数理解析研究所講究録
第 314 巻 1977 年 19-26

作用素の近似について

茨城大 工　　中本律男

1. Hを可分な無限次元ヒルベルト空間とし．H上でactする有界な線形作用素の全体を$\mathbb{B}$で表わす。$\mathcal{S}$を$\mathbb{B}$のsubsetとするとき．$T \in \mathbb{B}$に対して

$$\mathrm{dist}\,(T, \mathcal{S}) = \inf\{\|T - S\|\,;\ S \in \mathcal{S}\}$$

を考える。特に、$\mathrm{dist}\,(T, \mathcal{S}) = \|T - S_0\|$ なる $S_0 \in \mathcal{S}$ が存在するとき．S_0はTの *best approximant* と呼ばれ．すべてのTに対して．*approximant* S_0 が存在するとき$\mathcal{S}$は$\mathbb{B}$で *proximinal* と言われている。

$\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{N}$ をそれぞれ．*compact*, *positive*, *hermitian* *normal operators* の全体で表わしておけば．$\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{H}$ は *proximinal* であることがよく知られている [11 ; 8 ; 7]（最近，$\mathbb{N}$が *not proximinal* であることが〔13〕で証明されている。）。しかも dist が具体的に．

$$\mathrm{dist}\,(T, \mathbb{P}) = \inf\{r \geq \|C\|\,;\ B + (r^2 - C^2)^{1/2} \geq 0\},$$
$$T = B + iC$$

$$dist\,(T,\mathbb{H}) = \left\|\frac{T-T^*}{2}\right\|$$

で与えられ，*best approximant* として，$\mathbb{P}$のときは，$P_0 = B + (\delta(T)^2 - C^2)^{1/2}$ （$\delta(T) = dist\,(T,\mathbb{P})$），$\mathbb{H}$では$B$とか$B \pm (\|C\|^2 - C^2)^{1/2}$ 等がとれる。これより$\mathbb{H}$，$\mathbb{P}$での近似は同様にして任意のC^*- *algebra* で可能である。

$\mathbb{C}$の場合は後で少しふれることにする。

ところで，$\mathbb{N}$の場合は*dist* を論ずるのは難しい。その一つの理由として，$\mathbb{N}$は$\mathbb{B}$で *closed*，*non-dense cone* であるが *convex* でないので通常の近似論が使えない。そこで*Holmes*の論文[10]を中心にして，特殊な場合を扱う。

2. $dist\,(T,\mathcal{S}) = \|T\|$ なるとき，即ち，0を *best approximant* としてもつときを考える。$\mathcal{S} = \mathbb{C}$ のとき，*Coburn* [6]によって，*extremely non-compact* (*anti-compact*) と呼ばれ，*Toeplitz oprator* 等がこれに当る。$\mathbb{P}$，$\mathbb{H}$では，それぞれ，[2]と[5]によりスペクトル$\sigma(T)$で*characterize* されている。例えば$\mathbb{H}$のとき，0を *approximant* にもつ必要十分条件は $i\|T\|$ か $-i\|T\|$ が $\sigma(T)$ に入る，ということが分っている。

$\mathbb{N}$のとき $dist\,(T,\mathbb{N}) = \|T\|$ なる作用素Tは *antinormal* と呼ばれる（$\|T-\alpha N\| \geq \|T\|$，$^\forall\alpha$：スカラー，$^\forall N \in \mathbb{N}$ の意味で$\mathbb{N}$に直交している作用素と考えられる）。

まず、antinormal がどの位の class かをみる為に、次の定理を示す。ここで ind T を、

$$\mathrm{ind}\,T = \dim \ker T - \dim \ker T^*,$$

（ただし、$\dim \ker T = \dim \ker T^* = \infty$ のときは 0 とみなす）で定義すれば、

<u>定理1</u>. $\mathrm{ind}\,T = 0$ であれば $\mathrm{dist}\,(T, \mathbb{N}) \leqq \frac{1}{2}\|T\|$ となり、その結果 T は not-antinormal である。

<u>系1</u>. T が compact であれば T は $\mathrm{dist}\,(T, \mathbb{N}) \leqq \frac{1}{2}\|T\|$ を満たし not-antinormal となる。

<u>系2</u>. T が antinormal であれば $\sigma(T) = \{\lambda;\ |\lambda| \leqq \|T\|\}$ となる。

註1. $\sigma(T) = \{\lambda;\ |\lambda| \leqq \|T\|\}$ で $\mathrm{ind}\,T \neq 0$ なる not-antinormal operator T が簡単に作れる。

註2. finite von Neumann algebra ではすべての作用素は not-antinormal である。これは finite algebra では invertible operators の全体が norm dense であることから分る [3]。

次に、$\mathbb{U}$ を unitary operators の全体とすれば、

<u>定理2. (Holmes [10])</u>. $\mathrm{dist}\,(T, \mathbb{U}) = 1 + \|T\|$ であれば $\mathrm{dist}\,(T, \mathbb{N}) = \|T\|$ を満足する。

証明は簡単なノルムだけの計算で、任意の C^*-algebra で成立することが分る。

定理2の条件を満す例としては、Tを non-unitary isometry にとればよい。一方[9]で、Tを partial isometry とすれば、$0 \leqq dist(T, \mathbb{N}) \leqq \frac{1}{2}$ か $dist(T, \mathbb{N}) = 1$ であることが知られている。
そこで、Holmes は次の予想を与えた。

予想: (non-normal) subnormal partial isometry Tは $dist(T, \mathbb{U}) = 1 + \|T\|$ を満たし、その結果、Tは antinormal である。

また、別に問題として、次のものを考えている。

問題: ノルム1の antinormal operator は partial isometry か?

