数理解析研究所講究録
第315巻 1977年 15-26

Lagrange展開と攝動論

京都產業大學 理學部 井上 猛

Le développement de Lagrange et la théorie des perturbations.

par Takeshi INOUE,
Faculté des sciences, Université Kyoto-Sangyo.

1. 先づ初めに我々がここでLagrane展開と名付けたものが如何なるものであるかを概觀しておかう. それは一つの呼稱が未だ定着してはゐないからである.

定數αを一つ與へ函數$\varphi(x)$を適當な定義域で定義されたC^∞級の函數であるとする時未知數xに關する次の形の方程式:

(1) $\alpha - x + \varphi(x) = 0,$

に對しLagrangeは$x=\alpha$の近傍に存在する一根pを次の形に與へた:

(2) $$p = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\varphi(x)\right\}^n\right]_{x=\alpha}.$$

更に此のpを引數とするC^∞級の任意の函數を$\psi(p)$とすればこれが次の様に表はされる事をも示した:

(3) $$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\left\{\varphi(x)\right\}^n\right)\right]_{x=\alpha}.$$ (甲)

(甲) Lagrange, J. L., Oeuvres III (1770) p. 25.

Laplaceは方程式(1)をxに關する反轉の問題と見立てて同種の議論を展開したがLagrangeの結果と選ぶ處は無いと考へ

られる。[乙]

(乙) Laplace, P.S., Celestial Mechanics vol. I (1829) p. 363.

これらの結果に對する一般的證明は多くの天體力學書に見出されるが中でもSmartのものは明解なものの一つに數へられやう。[丙]

(丙) Smart, W.M., Celestial Mechanics (1953) p. 27.

無限小解析學や函數論の分野での數學書は方程式(1)を少しく一般化して陰函數の存在定理に關する問題として捉へてみるものが多い。[丁1] [丁2] [丁3]

(丁1) Whittaker, E.T. and Watson, G.N., A Course of Modern Analysis (1927) p. 132.

(丁2) Goursat, E., Cours d'analyse mathématique Tome I (1927) p. 471.

(丁3) Dieudonné, J., Calcul infinitésimal (1968) p. 250.

因みに我々が依って立って居る處をDieudonné の表記を借りて明示しておかう：

『實の一變數函數 $f(x)$ が區間 I：$|x-x_0|\leqq r$ で連續的に微分可能でかつ導函數 $f'(x)$ が符號を變へないならば兩端點を夫々 $f(x_0-r)$, $f(x_0+r)$ に持つ區間 J 内の任意の値 y に對して方程式 $f(x)=y$ は區間 I 内で唯一個の根 $x=h(y)$ を有する．此の時函數 $h(y)$ は區間 J 内で連續的に微分可能である』

先のLagrangeの場合のに表記を合はせるにはyをαとし$f(x)$を$x-\varphi(x)$と書き換へさへすれば良いのが知れる。

尚呼稱の未定着振りを示してみるならば以下の様である：

- Laplace, Theorem of Lagrange,
- Dziobek, Lagrange's series(戊),
- Smart, Lagrange's expansion theorem,
- Whittaker, Lagrange's theorem,
- Goursat, formule de Lagrange,
- Dieudonné, formule d'inversion de Lagrange,
- 井上, Lagrange展開, développement de Lagrange(己).

(戊) Dziobek, O., Mathematical Theories of Planetary Motions (1892) p.23.

(己) 井上猛, 第七回天體力學研究會集錄 (1973) p.30.

2. 人工衛星の運動理論を展開するのに際してBrouwerが發掘したvon Zeipelの方法は天體力學に現はれる攝動問題の殆んど大部分のものを扱ふ事が出來る程に一般的であると言へやう。何となれば獨立變數が一個である微分方程式系は原理的にHamiltonの正準方程式系に書き換へられるが此の系に變數變換を施して積分可能な系に移すのにこれを可能なら使める發生函數を一つの未知函數として解く問題に還元でき

る種類のものであればすべてvon Zeipelの方法で論ずる事が出来るからである。[庚]

[庚] Brouwer, D., Astron. J. vol. 64 (1959) p. 378.

同様な攝動一般理論に堀氏のに始まるLie變換の方法に依るものがあるが長短を有して居って雌雄は決し難いと考へて居る。[辛]

[辛] Hori, G., Publ. Astron. Soc. Japan vol. 18 (1966) p. 287.

