数理解析研究所講究録
第314巻 1977年 27-35



# Injective envelopes of operator systems

東北大 理 浜名 正道

線型空間 $V$ は，それがある Hilbert 空間 $H$ 上の全ての有界線型作用素が作る $C^*$-代数 $B(H)$ の線型部分空間となっていて，

$$V^* \equiv \{v^* ; v \in V\} = V, \quad 1 \in V \ (1;\text{恒等作用素})$$

を満たしているとき，<u>operator system</u> と呼ばれる．Choi-Effros [2] は operator systems と completely positive linear maps の作る category $\mathcal{C}$ において injectivity を次のように定義した：　$V \in \mathcal{C}$ が <u>injective</u> であるとは，任意の $M, N \in \mathcal{C}$, $M \subset N$ に対し，任意の completely positive map $\alpha : M \longrightarrow V$ が completely positive map $\hat{\alpha} : N \longrightarrow V$ に拡張できるときをいう．

ここでは任意に与えられた operator system $V$ を含む injective operator system (resp. unital $C^*$-algebra) の中で minimal なもの —— それを $V$ の injective envelope (resp. $C^*$-envelope) と呼ぶ —— が一意に存在することを示す．また

Arveson [1] の意味での Šilov boundary の存在を示し，unital $C^*$-algebra A に対し A の injective envelope と A の (J. D. M. Wright [6] の意味での) regular σ-completion との間の関係を調べる．

1. 定義．operator systems $V \subset B(H)$, $W \subset B(K)$ に対し，linear map $\varphi: V \longrightarrow W$ が 1 対 1，into (resp. onto) で $\varphi$, $\varphi^{-1}: \varphi(V) \longrightarrow V$ がともに completely positive のとき，$\varphi$ を complete order injection (resp. complete order isomorphism) と呼ぶ．固定した operator system $V$ に対し，operator system $W$ と unital (= unit-preserving) complete order injection $\kappa: V \longrightarrow W$ との pair $(W, \kappa)$ を $V$ の extension と呼ぶ．特に $W$ が injective operator system (resp. unital $C^*$-algebra であって $\kappa(V) \subset W$ によって $C^*$-algebra として生成されている) のとき，$(W, \kappa)$ を injective (resp. $C^*$-) extension という．$V$ の 2 つの extensions $(W_1, \kappa_1)$, $(W_2, \kappa_2)$ が同値である [ $(W_1, \kappa_1) \sim (W_2, \kappa_2)$ と書く ] とは，unital complete order isomorphism $\iota: W_1 \longrightarrow W_2$ が存在し，$\iota \circ \kappa_1 = \kappa_2$ をみたすときをいう．

2. 結果．

<u>Theorem 1.</u> 任意の operator system $V$ に対し，次の性質を満たす injective (resp. $C^*$-) extension $(B, \varkappa)$ [resp. $(A, \varkappa)$] が同値関係 $\sim$ を除いて一意に定まる．

(i) $B$ は injective $C^*$-algebra，$A$ はその $C^*$-subalgebra であり，　$\varkappa(V) \subset A \subset B$.

(ii) 任意の $V$ の injective extension $(W, \lambda)$ [resp. $C^*$-extension $(C, \mu)$] に対し，unital complete order injection $\iota: B \longrightarrow W$ が存在し，$\iota\circ\varkappa = \lambda$ を満たす [resp. onto $*$-homomorphism $\pi: C \longrightarrow A$ が存在し，$\pi\circ\mu = \varkappa$ を満たす；従って

$$(C/\mathrm{Ker}\,\pi,\ q\circ\pi) \sim (A,\ \varkappa)$$

ここで $q: C \longrightarrow C/\mathrm{Ker}\,\pi$ は quotient homomorphism を表わす].