ところで、最近、Rogers [14] は $dist(T, \mathbb{U})$ を完全に決定した。(この中で$\mathbb{U}$が not-proximinal であることも証明している。)

定理3. (Rogers [14]).

(1) $ind\ T = 0 \Rightarrow dist(T, \mathbb{U}) = max\{\|T\|-1, 1-m(T)\}$

ここで、$m(T) = inf\{\|Tx\|;\ \|x\| = 1,\ x \in H\}$,

(2) $ind\ T < 0 \Rightarrow dist(T, \mathbb{U}) = max\{\|T\|-1, 1+m_e(T)\}$

ここで、$m_e(T)=\inf\sigma_e(|T|)$ で $\sigma_e(\cdot)$ は Calkin algebra でのスペクトルを表わす。

ind $T>0$ のときは、T^* を考えればよい。

今、dist $(T, \mathbb{U})=1+\|T\|$ とすれば、定理3(2)より $\|T\|=m_e(T)$ となり、$m_e(T)=\|T\|=\||T|\|\geqq\||\hat{T}|\|$（$\hat{T}$ は Calkin image）で $|\hat{T}|=m_e(T)$ を得る。

従って、問題については、S を weight が全て1の unilateral shift, $0<\alpha<1$, K を有限次元のヒルベルト空間として、$T=S\oplus\alpha$（$H\oplus K$ 上で）とおけば、$\|T\|=1=\|\hat{T}\|=m_e(T)$ となり、しかもTは antinormal である。

予想については、T が non-normal subnormal partial isometry である必要十分条件は $T=V\oplus 0$（V は non-unitary isometry）と直和に書ける、ということがよく知られている。そこで、例えば、上の S を使って、$T=S\oplus 0$（$H\oplus H$ 上で）とおけば ind $T=0$ となり、Tは antinormal でない。このとき、$T^*T=1\oplus 0$ で、dist $(T, \mathbb{U})=1$ になっている。また、dist $(T, \mathbb{N})=\frac{1}{2}$ であることが容易に分る。以上により、問題、予想、いずれも否定的である。

尚．Calkin algebra においては、定理に対応するものは、

$$-\infty < \operatorname{ind} T < \infty \Rightarrow \operatorname{dist}(\hat{T}, \hat{\mathbb{N}}) \leqq \frac{1}{2}\|\hat{T}\|$$

で．定理2もそのまま対応して成立する。

〔14〕において．Calkin algebra では．unitary elements の全体は proximinal であることが証明されているが．normal elements の全体については未解決である。

3．最後に．$\mathbb{C}$ が $\mathbb{B}$ で proximinal であることは．von Neumann algebra へ拡張される。

<u>補題．(Zsido)．</u> $\mathcal{A}$ を von Neumann algebra とし．J を norm closed two-sided ideal とする。このとき．hermitian (positive) $H \in \mathcal{A}$ に対して．次の (i)，(ii) を満足する $K \in J$ が存在する．

(i) $H+K$ は hermitian (positive) である。

(ii) $\sigma(H+K) = \sigma(\pi(H))$、ただし、$\pi$ は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}/J$ への natural map とする．

<u>定理4.</u> von Neumann algebra において．任意の norm closed two-sidad ideal は proximinal set である。

定理4は〔1〕において C^*-algebra で既に解かれている。$\mathbb{B}(H)$ においては、もっと強く、次が成立している。

定理5.（Chui, Smith, Smith & Ward）．任意の $T \in \mathbb{B}$ に対して、$\|T+K+\lambda\| = \|T+\lambda\|_e$ for $^\forall\lambda \in \mathbb{C}$、なる $K \in \mathbb{C}$ が存在する。

これは、〔12〕の予想：多項式 p に対して、$\|p(T+K_p)\| = \|p(T)\|_e$ なる $K_p \in \mathbb{C}$ が存在する。と関連した興味深い結果である。尚、一般に C^*-algebra では、この予想が成立しないことが知られている。

References

[1] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama, Multipliers of C*-algebras, J. Functional Analysis, 13(1972), 277-301.

[2] T. Ando, T. Sekiguchi and T. Suzuki, Approximation by positive operators, Math. Z., 131(1973), 273-282.

[3] H. Choda, An extremal property of the polar decomposition in von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 46(1970), 341-344.

[4] C.K. Chui, P.W. Smith, R.R. Smith and J.D. Ward, L-ideals and numerical range preservation, Ill. J. Math., 83(1977), 365-373.

[5] _________, _________ and J.D. Ward, Approximation with restricted spectra, Math. Z., 144(1975), 289-297.

[7] K. Fan and J. Hoffman, Some metric inequalities in the space of matrices, Proc. A. M. S., 6(1955), 111-116.

[8] P.R. Halmos, Positive approximant of operators, Indiana Univ. Math. J., 21(1972), 951-961.

[9] ______ and J. McLaughlin, Partial isometries, Pacific J. Math., 13(1963), 585-596.

[10] R.B. Holmes, Best approximation by normal operators, J. of Approximation Theory, 12(1974), 412-417.

[11] __________ and B.R. Kripke, Best approximation by compact operators, Indiana Univ. Math. J., 21 (1971), 255-263.

[12] C.L. Olsen and J.K. Plastiras, Quasialgebraic operators, compact perturbations and the essential norm, Michigan Math. J., 21(1974), 385-397.

[13] D.D. Rogers, On proximinal sets of normal operators, Proc. A. M. S., 61(1976), 44-48.

[14] __________ , Approximation by unitary and essentially unitary operators, to appear in Acta Sci. Math.

[15] L. Zsido, The Weyl-von Neumann theorem in semifinite factors , J. of Functional Analysis, 18(1975), 60-72.