outer automorphism であれば, $u(g) = 0$ とならなければならない。仮定より u はユニタリであるから, $\alpha_g^{-1} \mathrm{Ad}\, u$ が $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ 上で inner となる $g \in G$ が存在する. w を $\alpha_g^{-1} \mathrm{Ad}\, u = \mathrm{Ad}\, w$ となる $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ のユニタリとし $w' = \rho_g^* u w^*$ とおくと, (8) の関係が得られる. 特に, $\alpha_g \in \mathrm{Out}(\mathcal{A})$ ($g \neq 1$) ならば, [5, Corollary 3] により, $\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ は scalar 全体と同型であるから, (8) より, $u = w \rho_g$ ($w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(A))$, $g \in G$) とかける。もし,

(10) $w_1 \rho_g = w_2 \rho_h$, $w_1, w_2 \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(A))$; $g, h \in G$

ならば,

(11) $w_2^* w_1 = \rho_h \rho_g^* = \rho_{hg^{-1}} v(h, g^{-1}) v(g, g^{-1})$

が成立つ。他方 [4, Theorem 6] により, $\mathcal{M}$ から $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ の上への faithful normal expectation e で $e(\rho_g) = 0$ を単位元を除く G の全の元 g に対して充すものが存在する。従って, もし (10) が $g \neq h$ なる $g, h \in G$ に対して成り立つならば, (11)

により $w_2^* w_1 = 0$ となり矛盾。従って、(9) の分解は唯一通りである。//

<u>系2</u> (*) のもとで、$\mathcal{M}$ の inner automorphism に拡張できる $\mathcal{A}$ の automorphism β は次の形のものに限る。

(12) $\beta = i_\beta \cdot \alpha_g \qquad i_\beta \in Int(\mathcal{A}),\ g \in G.$

集合 $\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})) \times G$ に対して、次の関係 (13) で積を定義すると、この集合は一つの群になる；

(13) $(w_1, g)(w_2, h) = (w_1 \alpha_g(w_2) \alpha_{gh}(v(g,h)),\ gh).$

この群を $\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ の G による extension group といい、$E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ で表わす。

<u>系3</u> (**) のもとで、$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ と同型である。又 $\mathcal{M}$ が通常の接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ ならば、$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ と G の semi-direct product と同型である。

(証) 定理1により、$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元 u は $u = w f_g$, $g \in G$, $w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ と唯一通りにかける。$E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ から $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への写像 σ を $\sigma(w, g) = w f_g$, ($w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$, $g \in G$) で定義すると、σ は $E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ から $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への同型写像となる。//

同様にして，集合 $\mathrm{Int}(\mathcal{A})\times G$ に対して次の関係式(14)で積を定義すると，この集合は群になる；

(14) $\quad (\mathrm{Ad}\,u, g)(\mathrm{Ad}\,w, h) = (\mathrm{Ad}(u\alpha_g(w)\alpha_{gh}(v(g,h))), gh).$

この群を $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ と書き，$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ の G による積(14)のもとでの *extension group* と呼ぶ．

<u>系 4</u> $(**)$ のもとで，$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ と同型であり，$\mathcal{M} = R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ ならば，$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ と G との *semidirect product* である．

(証明) 定理1により，$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元 β は $\mathrm{Ad}\,u\cdot\alpha_g$ とかけ，その分解の仕方は唯一通りである．σ を $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ から $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への写像で $\sigma(\mathrm{Ad}\,u, g) = \mathrm{Ad}(u\rho_g)$，$(u\in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), g\in G)$ なるものとすると，σ は $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ から $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への同型写像となる．//

<u>$\mathcal{A}$ の *inner automorphism group* の拡張全体について</u>

ここでは $\mathcal{A}$ の *inner automorphism* の $\mathcal{M}$ への拡張全体のなす群の構造について記す．

$$K = \{\beta\in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})\,;\ \beta|\pi_\alpha(\mathcal{A}) \text{ is inner on } \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$$