この $(B, \varkappa)$ [resp. $(A, \varkappa)$] を $V$ の injective (resp. $C^*$-) envelope と呼ぶ．unital $C^*$-algebras の間の unital complete order isomorphism は必然的に $*$-isomorphism になるので，$B$, $A$ は $C^*$-algebras として unique である．

<u>Corollary.</u> $V$ を unital $C^*$-algebra $C$ の linear subspace で $1$ を含み，$C$ を $C^*$-algebra として生成しているようなも

のとする．そのとき Arveson [1] の意味での Šilov boundary J for V が存在する，i.e., J は C の closed two-sided ideal であり，canonical map $V \hookrightarrow C \longrightarrow C/J$ が completely isometric になる；しかも J はこの性質をもつ C の closed two-sided ideals の中で最大である．

A を unital $C^*$-algebra，$(B, \varkappa)$ をその injective envelope とする．以下で A と B との関係を調べよう．A が $C^*$-algebra だから A の $C^*$-envelope は A それ自身と一致し，
$\varkappa : A \longrightarrow \varkappa(A) \subset B$ が $*$-monomorphism (1 to 1 $*$-homomorphism) となることがわかるが，更に

<u>Proposition 2.</u> $\varkappa$ は suprema を保存する，i.e., $A_{s.a.}$ の部分集合 $\mathcal{F}$ に対し $\sup \mathcal{F}$, $\sup \varkappa(\mathcal{F})$ がそれぞれ A, B において存在すれば，

$$\varkappa(\sup \mathcal{F}) = \sup \varkappa(\mathcal{F}).$$

[B は injective だから，monotone complete である．従って $\mathcal{F}$ が increasing net である場合には，"$\sup \varkappa(\mathcal{F})$ が B において存在する" という仮定は（必然的に満たされるので）不要である．]

次の Lemma は容易に証明される：

<u>Lemma 1.</u> $D$ を任意の unital $C^*$-algebra, $C$ をその $1 \in D$ を含む $C^*$-subalgebra とし

$$N \equiv \{x \in D^+ ;\ \exists \text{ a subset } \mathcal{F} \text{ of } C^+ \text{ s.t. } \exists \inf \mathcal{F} \,(\text{in } C) = 0 \text{ and } 0 \leq x \leq y \text{ for } \forall y \in \mathcal{F}\}$$

とおくと

(i) $N$ は $D$ の closed order ideal であり $C \cap N = \{0\}$, 更に $C$ の任意の unitary element $u$ に対し $uNu^* = N$ ; 従って

(ii) $I$ を $N$ の linear span とすると $C \cap I = \{0\}$, $C + I$ は $D$ の $C^*$-subalgebra, $I$ は $C + I$ の closed two-sided ideal である.

この Lemma を $B$ と $\varkappa(A) \subset B$ に対し適用する. そのとき $(B, \varkappa)$ が $A$ の injective envelope という条件から上述の $I = \{0\}$, 従って $N = \{0\}$ が示せる. これが命題の主張に外ならない.

上述のように $B$ は monotone complete である. そこで $\varkappa(A) \subset B$ によって $\sigma$-generate される $B$ の linear subspace $C$ が考えられる: $C = C_{s.a.} + i\, C_{s.a.}$, $C_{s.a.}$ は $\varkappa(A)_{s.a.}$ を含む $B$ の最小の $\sigma$-closed linear subspace である. そのとき

<u>*Proposition 3.*</u> $(C, \varkappa)$ は J. D. M. Wright [6] の意味での A の regular $\sigma$-completion である, i.e., C は $\sigma$-complete $C^*$-algebra であり, $\varkappa$ は次の性質を満たす:
(i) $(a_n)$ が $A_{s.a.}$ の任意の減少列で $\inf a_n$ (in A) $= 0$ ならば $\inf \varkappa(a_n)$ (in C) $= 0$; (ii) 任意の $c \in C_{s.a.}$ に対し $\sup\{\varkappa(a) : a \in A_{s.a.},\ \varkappa(a) \leq c\} = c$.

任意の unital $C^*$-algebra に対しその regular $\sigma$-completion の存在と一意性が J. D. M. Wright [6] によって証明されている.