本小論ではvon Zeipel流の攝動論とLagrange展開の應用に依って一段と見通し良く展開できる事を示さうと思ふ。これを實行するに際しては人工衛星の運動理論を下敷にしてゐる事を告白して置く。

初發の運動方程式系が次の形をして居るものとする：

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial l},\ \dfrac{dG}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial g},\ \dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial h}, \\[2mm] \dfrac{dl}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial L},\ \dfrac{dg}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial G},\ \dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial H}; \end{cases}$$

$$(5)\quad F\equiv F(L,G,H;l,g)=F_{(0)}(L)+\varepsilon F_{(1)}(L,G,H;l,g)+\cdots\ .$$

ここでHamilton函數Fは適當な定義域でC^∞級であるとし微小な正定數εの整冪に展開できるものとする. 右邊第一項の$F_{(0)}(L)$は微小數εには無關係な變數Lのみに依存する部分を表はすものとする。これに發生函數Sに依る時の次の形の正準變換：

$$(6)\quad \begin{cases} L=\dfrac{\partial S}{\partial l}, \quad G=\dfrac{\partial S}{\partial g}, \quad H=\dfrac{\partial S}{\partial h}, \\ l^*=\dfrac{\partial S}{\partial L^*}, \quad g^*=\dfrac{\partial S}{\partial G^*}, \quad h^*=\dfrac{\partial S}{\partial H^*}; \end{cases}$$

$$(7)\quad S=S(L^*,G^*,H^*;l,g)= \\ =L^*l+G^*g+H^*h+\varepsilon S_{(1)}(L^*,G^*,H^*;l,g)+\cdots,$$

を施して次なる正準方程式系：

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dL^*}{dt}=\dfrac{\partial F^*}{\partial l^*}, \quad \dfrac{dG^*}{dt}=\dfrac{\partial F^*}{\partial g^*}, \quad \dfrac{dH^*}{dt}=\dfrac{\partial F^*}{\partial h^*}, \\ \dfrac{dl^*}{dt}=-\dfrac{\partial F^*}{\partial L^*}, \quad \dfrac{dg^*}{dt}=-\dfrac{\partial F^*}{\partial G^*}, \quad \dfrac{dh^*}{dt}=-\dfrac{\partial F^*}{\partial H^*}; \end{cases}$$

$$(9)\quad F^*=F^*(L^*,G^*,H^*;g^*)=F^*_{(0)}(L^*)+\varepsilon F^*_{(1)}(L^*,G^*,H^*;g^*)+\cdots,$$

に移る事を考へる。新しく得られた Hamilton 函數 F^* の精度が問題であるとは言へ (8), (9) 式で與へられる系は容易に積分できる系に一歩近づいたものである事が見て取れる。從って努むべきはかかる變換を可能ならしめるが如き發生函數 S を求めるに在る。變換 (6), (7) は獨立變數 t を含まない恒等變換の ε 近傍での變換に他ならないから Hamilton 函數保存の關係式が成立する。これを點 $(L^*,G^*,H^*;l,g)$ のまはりで Taylor 展開する事を考へる。此の時に偏微係數 F_L, F_G は夫々微小數 ε の零次、一次の大きさから始まるものと假定するがこれは變數 l, g を夫々短周期的、長周期的となるやう假定した事に對應する。更に偏微係數 $F^*_{g^*}$ は微小數 ε の二次

の大きさから始まるものと假定する.

3. 未知函數 $\varepsilon S_{(1)}(L^*, G^*, H^*; l, g)+\cdots$ は積分可能條件を滿足してゐるものと假定する。即ち次の形の全微分形式が成立するものと假定:

(10) $$d\varepsilon S_{(1)}=\frac{\partial\varepsilon S_{(1)}}{\partial l}dl+\frac{\partial\varepsilon S_{(1)}}{\partial g}dg+\frac{\partial\varepsilon S_{(1)}}{\partial G^*}dG^*\ ;$$

ここでは單なる $\varepsilon S_{(1)}$ なる表記の中に高次の項も含まれてゐるものとした。更に初發および新規の Hamilton 函數の特殊性から變數 L^*, H^* の定數なる事が知れるから上式では $dL^*\equiv 0$, $dH^*\equiv 0$ を考慮しておいた。

計算を手際良く運ぶ目的で次の略記號を導入する:

(11) $$x\equiv\frac{\partial\varepsilon S_{(1)}}{\partial l}+\cdots,\quad y\equiv\frac{\partial\varepsilon S_{(1)}}{\partial g}+\cdots,\quad Z^*\equiv\frac{\partial\varepsilon S_{(1)}}{\partial G^*}+\cdots.$$

微分形式(10)を滿足する函數 $\varepsilon S_{(1)}+\cdots$ はこれらの記號を用ゐる事に依って次の樣に表はされる:

(12) $$\varepsilon S_{(1)}+\cdots=\int_{l_0}^{l}x(L^*, G^*, H^*; \lambda, g)d\lambda+\int_{g_0}^{g}y(L^*, G^*, H^*; l_0, \gamma)d\gamma+ +\int_{G_0^*}^{G^*}Z^*(L^*, \Gamma^*, H^*; l_0, g_0)d\Gamma^*.$$

これを見れば右邊の第一項目は短周期攝動に第二項目は長周期攝動に第三項目は永年攝動に對應してゐるものと考へられる。從って變數 l に依存する短周期攝動部分のみに着目する事に議論を限るならば量 x を知れば充分なることが知れる。

