数理解析研究所講究録
第 314 巻 1977 年 49-64

crossed productにおける非可換Hardy空間について

新潟大 理　斉藤吉助

§0. 作用素環の解析性の研究は，最近、flow の spectral部分空間の理論を用いることにより，多くの興味のある結果を示している。Mを von Neumann環，$\{\alpha_t\}_{t\in R}$をM上の σ-weakly continuous automorphism group とする。このとき，$H^\infty(\alpha)=\{x\in M;\ Sp_\alpha(x)\subset[0,\infty)\}$とおくと，もしもMが α-finite ならば，$H^\infty(\alpha)$はArveson [1] による非可換weak*-Dirichlet 環として，定義された maximal subdiagonal 環になることを示した([4],[5])。しかも$H^\infty(\alpha)$の構造研究は関数環における単位円上の Hardy 空間H^∞の役割を果たすものとして重要であり，多くの解析的な性質をもっている。一方、単位円上の Hardy空間H^p の一般化として、Hilbert空間に値をもつL^p-空間、あるいはvon Neumann 環、特にI_n-factor に値をもつL^p-空間のHardy空間が定義された([3])。さらに，筆者([11])によって，Mが finite von Neumann環のとき，非可換Hardy空間$H^p(\alpha)$が構成され，さらに，simply invariant subspace と doubly invariant subspace の形の決定がなされた。しかしなが

う。このような状況で単位円上の Hardy 空間のもつ性質、特に、H^∞ が $L^\infty(\mathbb{T})$（$\mathbb{T}$ は単位円）で maximal σ-weakly closed algebra であることや、invariant subspace theorem を考えるのに、かなり一般的に思える。そこで、本講演では、finite von Neumann 環 M とその上の1つの *-automorphism から生成される2つの crossed product の中に periodic flow からえられる non-self adjoint σ-weakly closed subalgebra を考え、invariant subspace の形を考え、maximality などを議論する。

本講演の内容は、[7] である。これは、筆者が、1977年4月から6月にかけて、Iowa 大学を訪問し、Paul S. Muhly とその学生 Mike McAsey と共同研究したものである。筆者は、Iowa 大学と Muhly に心から謝意を表する。

§1. M を faithful, normal, normalized trace τ をもつ von Neumann algebra とする。Segal ([13]) の非可換積分論から、Hilbert 空間 $L^2(M,\tau)$ が定義でき、M は $L^2(M,\tau)$ 上で作用しているとする。今、α を M 上の *-automorphism で $\tau\circ\alpha=\tau$ をみたすものとする。このとき、$\alpha(x)=uxu^*$ ($\forall x\in M$) をみたす $L^2(M,\tau)$ 上の unitary operator u が存在する。そこで、2つの crossed product を定義するために、Hilbert 空間 L^2 を

$$L^2 = \{ f : \mathbb{Z} \to L^2(M,\tau) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f(n)\|^2 < \infty \}$$

とおく。また

$$H^2 = \{ f \in L^2 : \quad f(n) = 0 \quad (\forall n < 0) \}.$$

とおく。この H^2 は、非可換Hardy 空間で、重要な役割を果たす。今 $f \in L^2$, $x \in M$ に対して、

$$(L_x f)(n) = x f(n)$$

$$(R_x f)(n) = f(n) \alpha^n(x)$$

$$(L_\delta f)(n) = u f(n-1)$$

$$(R_\delta f)(n) = f(n-1) \qquad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