とおく．K は $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ と共に，$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の *normal subgroup* であるが，この群 K を G との関連のもとで決定付ける．

$\mathcal{X}(G)$ を G の character 全体のなす群とする。

<u>補題5</u>　(**) のもとで K の元 β に対して，次の (15) を充す $\chi \in \mathcal{X}(G)$ と $u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ が存在する；

$$(15) \qquad \beta(\rho_g) = \chi(g)\, u\, \rho_g\, u^*, \qquad g \in G.$$

(証明)　$\beta \in K$ より $\beta(a) = u a u^*$ を全ての $a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$ に対して充す $u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ が存在する。各 $g \in G$ に対して，

$$\beta(\rho_g)\, u\, a\, u^*\, \beta(\rho_g)^* = \beta(\rho_g\, a\, \rho_g^*)$$
$$= u\, \rho_g\, a\, \rho_g^*\, u$$

が成立つから，$\rho_g^* u^* \beta(\rho_g) u \in \pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ が成立する。仮定の $\alpha_g \in \mathrm{Out}(\mathcal{A})$ $(g \neq 1)$ より，$\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ はスカラー全体と同型である。$\chi(g) I = \rho_g^* u^* \beta(\rho_g) u$ とおくと関係式 (15) が成立する。G の元 g, h に対して，

$$\chi(gh) I = \rho_{gh}^* u^* \beta(\rho_{gh}) u = \rho_{gh}^* u^* \beta(\rho_g \rho_h v(g,h)^*) u$$
$$= \chi(g)\chi(h) I,$$

より $\chi \in \mathcal{X}(G)$ を得る//

$\mathcal{X}(G)$ の元 χ に対して，

$$(u_\chi \xi)(g) = \overline{\chi(g)}\, \xi(g), \qquad g \in G,\ \xi \in \ell^2(\mathfrak{H}, G)$$

とおくと

$$(16) \qquad u_\chi\, a\, u_\chi^* = a, \qquad a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$$

$$(17) \qquad u_\chi\, \rho_g\, u_\chi^* = \overline{\chi(g)}\, \rho_g, \qquad g \in G$$

を充すから　$\delta_\chi \equiv \mathrm{Ad}\, u_\chi | \mathcal{M}$　とすると，$\delta_\chi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ となる.

定理 6　(＊＊)のもとで，群 K は $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ と $\mathcal{X}(G)$ の direct product と同型である.

(証明)　K の元 β に対して (15) を充す $u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ と $\chi \in \mathcal{X}(G)$ を取る。 この χ に対して δ_χ を考えると.

$$\beta \cdot \delta_\chi(a) = \beta(a) = \mathrm{Ad}\, u\,(a) \qquad a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$$

$$\beta \cdot \delta_\chi(\rho_g) = \overline{\chi(g)}\, \beta(\rho_g) = \mathrm{Ad}\, u\,(\rho_g) \qquad g \in G$$

が成立つ. $\mathcal{M}$ は $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ と ρ_G によって生成されているから. $\beta = \mathrm{Ad}\, u \cdot \delta_\chi^{-1}$ と分解できる. $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ と $\mathcal{X}(G)$ の direct product から K への写像 σ を $\sigma(\mathrm{Ad}\, u, \chi) = \mathrm{Ad}\, u \cdot \delta_\chi$ と定義すると. この σ は同型写像になる. 実際, もし $\mathrm{Ad}\, u \cdot \delta_\chi = \mathrm{Ad}\, w\, \delta_{\chi'}$ $(u, w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})),\ \chi, \chi' \in \mathcal{X}(G))$ が成立つならば, $\mathrm{Ad}\, w^* u = \delta_{\chi' \cdot \chi^{-1}}$ が成立つ。従って, $\mathrm{Ad}\, w^* u | \pi_\alpha(\mathcal{A})$ は identity automorphism となり. w と u はスカラーしか異ならないから $\mathrm{Ad}\, u | \mathcal{M} = \mathrm{Ad}\, w | \mathcal{M}$　となる. 故に $\delta_\chi = \delta_{\chi'}$ となり (17) より $\chi = \chi'$ を得る。

