数理解析研究所講究録
第314巻 1977年 65-73

commutation theorem をめぐるいくつかの話題

山形大 理　富山 淳

§1. まえがき. N_1, N_2 をヒルベルト空間 H_1, H_2 上の von Neumann 環としそのテンソル積を $N_1 \bar{\otimes} N_2$ とかくことにする。この時一般に commutation theorem と言われている次の関係

$$(N_1 \bar{\otimes} N_2)' = N_1' \bar{\otimes} N_2'$$

が成立する。この結果は富田－竹崎理論の帰結として富田によって初めて一般的に証明されて以来種々な単純化又は一般化が試みられている。ここではこれらのすべてと異った slice map によるこの定理の解釈をとりあげる。この形により定理は各種のテンソル積における固有な問題を統一的に含むことになる。この講演はそれらの中で2つの場合をとりあげて考えてみることにする。

§2. von Neumann 環の commutation theorem の変形

M_1, M_2 を von Neumann 環, N_1, N_2 をその von Neumann 部分環とする. このとき $N_1 \bar{\otimes} N_2$ は $M_1 \bar{\otimes} M_2$ の部分環と考えられる. 今 φ を M_1 上の σ-weakly に連続な汎関数としたとき $M_1 \bar{\otimes} M_2$ より M_2 への右 slice map R_φ を

$$R_\varphi(a \otimes b) = \langle a, \varphi \rangle b$$

で定義する. R_φ は σ-位相で連続な線形写像である. ([8], [9] 等) 同様に M_2 上の σ-weakly continuous な汎関数 ψ に対しては左 slice map

$$L_\psi : M_1 \bar{\otimes} M_2 \longrightarrow M_1 \qquad L_\psi(a \otimes b) = \langle b, \psi \rangle a$$

が定義出来る. これらの写像は次の性質をもっている

(1) $R_\varphi((1 \otimes a) x (1 \otimes b)) = a R_\varphi(x) b \qquad a, b \in M_2$

$$L_\psi((c \otimes 1) x (d \otimes 1)) = c L_\psi(x) d \qquad c, d \in M_1$$

(2) $\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$

$$x \in M_1 \bar{\otimes} M_2.$$

(3) $\{R_\varphi \mid \varphi \in M_{1*}\}$, $\{L_\psi \mid \psi \in M_{2*}\}$ は共に $M_1 \bar{\otimes} M_2$ 上で total である. 即ち

$$R_\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in M_{1*} \quad \text{ならば} \quad x = 0.$$

M_1, M_2 が空間 H_1, H_2 に作用しているとし, 夫々の上の有界線型作用素のつくる von Neumann 環を $B(H_1), B(H_2)$ とし $B(H_1) \bar{\otimes} B(H_2)$ を考えると, $\varphi \in M_{1*}$ の $B(H_1)$ 上への σ-weakly 連続な汎関数としての拡大を $\tilde{\varphi}$ とすれば, slice map $R_{\tilde{\varphi}}$ の

$M_1 \bar{\otimes} M_2$ への制限は R_φ にほかならない.

$$\mathfrak{F}(N_1, N_2) = \{x \in M_1 \bar{\otimes} M_2 \mid R_\varphi(x) \in N_2,\ L_\psi(x) \in N_1,\ \varphi \in M_{1*},\ \psi \in M_{2*}\}$$

とおく。次の結果は commutation theorem の才一の変形である. ([8], [16])

定理 2.1 (W^*-slice map の定理)

$$\mathfrak{F}(N_1, N_2) = N_1 \bar{\otimes} N_2 .$$

この結果は $M_1 = B(H_1)$, $M_2 = B(H_2)$ の時は slice map の前述の性質からわかるように

$$\mathfrak{F}(N_1, N_2) = (N_1' \bar{\otimes} N_2')'$$

となることから実は commutation theorem と同値な命題になっている. テンソル積の問題は上の定理の形になることが多い.

さて $M_1 \bar{\otimes} M_2$ の σ-位相で連続な汎関数の全体, predual はよく知られているように M_1, M_2 の predual M_{1*}, M_{2*} の汎関数のノルムでのテンソル積 $M_{1*} \otimes M_{2*}$ と一致する. $M_{1*} \odot M_{2*}$ を代数的なテンソル積の部分とする. $(N_1 \bar{\otimes} N_2)_*$ の元はノルムを保存して $(M_1 \bar{\otimes} M_2)_*$ の元にまで拡大出来るわけであるが代数的なテンソル積に限って言うと、上の結果から次のことが成立する.