とおくと、L_x, R_x, L_δ, R_δ は L^2 上の有界線形作用素になる。このとき、$L_{\alpha(x)} = L_\delta L_x L_\delta^*$, 又、$R_{\alpha(x)} = R_\delta R_x R_\delta^*$ をみたす。また、簡単のために、$\{L_x\}_{x \in M}$ を $L(M)$, $\{R_x\}_{x \in M}$ を $R(M)$ とおく。このとき、$\mathcal{L}$ を $L(M)$ と L_δ によって生成された von Neumann 環 $\mathcal{R}$ を $R(M)$ と R_δ によって生成された von Neumann 環とする。もちろん、よく知られているように、$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は finite である。また、$\mathcal{L}$ の commutant は $\mathcal{R}$ に等しい ([15])。さらに、$\mathcal{L}_+$ を $L(M)$ と L_δ によって生成された $\mathcal{L}$ の σ-weakly closed subalgebra, $\mathcal{R}_+$ を $R(M)$ と R_δ によって生成された $\mathcal{R}$ の σ-weakly closed subalgebra とする。一方 $\forall f \in L^2$, に対して、

$$(W_t f)(n) = e^{int} f(n) \qquad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

とおくと、$\beta_t(x) = W_t x W_t^*$ $(x \in \mathcal{L})$ により、$\mathcal{L}$ 上の周期 2π

の σ-weakly continuous automorphism group $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が定義できる。今，

$$\mathcal{L}_n = \{x \in \mathcal{L} : \beta_t(x) = e^{-int}x \ (\forall t \in \mathbb{R})\}$$

とおく。又，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\beta_t(x)\,dt \qquad (x \in \mathcal{L})$$

とする。このとき，

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_n = L(M)L_f^n$$

が成り立つ。さらに，$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して，

$$\beta(f)x = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_t(x) f(t)\,dt \qquad (\forall x \in \mathcal{L})$$

とおくと，x の spectrum $Sp_\beta(x)$ を $\bigcap_{\beta(f)x=0,\, f\in L^1(\mathbb{R})} \{t \in \mathbb{R} : \hat{f}(t) = 0\}$（$\hat{f}$ は f の Fourier 変換）とおくとき，

$$H^\infty(\beta) = \mathcal{L}_+ = \{x \in \mathcal{L} : Sp_\beta(x) \subset [0, \infty)\}$$

で，$\mathcal{L}_+$ は $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって与えられた非可換Hardy空間である。しかも，$\mathcal{E}_0$ は $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}_0 (= L(M) = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^*)$ の上への β_t-invariant で faithful normal projection of norm one である。

今，$\mathcal{E}$ を von Neumann 環 $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}$ の中への faithful normal projection of norm one とする。$\mathcal{B}$ の単位元をもつ σ-weakly closed subalgebra $\mathfrak{A}$ が次の条件をみたすとき，$\mathcal{E}$ に関して，subdiagonal 環という。

(i) $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$ は $\mathcal{B}$ で σ-weakly dense である。

(ii) $\mathcal{E}(\mathcal{B})=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$ で $\mathcal{E}$ は $\mathfrak{A}$ 上乗法的である。

また，$\mathfrak{A}$ が maximal とは $\mathfrak{A}$ を含む proper な $\mathcal{E}$ に関して，$\mathcal{B}$ の subdiagonal 環が存在しないときをいう。さらに $\mathfrak{A}$ が finite とは $\rho\circ\mathcal{E}=\rho$ をみたす $\mathcal{B}$ の faithful normal finite trace ρ が存在することをいう。

Proposition 1.1. ([4], [5] [10]). $\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{E}_0$ に関して，$\mathcal{L}$ の finite maximal subdiagonal 環である。

しかしながら，§3で，$\mathcal{L}_+$ が σ-weakly closed subalgebra として，maximal になるかどうか議論する。よく知られているように $L^\infty(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ は単位円)の中の Hardy 空間 H^∞ は $L^\infty(\mathbb{T})$ の maximal σ-weakly closed subalgebra になり，すべての不変部分空間の形が決定されている。さらに，weak* Dirichlet 環の場合に maximality が Muhly [8] などによって，必要十分条件が調べられている。そこで，invariant subspace の形の研究において，maximality を調べることは重要であり，$\mathcal{L}_+$ の maximality と invariant subspace の形を示すことを目標とする。