系 7　(＊＊) のもとで,

$$K_0 = \{\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})\ ;\ \beta | \pi_\alpha(\mathcal{A}) \text{ は identity automorphism}\}$$

とおくと. K_0 は $\mathcal{X}(G)$ と同型である。

群 G に対し交換子群 $[G, G]$ ($\{ghg^{-1}h^{-1}\,;\,g, h\in G\}$の生成する群)が G と一致するとき, G は完全群であるという.

系8 (**) のもとで, 次の (18), (19), (20) は同値である.

(18) $K = \mathrm{Int}(\mathcal{A})$

(19) $K_0 = \{1\}$

(20) G は完全群である.

(証明) 定理6より (18), (19) 及び $\chi(G) = \{1\}$ は同値である。$\mathbb{T}$を複素平面の単位円周とすると $\chi(G)$ は G から $\mathbb{T}$ への homomorphism 全体のなす群 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ である。$\mathbb{T}$ は可換群だから $[G, G]$ は $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ の各元の kernel に含まれる。従って, $\chi(G)$ と $\mathrm{Hom}(G/[G, G], \mathbb{T})$ は同型な群である. 故に, $\mathrm{Hom}(G/[G, G], \mathbb{T}) = \{1\}$ と $\chi(G) = \{1\}$ は同値で, それは, $G/[G, G]$ が trivial なる事と同値である //

(註) (*) のもとで, $\alpha_g \in \mathrm{Out}(\mathcal{A})$ $(g \neq 1)$ なる事と $\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ がスカラー全体と同型である事とは同値である。K に関する結果は G が locally compact group のとき, α が $\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ がスカラー全体となるような continuous action であれば, そのまゝ成立する。又最近, $\mathcal{A}$ を von Neumann algebra, α を G から $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ への α_g が freely acting on $\mathcal{A}$ $(g \neq 1)$ となるような写像

のときに，上の群Kに対する定理6は拡張されることが示された（[17]）。

References

[1] H. Behncke, Automorphisms of crossed product, Tohoku Math. J., 21(1969), 580-600.

[2] H. Choda and M. Choda, On extensions of automorphisms of abelian von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 43(1967) 295-299.

[3] H. Choda, On freely acting automorphisms of operator algebras, Kodai Math. Sem. report, 26(1974), 1-21.

[4] M. Choda, Some relations of II_1-factors on free groups, to appear in Math. Japonicae.

[5] ________, A characterization of crossed products of factors by discrete outer automorphism groups, Preprint.

[6] ________, Extensions of the inner automorphism group of a factor. preprint.

[7] J. Feldman and C.C,Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras, II, Preprint.

[8] E. Hewitt and K.A.Ross, Abstract harmonic analysis, I. Springer-Verlag.

[9] Y. Haga and Z.Takeda, Corespondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 19(1967), 315-323.

[10] R.R.Kallman, A generalization of free action, DUke Math. J., 36(1969), 781-789.

[11] M.Nakamura and Z. Takeda, On inner automorphisms of

certain finite factors, Proc. Japan Acad., 37(1961), 31-32.

[12] __________, On extensions of finite factors, I, Proc. Japan Acad., 34(1959), 149-154.

[13] I.M. Singer, Automorphisms of finite factors, Amer. J. Math., 17(1955), 117-183.

[14] C. E. Sutherland, Cohomology and extensions of von Neumann algebras, I, II, Preprints

[15] M. Takesaki, Duality for crossed products and the stracture of von Neumann algebras of type III, Acta Math., 131(1974), 249-310.

[16] G. Zeller-Meier, Produits croises d'une C*-algebra par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et Appl., 47 (1968), 101-239.

[17] Y. Watatani, An extension of the inner automorphism group of a von Neumann algebra, 準備中.