定理 2.2 $k > 1$ を固定する. この時任意の汎関数 $\omega \in N_{1*} \odot N_{2*}$ は $M_{1*} \odot M_{2*}$ 内への拡大 $\hat{\omega}$, $\|\hat{\omega}\| \leq k\|\omega\|$

をもつ。

証明は定理2.1から $M_{1*}\odot N_2^\circ + N_1^\circ \odot M_{2*}$ が $M_{1*}\otimes M_{2*}$ での $N_1\bar{\otimes}N_2$ の polar $(N_1\bar{\otimes}N_2)^\circ$ の中でノルム dense なことが言えるから、はじめに ω のノルムを保存した拡大 $\hat{\omega}$ と $M_{1*}\odot M_{2*}$ への任意の拡大 $\tilde{\omega}'$ をとり $\hat{\omega}-\tilde{\omega}'\in(N_1\bar{\otimes}N_2)^\circ$ の形を上のことで調整すればよい。

上の結果は又 commutation theorem の才二の変形でこの定理から commutation theorem をみちびくことも出来る。それには先ず $\tilde{\varphi}$, $\hat{\varphi}$ を $\varphi\in N_{1*}$ の M_1 への拡大, $\tilde{\psi}$, $\hat{\psi}$ を $\psi\in N_{2*}$ の M_2 への拡大とすると、$x\in \mathfrak{R}(N_1, N_2)$ について

$$\langle x, \hat{\varphi}\otimes\hat{\psi}\rangle = \langle R_{\hat{\psi}}(x), \hat{\varphi}\rangle = \langle R_{\tilde{\psi}}(x), \hat{\varphi}\rangle$$
$$= \langle L_{\hat{\varphi}}(x), \tilde{\psi}\rangle = \langle L_{\tilde{\varphi}}(x), \tilde{\psi}\rangle = \langle x, \tilde{\varphi}\otimes\tilde{\psi}\rangle$$

即ち $\varphi\otimes\psi$ は $\mathfrak{R}(N_1, N_2)$ 上では product functional としての拡大は一意である。よって又 $M_{1*}\odot M_{2*}$ の元の形としての拡大も一意になる。従って任意の $\omega\in N_{1*}\odot N_{2*}$ について ω の拡大 $\hat{\omega}|\mathfrak{R}(N_1, N_2)$ （$\hat{\omega}\in M_{1*}\odot M_{2*}$）は一意である。これから今上の $\hat{\omega}$ を $\|\hat{\omega}\|\leq k\|\omega\|$ ととることにすると、$\mathfrak{R}(N_1, N_2)$ の元 x は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\otimes\psi_i \in N_{1*}\odot N_{2*} \longrightarrow \hat{\omega} = \sum_{j=1}^{m}\sigma_j\otimes\tau_j \in M_{1*}\odot M_{2*}$$

$$\longrightarrow \langle x, \hat{\omega}\rangle = \sum_{j=1}^{m}\langle x, \sigma_j\otimes\tau_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, \hat{\varphi}_i\otimes\hat{\psi}_i\rangle$$

によって $N_{1*} \odot N_{2*}$ 上の有界線型汎関数を定義する。よって $N_1 \bar{\otimes} N_2$ の元 y があって

$$\langle x, \hat{\omega} \rangle = \langle y, \omega \rangle \quad \forall\, \omega \in N_{1*} \odot N_{2*}$$

これから $x = y \in N_1 \bar{\otimes} N_2$ で定理2.1が得られる。

定理2.2は Wassermann [16] による。上のような k は特別な時、例えば N_1, N_2 上へ M_1, M_2 から normal なノルム1の射影写像があるときなどは $k=1$ としてとることが出来るが一般には無理である。