§2. この節では不変部分空間について調べる。

$\mathfrak{M}$ を L^2 の closed subspace とする。$\mathfrak{M}$ が left (or right)-invariant とは $\mathcal{L}_+\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ (or $\mathcal{R}_+\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$) をみたし，$\mathfrak{M}$ が 2-sided invariant とは．left かつ right-invariant のときをいう。$\mathfrak{M}$が reducing とは $\mathfrak{L}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$，また $\mathfrak{M}$が pure とは $\bigcap_{n>0} L_\delta^n \mathfrak{M} = (0)$ をみたす．$\mathfrak{M}$が full とは $\bigvee_{n<0} L_\delta^n \mathfrak{M}$ が L^2で dense とする。

今$\mathfrak{M}$をL^2の pure left-invariant subspace とする。$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \ominus L_\delta \mathfrak{M}$ とおくと，$L(M)\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$, $L(M) L_\delta \mathfrak{M} \subseteq L_\delta \mathfrak{M}$ であるから，$L(M)\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$．そこで PをL^2から$\mathfrak{F}$の上への projection とすると，$P \in L(M)'$。そこで

Theorem 2.1. $\mathfrak{M}_1$と$\mathfrak{M}_2$をL^2の pure left invariant subspace とする。P_iをL^2から$\mathfrak{M}_i \ominus L_\delta \mathfrak{M}_i \,(= \mathfrak{F}_i)$の上への projection $(i = 1, 2)$ とする。このとき $L(M)'$において．$P_2 \precsim P_1$ならば $\mathfrak{M}_2 = V\mathfrak{M}_1$をみたす$\mathcal{R}$の partial isometry Vが存在する。

Proof. $L(M)'$において，$P_2 \precsim P_1$ であるから，$P_2 = WW^*$, $W^*W \leq P_1$をみたす$L(M)'$の partial isometry Wがある。$K_i = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} L_\delta^n \mathfrak{M}_i$は $\mathfrak{L}$を reduce するから，VをK_i上で定義すればよい。$\mathfrak{M}_i$は pure 故 $K_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_\delta^n \mathfrak{F}_i$であるから

$$V\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_\delta^n \xi_n\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_\delta^n W \xi_n \quad (\xi_n \in \mathfrak{F}_1)$$

$$V|_{K_i^\perp} = 0$$

と定義すると，Vは$\mathcal{R}$の partial isometry で $\mathfrak{M}_2 = V\mathfrak{M}_1$をみたす。//

Corollary 2.2. Mを factor，$\mathfrak{M}$をL^2の pure left invariant

とする。このとき，$\mathfrak{M} = VH^2$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V が存在する。

Proof. P を L^2 から $\mathfrak{M} \ominus L_\delta \mathfrak{M}$ の上の projection，P_0 を L^2 から $H^2 \ominus L_\delta H^2$ の上への projection とする。M は factor 故 $L(M)$ も factor，従って，$P \precsim P_0$ 又は $P \succsim P_0$ が成り立つ。$P \precsim P_0$ ならば，Theorem 2.1 から，O.K.，$P_0 \precsim P$ ならば $H^2 = V\mathfrak{M}$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V がある。L_δ と V は可換故

$$VL^2 \supseteq V(\bigvee_{n<0} L_\delta^n \mathfrak{M}) = \bigvee_{n<0} L_\delta^n V\mathfrak{M} = \bigvee_{n<0} L_\delta^n H^2 = L^2$$

従って，V は co-isometry，よって，$\mathcal{R}$ は finite 故 V は unitary operator，よって，$\mathfrak{M} = V^* H^2$ が成り立つ。//

Corollary 2.3. $\mathfrak{M} = VH^2$（V は $\mathcal{R}$ の partial isometry）とする。このとき，$\mathfrak{M}$ が full であることと V が unitary operator であることは同値。

§3. この節では，$\mathfrak{L}_+$ が $\mathfrak{L}$ の maximal σ-weakly closed subalgebra になることと，invariant subspace の形が決定されることとの同値性を示す。

Theorem 3.1. 次の5つの条件は同値.