<u>*Lemma 2.*</u> A の regular $\sigma$-completion を $(D, \alpha)$ とし $M_n$ を $n \times n$ 複素行列環とすると $(D \otimes M_n, \alpha \otimes id)$ は $A \otimes M_n$ の regular $\sigma$-completion に含まれる ($\alpha \otimes id : A \otimes M_n \longrightarrow D \otimes M_n$, $id =$ identity map on $M_n$), i.e., $D \otimes M_n$ を含む $C^*$-algebra E が存在して $(E, \alpha \otimes id)$ が $A \otimes M_n$ の regular $\sigma$-completion となる.

<u>*Lemma 3.*</u> $\alpha|_{A_{s.a.}} : A_{s.a.} \longrightarrow D_{s.a.}$ は次の性質をもつ: 任意の real Banach space $X$, contractive linear map $\beta : D_{s.a.} \longrightarrow X$ に対し $\beta \circ \alpha : A_{s.a.} \longrightarrow X$ が isometric ならば $\beta$ も isometric である.

<u>Proposition 3 の証明:</u> $B$ が injective だから completely positive map $\lambda : D \longrightarrow B$ が存在し $\lambda \circ \alpha = \varkappa$ をみたす。この $\lambda$ が complete order injection であることを示す:

$\lambda \otimes id|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}} : (D\otimes M_n)_{s.a.} \longrightarrow (B\otimes M_n)_{s.a.}$ は contractive であり $(\lambda\otimes id)\circ(\alpha\otimes id)|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}} = (\varkappa\otimes id)|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}}$ は isometric である。従って $A\otimes M_n$ と $A\otimes M_n$ の regular $\sigma$-completion に対し Lemma 3 を適用し更に Lemma 2 に注意すると $\lambda\otimes id|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}}$ が任意の $n$ に対し isometric であることがわかる。これから $\lambda$ が complete order injection 従って $*$-monomorphism となることが示せる。また Proposition 2 より $\lambda(D) = C$ である。従って $(D, \alpha) \sim (C, \varkappa)$.

<u>Proposition 4.</u> $A$ が simple ならば $B$ もまた simple である; 従って特に $B$ は $AW^*$-factor である。

$A$ が separable, infinite dimensional かつ simple ならば $B$ は $\sigma$-finite, non $W^*$, $AW^*$-factor of type III である。

<u>Proof.</u> $(B, \varkappa)$ が injective envelope であることから次の性質をみたす $B$ の seminorm $p$ は $B$ の norm と一致することがわかる:

$$p(x) \leqq \|x\|, \quad p(\varkappa(a)\, x\, \varkappa(b)) \leqq \|a\|\, p(x)\, \|b\|$$

$$p(\varkappa(a)) = \|a\| \quad (a, b \in A,\ x \in B).$$

$B$の simplicity を示すために $B$ の proper closed two-sided ideal $I$ をとる．$\pi : B \to B/I$ を canonical homomorphism とし $p(x) = \|\pi(x)\|$ $(x \in B)$ とおく．そのとき $A$ の simplicity と $1 \in A$ を使うと $p$ が上の条件をみたすことが示せ，従って $I = \{0\}$ が示せる．

separable infinite dimensional simple unital $C^*$-algebra の regular $\sigma$-completion が non $W^*$-, $AW^*$-factor of type III であることが知られている[7]．従って Proposition 3 より $B$ が non $W^*$-, $AW^*$-factor of type III を $AW^*$-subalgebra として含むことがわかる．従って $B$ は non $W^*$, type III となる．更に $A$ が separable であることから $B$ が faithful state をもつことが示せ，$B$ の $\sigma$-finiteness が従う．

## References


[1] W. Arveson, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.

[2] M.-D. Choi and E. G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Functional Analysis, 24 (1977), 156-209.

[3] H. B. Cohen, Injective envelopes of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 723-726.

[4] M. Hamana, Injective envelopes of C*-algebras, preprint.

[5] ————, Injective envelopes of operator systems, preprint.

[6] J. D. M. Wright, Regular $\sigma$-completions of C*-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

[7] J. D. M. Wright, Wild AW*-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83-89.