以下に commutation theorem をもっと一般的に考えようとするのは定理2.1の形である。

§3. von Neumann 環の C^*-テンソル積の場合。前節と同じ設定で(spacial な) C^*-テンソル積 $B(H_1) \otimes_\alpha B(H_2)$ を考える。$M_1 \otimes_\alpha M_2$ は $B(H_1) \otimes_\alpha B(H_2)$ の C^*-部分環である。この時 $B(H_1)$ 及び $B(H_2)$ 上の有界線型汎関数 φ, ψ に対してそれぞれノルム連続な右,左の slice map R_φ, L_ψ が定義出来る。そして R_φ, L_ψ を $M_1 \otimes_\alpha M_2$ に制限したものは又 M_1, M_2 上の汎関数 $\varphi|M_1$, $\psi|N_2$ による slice map とも考えられる。

定理2.1と連関してこの時自然に考えられることは次の問題である。即ち

$$F(M_1, M_2) = \{ x \in B(H_1) \otimes_\alpha B(H_2) \mid R_\varphi(x) \in M_2,\ L_\psi(x) \in M_1$$

$\varphi \in B(H_1)^*, \quad \psi \in B(H_2)^* \}$

とおくとき $F(M_1, M_2)$ は $M_1 \underset{\alpha}{\otimes} M_2$ と一致するであろうか？

これについては先ず $F(M_1, M_2)$ が C^*-環であること(実際 commutation theorem から

$$F(M_1, M_2) = M_1 \bar{\otimes} M_2 \cap B(H_1) \underset{\alpha}{\otimes} B(H_2)$$

となる)、や M_1, M_2 が injective な von Neumann 環の時には一致することがわかっているが ([9])、一般にどうなるかは知られていない。しかし次のことが成立する。

定理 3.1 $F(M_1, M_2)$ は M_1, M_2 の表現空間 H_1, H_2 に依存しない。

証明は富山[11] にゆずる。

上の問題は結局 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ と $M_1 \underset{\alpha}{\otimes} M_2$ との違いが一般には両者が一致しないということ以外に現在何もわかっていないことに起因している。$M_1 \bar{\otimes} M_2$ のどの元が $M_1 \underset{\alpha}{\otimes} M_2$ に入っているかもしろい判定条件がみつかれば興味のあることと思われるが以下にその一つの candidate をのべてみる。M_1 上の通常の有界線型汎関数 φ をとり、$x \in M_1 \bar{\otimes} M_2$ を固定すると

$$\langle \psi, f_{\varphi,x} \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

によってそれは M_{2*} 上の有界線型汎関数 $f_{\varphi,x}$ を定義する。従って M_2 の元 $R_\varphi(x)$ が存在して、任意の $\psi \in M_{2*}$ について

$$\langle L_\psi(x), \varphi \rangle = \langle \psi, f_{\varphi,x} \rangle = \langle R_\varphi(x), \psi \rangle$$

となる。つくり方から $R_\varphi ; x \longrightarrow R_\varphi(x)$ は $M_1 \otimes_\alpha M_2$ 上のノルム連続な slice map の $M_1 \overline{\otimes} M_2$ への拡大である。この R_φ を一般化された slice map と呼ぶことにする。ここで C^*-テンソル積 $M_1 \otimes_\alpha M_2$ の元 x に対しては

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

が任意の $\varphi \in M_1^*$, $\psi \in M_2^*$ について成立するが一般の $M_1 \overline{\otimes} M_2$ の元に対しては上のつくり方から $\{\varphi \in M_1^*, \psi \in M_{2*}\}$ 又は $\{\varphi \in M_{1*}, \psi \in M_2^*\}$ という組合せの時に成立つことがわかる。もし固定した $\varphi \in M_1^*$ について上のことが任意の $\psi \in M_2^*$ 及び $x \in M_1 \overline{\otimes} M_2$ について成立すれば φ は一般には σ-weakly continuous になってしまう（[9; 定理 5.1]）。従って上の等式（Fubini principle と呼ぶ）は我々の問題に関係が深いと推察されるが上の式だけでは M_1 がたとえ可換の時でも x が $M_1 \otimes_\alpha M_2$ の元であるとは保証出来ない。従って次の candidate として以下の条件を考える。

(*) $\varphi \in M_1^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in M_2$ は、M_1^* の単位球上で、M_1^* に汎弱位相, M_2 にノルム位相を考えたとき連続である。

これは元 x について写像; $\psi \in M_2^* \longrightarrow L_\psi(x) \in M_1$ が上のような形で連続であるということと同値になっている。

命題 3.2. M_1 が type I_n 型の有限和の時（M_2 は任意でよい）、(*)の条件は $M_1 \overline{\otimes} M_2$ の元が $M_1 \otimes_\alpha M_2$ に入るための判