(1) M は factor である。

(2) $\mathfrak{L}_+$ は $\mathfrak{L}$ の maximal σ-weakly closed subalgebra である。

(3). H^2のすべての2-sided invariant subspaceは$VH^2=WH^2$（Vは$\mathcal{R}$のunitary operator, Wは$\mathcal{L}$のunitary operator）の形にかける。

(4). L^2のすべてのnon-reducing 2-sided invariant subspaceはfullかつpureである。

(5). L^2のすべてのpure-left invariant subspaceはVH^2（Vは$\mathcal{R}$のpartial isometry）の形にかけ、かつ（$\mathcal{L}$のcenter）∩（$L(M)$のcenter）$=\{\lambda 1\}$をみたす。

今、αをMのidentity automorphismとすると、$\mathcal{L}$と$L^\infty(\mathbb{T})\otimes M$（$\mathbb{T}$は単位円）は同型、さらに$\mathcal{L}_+$と$H^\infty(\mathbb{T})\otimes M$も同型になる。そこでTheorem 3.1から、次のCorollaryを得る。

Corollary 3.2. Mはfactorであることと$H^\infty(\mathbb{T})\otimes M$が$L^\infty(\mathbb{T})\otimes M$のmaximal σ-weakly closed subalgebraであることは同値。

さて、Theorem 3.1の証明を与えたいが、証明が長いため、この証明のなかで、非常に困難な(1)⟺(2)の証明を与える。そのために、次の4つのLemmaを必要とする。

Lemma 3.3. $\mathcal{B}$をfinite von Neumann環で、$\mathfrak{A}$をεに関するfinite maximal subdiagonal algebraとする（従って、$\mathcal{B}$上に$\tau\circ\varepsilon=\tau$をみたすfaithful, normal, normalized trace τが存在する）。このとき、もし、$k\in\mathcal{B}$かつ$k^{-1}\in L^2(\mathcal{B},\tau)$ならば$k=uy$をみたす$\mathfrak{A}$の元$y$と$\mathcal{B}$のunitary operator uが

存在する。

この結果は Arveson [1, Theorem 4.2.1] を一般化したものである。すなわち、$\mathfrak{B}$ の regular element は $\mathfrak{B}$ の unitary operator と、$\mathfrak{A}$ の regular element の積にかけることを示した。ここでは、その証明を直すことによって、示されるので、省略する。

<u>Lemma 3.4.</u> $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, τ を Lemma 3.3 の通りとする。$\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{A}$ を含む $\mathfrak{B}$ の proper σ-weakly closed subalgebra とする。このとき、$[\mathfrak{C}]_2 \neq L^2(\mathfrak{B}, \tau)$, 但し $[\mathfrak{C}]_2$ は $L^2(\mathfrak{B}, \tau)$ における $\mathfrak{C}$ の closure である。

<u>Proof.</u> $\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{B}$ の proper σ-weakly closed subalgebra 故 $\tau(ax) = 0$ ($\forall x \in \mathfrak{C}$) をみたす $L^1(\mathfrak{B}, \tau)$ の元 a $(\neq 0)$ がある。a の極分解を $a = |a^*|v = |a^*|^{\frac{1}{2}}|a^*|^{\frac{1}{2}}v$ とする。このとき、$f(\lambda) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \lambda \leq 1) \\ 1/\lambda & (\lambda > 1) \end{cases}$ なる $[0, \infty)$ 上の有界な連続関数に対して、$k = f(|a^*|^{\frac{1}{2}})$ とおく。このとき、$k \in \mathfrak{B}$ かつ、$k^{-1} \in L^2(\mathfrak{B}, \tau)$ がわかる。そこで、Lemma 3.3 から、$k = uy$ をみたす $\mathfrak{B}$ の unitary operator u と $\mathfrak{A}$ の元 y がある。よって、$k|a^*|^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{B}$ 故

$$0 \neq ya = u^*k|a^*|^{\frac{1}{2}}|a^*|^{\frac{1}{2}}v \in L^2(\mathfrak{B}, \tau)$$

さらに、

$$(x, a^*y^*) = \tau(yax) = \tau(axy) = 0 \quad (\because xy \in \mathfrak{C})$$

よって、$a^*y^* \in [\mathfrak{C}]_2^{\perp}$. これから、$[\mathfrak{C}]_2 \neq L^2(\mathfrak{B}, \tau)$ //

Lemma 3.5. Mを factor とする。$\mathcal{B}$を$\mathcal{L}_+$を含む $\mathcal{L}$の$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-invariant σ-weakly closed subalgebra とする。このとき，$\mathcal{B}=\mathcal{L}_+$ 又は，$\mathcal{B}=\mathcal{L}$。

Proof. $\mathcal{B}\neq\mathcal{L}_+$ と仮定，$\mathcal{B}$は$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-invariant 故，$\varepsilon_n(x)\in\mathcal{B}$ $(\forall x\in\mathcal{B})$。そこで，$\mathcal{B}\neq\mathcal{L}_+$ 故，ある$n<0$に対して，$\varepsilon_n(x)\neq 0$をみたす$x\in\mathcal{B}$がある。従って，$\varepsilon_n(x)=L_yL_\delta^n$ $(y\in M)$ の形にかける。しかし，

$$L(M)L_yL(M)L_\delta^n=L(M)L_yL_\delta^nL(M)\subseteq\mathcal{B}$$

$L(M)L_yL(M)$ は$L(M)$の 2-sided ideal で Mは finite factor 故 Mは algebraic simple。従って，$L(M)L_yL(M)=L(M)$。そこで，$L(M)L_\delta^n\subseteq\mathcal{B}$，$L(M)\ni 1$ 故，$L_\delta^n\in\mathcal{B}$。そこで

$$L_\delta^*=L_\delta^{-1}=L_\delta^nL_\delta^{-(n+1)}\in\mathcal{B}.$$

これから，$\mathcal{B}=\mathcal{L}$ //

Lemma 3.6. Mが factor で$\mathcal{L}$が factor でないとする。このとき，$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cong L^\infty(\mathbb{T})$，$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+\cong H^\infty(\mathbb{T})$，但し，$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$は$\mathcal{L}$の center である。

Proof. Mは factor で $L(M)$は$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$に関して，$\mathcal{L}$の fixed point algebra 故，$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$は$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$上 ergodic である。$L^2$は separable 故，$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})=L^\infty(X)$ (Xはある standard Borel space)。この同型によって，$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$を$L^\infty(X)$の $*$-automorphism group として考える。Mackeyの定理[6]から，

$$[\beta_t(\varphi)](x) = \varphi(x+t) \quad (\varphi \in L^\infty(X))$$

をみたす$\mathbb{R}$からX上のmeasurable actionがある。但し、xをtによるtranslationを$x+t$とかく。$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$は$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$上ergodic periodic故 Rohlin[14] の結果から，$X=\mathbb{T}$（null setを除いて）でその対応によって，inducedされるmeasureはnormalized Lebesgue measureになる。$\mathbb{T}$上の$\mathbb{R}$のactionは普通のrotationで$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+$はnon-negative spectrumをもつfunctionからなるから，これは$H^\infty(\mathbb{T})$と同型になる。 //

Proof of (1) ⇒ (2) of Theorem 3.1.

$\mathcal{B}$を$\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$をみたす$\sigma$-weakly closed subalgebraとする。Lemma 3.4から，$[\mathcal{B}]_2 \neq L^2$，明らかに$[\mathcal{B}]_2$は1を含むから，non-reducing 2-sided invariant subspaceである。今$[B]_2 = VH^2$（Vは$\mathcal{R}$のunitary operator）を示せば十分。実際 $V^*[B]_2 = H^2$ より，

$$[B]_2 = V^*V[BH^2]_2 = V^*[VBH^2]_2 = V^*[BVH^2]_2$$
$$= V^*[B[B]_2]_2 = V[B]_2 = H^2$$

これから，$B=\mathcal{L}_+$を得る。

$[B]_2 = VH^2$を示すには Corollary 2.3から，$[B]_2$はfullかつpureを示せば十分，$H^2 \subseteq [B]_2$故，$[B]_2$はfullである。$[B]_2$がpureを示すには，$\mathcal{B}$を含む$\mathcal{L}$のproper σ-weakly closed subalgebraにおきかえる必要がある。今，$\tilde{\mathcal{B}} = [B]_2 \cap \mathcal{L}$とお