定条件をみたしている。

証明. 先ず M_1 が可換な時は (*) は x が M_1 の character の空間上の M_2-valued な連続関数をひき起すことを示しているから、$M_1 \otimes_\alpha M_2$ の連続関数環としての characterization から結論が得られる. 次に $M_1 = A \otimes M_n = A \otimes_\alpha M_n$ (A は可換な von Neumann 環, M_n は $n \times n$ の行列環) の時は, $\{e_{ij}\}$ を M_n の matrix units $\{\varphi_{ij}\}$ をその dual な汎関数の系とする. t を A の character とすると $R_t(x) \in M_n \otimes_\alpha M_2$ は M_2 上の matrix $(R_{\varphi_{ij}}(R_t(x)))$ となる. A_* の単位球は A^* の単位球内で汎弱稠密になっているから ([6; 定理 1]) $\{\varphi_\alpha\} \subset A_*$ を t に弱収束するようにとると, 任意の $\psi \in M_{2*}$ について, (*) を使えば

$$\langle R_{\varphi_{ij}}(R_t(x)),\ \psi \rangle = \langle R_t(x),\ \varphi_{ij} \otimes \psi \rangle = \langle L_{\varphi_{ij} \otimes \psi}(x),\ t \rangle$$

$$= \lim_\alpha \langle L_{\varphi_{ij} \otimes \psi}(x),\ \varphi_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle x,\ \varphi_\alpha \otimes \varphi_{ij} \otimes \psi \rangle$$

$$= \lim_\alpha \langle R_{\varphi_\alpha \otimes \varphi_{ij}}(x),\ \psi \rangle = \langle R_{t \otimes \varphi_{ij}}(x),\ \psi \rangle$$

よって $t \longrightarrow R_{t \otimes \varphi_{ij}}(x) = R_{\varphi_{ij}}(R_t(x))$ は t についてノルム連続な関数であり, 従って matrix 関数 $t \longrightarrow R_t(x)$ も $M_n \otimes_\alpha M_2$-valued なノルム連続関数になる. よって x は $M_1 \otimes_\alpha M_2 = A \otimes_\alpha (M_n \otimes_\alpha M_2)$ の元である. M_1 が上の形の環の有限和の時にはこれをつみ重ねればよい. 証明了.

(*) については前にのべた $M_1 \otimes_\alpha M_2$ から $F(M_1, M_2)$ (以下

M_1, M_2 の $B(H_1)\otimes_\alpha B(H_2)$ に関する Fubini積と呼ぶことにする) への product functional $\varphi\otimes\psi$ の拡大の一意性から $F(M_1, M_2)$ の元については $\varphi\in M_1^* \longrightarrow R_{\tilde\varphi}(x)$ (値は ψ の拡大 $\tilde\varphi$ に依らない) が (*) をみたすことがわかっている. 従って (*) の条件は前の $F(M_1, M_2)=M_1\otimes_\alpha M_2$? の問題と密接に関係しているわけである. $F(M_1, M_2)$ は又次のような受けとり方も出来る. $M_1\bar\otimes M_2$ は $M_1\odot M_2$ の $B(H_1\otimes H_2)$ での locally convex 位相による閉包であった. この形でのテンソル積の他の例は multiplier でも考えられる. 即ち A, B を一般に単位元をもたない C^*-環としたとき $A\otimes_\alpha B$ の multiplier $M(A\otimes_\alpha B)$ はほとんどの場合 $M(A)\otimes_\alpha M(B)$ と一致しないことが知られている([ ])が その状況は $M(A\otimes_\alpha B)$ が $M(A)\odot M(B)$ の $A\otimes_\alpha B$ による strict Topology による閉包として定義された別種のテンソル積と考えれば, ノルム閉包である $M(A)\otimes_\alpha M(B)$ と一致しないのは, $M_1\bar\otimes M_2$ と $M_1\otimes_\alpha M_2$ の時と同じくむしろ当然であると考えられる. $F(M_1, M_2)$ が $M_1\otimes_\alpha M_2$ と一般に一致しないのであれば, これも又 M_1 と M_2 のテンソル積として考えるべきであろうが それが $M_1\odot M_2$ の何らかの閉包と考えられるのかどうか今の所は何もわかってはいない。

文献は共通文献の項に記載