くと、$\hat{\mathfrak{B}}$は $\hat{\mathfrak{B}}[\mathfrak{B}]_2 \subseteq [\mathfrak{B}]_2$をみたす$\mathcal{L}$の proper σ-weakly closed subalgebraになる。何となれば $[\mathfrak{B}]_2$は non-reducing 故. $\hat{\mathfrak{B}}$は$\mathcal{L}$の proper subalgebraである。もちろん、$\mathfrak{B} \subseteq \hat{\mathfrak{B}}$。$L^2 \subseteq L^1$故. $\hat{\mathfrak{B}}$におけるσ-weaklyに収束する net はL^2の weak topologyで収束する。$[\mathfrak{B}]_2$はL^2で weakly closed 故. 任意のこのような netは$[\mathfrak{B}]_2$の中に極限をもつ。従って, $\hat{\mathfrak{B}}$はσ-weakly closed、さらに、$\hat{b} \in \hat{\mathfrak{B}}$を固定して.

$$\mathfrak{M} = \{ b \in [\mathfrak{B}]_2 : \hat{b} b \in [\mathfrak{B}]_2 \}$$

とおくと. $\mathfrak{M}$は$[\mathfrak{B}]_2$の closed subspaceで $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$。従って. $[\mathfrak{B}]_2 = \mathfrak{M}$故. $\hat{b}[\mathfrak{B}]_2 \subseteq [\mathfrak{B}]_2$

さて、$[\mathfrak{B}]_2$が pureであることを示すために, P_∞をL^2から、$\bigcap_{n\geq 0} L_\delta^n[\mathfrak{B}]_2$の上への projectionとする。このとき . $P_\infty = 0$を示せばよい。$\bigcap_{n\geq 0} L_\delta^n[\mathfrak{B}]_2$は reducing subspace 故. $P_\infty \in \mathcal{L}' = \mathcal{R}$。さらに、$[\mathfrak{B}]_2$は$R_\delta$で invariant 故 $\bigcap_{n\geq 0} L_\delta^n[\mathfrak{B}]_2$も R_δ-invariant. そこで、$R_\delta P_\infty R_\delta^* \leq P_\infty$. Rは finiteであるから, $R_\delta P_\infty R_\delta^* = P_\infty$。また $[\mathfrak{B}]_2$ は$\mathcal{R}(M)$を reduceするから, $\bigcap_{n\geq 0} L_\delta^n[\mathfrak{B}]_2$もreduceする。そこで. $P_\infty \in \mathcal{L}$. 以上から, $P_\infty \in \mathfrak{Z}(\mathcal{L})$。さらに.

$$P_\infty = P_\infty \cdot 1 \in P_\infty L^2 = \bigcap_{n\geq 0} L_\delta^n[\mathfrak{B}]_2 \subset [\mathfrak{B}]_2$$

よって , $P_\infty \in \mathfrak{Z}(\mathcal{L}) \cap \hat{\mathfrak{B}}$ が成り立つ。

今, $\mathcal{L}$が factor なら, $P_\infty = 0$で$[\mathfrak{B}]_2$が pureがわかる。よって、$\mathcal{L}$が factorでないと仮定する。$\mathfrak{Z}(\mathcal{L}) \cap \hat{\mathfrak{B}}$は $\mathfrak{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_+$

を含む $\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ の σ-weakly closed subalgebra である。そこで、
Lemma 3.6 と $H^\infty(\mathbb{T})$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ で maximal σ-weakly closed subalg
であることから、(i) $\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+$ あるいは (ii).
$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ である。

Case (i) $P_\infty \in \mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+ \cong H^\infty(\mathbb{T})$ 故、$H^\infty(\mathbb{T})$ の function の support
は 0 と 1 であるから、$P_\infty = 0$.

Case (ii). $\mathfrak{Z}(\mathcal{L})\cap\hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ 故 $\hat{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{Z}(\mathcal{L})$。そこで $\mathcal{C}$ を $\mathcal{L}_+$ と
$\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ によって生成された $\mathcal{L}$ の σ-weakly closed subalgebra とす
る。$\mathcal{C}$ は $\mathcal{L}_+ \subsetneqq \mathcal{C} \subseteq \hat{\mathfrak{B}} \subsetneqq \mathcal{L}$ をみたす $\mathcal{L}$ の $\hat{\beta}$-invariant
subalgebra である。これは、Lemma 3.5 に矛盾 //.

Proof of (2) $\Longrightarrow$ (1) of Theorem 3.1.

今 M が factor でないと仮定する。M の center を $\mathfrak{Z}(M)$ と
かくことにする。

Case (i) α は $\mathfrak{Z}(M)$ 上 ergodic でないとする。このとき、
0, 1 と異なる α-invariant projection $e \in \mathfrak{Z}(M)$ がある。
$\mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}_+$ と $e\mathcal{L}$ によって生成された σ-weakly closed subalg
とすると $\mathfrak{B}$ は明らかに $\mathcal{L}_+$ を proper に含む $\mathcal{L}$ の σ-weakly
closed subalgebra になる。

Case (ii). α は $\mathfrak{Z}(M)$ 上 ergodic と仮定する。$\mathcal{L}_+$ が not
maximal を示すために、L^2 の non-reducing left-invariant
subspace $\mathfrak{M}$ で $x\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ かつ、$\exists x \notin \mathcal{L}_+$ なるものをみ

つける。αは$\mathfrak{z}(M)$上で ergodic 故 $e\perp\alpha^{-1}(e)$ をみたす $e\in\mathfrak{z}(M)$がある。今 $(E_n f)(m) = \begin{cases} f(n) & (n=m) \\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$ $(f\in L^2)$ とおく。このとき

$$\mathfrak{M} = \{f\in L^2 : E_n f = 0\ (n<-1),\ eE_{-1}f = E_{-1}f\}$$

とおく。このとき、$L(M)\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$, $L_\delta\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ かつ $e\in\mathfrak{z}(M)$ とこで、$\mathcal{L}_+\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ であるが、$L_eL_\delta^*\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$、一方、$L_eL_\delta^*\notin\mathcal{L}_+$。従って、$\mathcal{L}_+$は maximal でない。 //

REFERENCES

[1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.

[2] W. B. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Funct. Anal. 15(1974), 217-243.

[3] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta. Math., 99(1958), 165-202.

[4] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.

[5] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann algebras, to appear in J. Funct. Anal.

[6] G. Mackey, Point realizations of transformation groups, Illinois. J. Math., 6(1962), 327-335.

[7] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self adjoint crossed products, in preparation.

[8] P. S. Muhly, Maximal weak*-Dirichlet algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 515-518.

[9] V. A. Rohlin, Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Amer. Math. Soc. Trans., 49(1966), 171-240.

[10] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.

[11] K. -S. Saito, On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, to appear in Tohoku Math. J., 29(1977).

[12] K. -S. Saito, On maximality of $H^{\infty}(\alpha)$ in finite von Neumann algebras, Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A, 14(1977), 1-3.

[13] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integrations, Ann. Math., 57(1953), 401-457.

[14] M. Takesaki, The structures of a von Neumann algebras with a homogeneous periodic state, Acta. Math., 131(1973), 79-121.

[15] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structures of von Neumann algebras of type III, Acta. Math., 131(1973),

249-310.

[16] G. Zeller-Meier, Sur produits croises d'une C*-algebre par un groupe d'automorphismes, J. Math. Pure et Appli., 47 (1968), 101-239.