更に此の場合の量yおよびZ^*は量xに依って與へられる事も知れる。そこで次の様な左側線型演算子を導入：

(13) $\quad p\equiv\dfrac{\partial}{\partial g}\int dl \quad , \quad P^*\equiv\dfrac{\partial}{\partial G^*}\int dl \ ,$

量yおよびZ^*を次の様に置く事にする：

(14) $\quad y=px \ , \quad Z^*=P^*x \ .$

これらをHamilton函數保存の關係式に考慮してTaylor展開に訴へれば未知量xのみに關する方程式が得られる事になつて我々のLagrange展開に依つて根xを求める事が出來る。此の時に量xが微小量εの零次から始まる偏微係數F_Lを係數に持つてゐる事がLagrange展開を可能にして呉れてゐる事實には注目して置いても良い。

4. Hamilton函數保存の關係式：

(15) $\quad F(L,G,H;l,g)-F^*(L^*,G^*,H^*;g^*)=0 \ ,$

に上記略記號を考慮してTaylor展開、微小量εの四次の大きさ迄を考慮して置き出してみるならば次の様である：

(16) $$\{F(L^*,G^*,H^*;l,g)-F^*(L^*,G^*,H^*;g)\}+(F_L+F_Gp-F^*_{g^*}P^*)x+$$
$$+\frac{1}{2}F_{LL}x^2+F_{LG}x\,px+\frac{1}{2}F_{GG}(px)^2+\frac{1}{3!}F_{LLL}x^3+\frac{1}{2}F_{LLG}x^2px+$$
$$+\frac{1}{2}F_{LGG}x(px)^2+\frac{1}{3!}F_{GGG}(px)^3+\frac{1}{4!}F_{LLLL}x^4+\frac{1}{2}F^*_{g^*g^*}(P^*x)^2+\cdots=0.$$

上では明記してはゐないが各偏微係數および量xの引數はすべて$(L^*,G^*,H^*;l,g)$の中の幾つかが適宜考慮されてゐるもの

とする。ここで函數F_Lは變數Lのすべての値に對して符號を變へる事が無いと假定しよう。人工衛星の運動理論の場合がさうであった。此の時には直ちに次の形のLagrange展開が得られる事になる：

$$(17)\qquad x=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{\varphi(x)\}^n\right]_{x=\alpha},$$

$$(18)\qquad \alpha=\left(1+\frac{F_G}{F_L}p-\frac{F^*_{g^*}}{F_L}P^*\right)^{-1}\frac{F^*(L^*,G^*,H^*;g)-F(L^*,G^*,H^*;l,g)}{F_L},$$

$$(19)\qquad \varphi(x)=\left(1+\frac{F_G}{F_L}p-\frac{F^*_{g^*}}{F_L}P^*\right)^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{F_{LL}}{F_L}x^2-\frac{F_{LG}}{F_L}xpx+\right.$$
$$-\frac{1}{2}\frac{F_{GG}}{F_L}(px)^2-\frac{1}{3!}\frac{F_{LLL}}{F_L}x^3-\frac{1}{2}\frac{F_{LLG}}{F_L}x^2px-\frac{1}{2}\frac{F_{LGG}}{F_L}x(px)^2+$$
$$\left.-\frac{1}{3!}\frac{F_{GGG}}{F_L}(px)^3-\frac{1}{4!}\frac{F_{LLLL}}{F_L}x^4+\frac{1}{2}\frac{F^*_{g^*g^*}}{F_L}(P^*x)^2+\cdots\right\}.$$

ここでHamilton函數FおよびF^*が微小定數εの整冪級數に展開されてゐる事に鑑み次の様な略記號：

$$(20)\qquad \mathcal{F}\equiv\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}+\varepsilon^2\mathcal{F}_{(2)}+\varepsilon^3\mathcal{F}_{(3)}+\cdots\equiv F^*(L^*,G^*,H^*;g)-F(L^*,G^*,H^*;l,g),$$

を導入して(17)式に依る時の解を量εの三次の大きさ迄考慮したものを以下に書き出してみる。

$$(21)\qquad x=\alpha+\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)+\cdots=$$
$$=\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}+\left[\frac{\varepsilon^2\mathcal{F}_{(2)}}{F_{(0)L}}-\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}-\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}-\frac{1}{2}\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^2\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^3\mathcal{F}_{(3)}}{F_{(0)L}}-\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon^2\mathcal{F}_{(2)}}{F_{(0)L}}-\frac{\varepsilon^2F_{(2)L}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}+\left\{\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\right\}^2\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}-\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\frac{\varepsilon^2\mathcal{F}_{(2)}}{F_{(0)L}}+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\left\{\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}+\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}-\frac{\varepsilon^2 F_{(2)G}}{F_{(0)L}}p\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}+\\
&+\left\{\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\right\}^2\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}-\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon^2\mathcal{F}_{(2)}}{F_{(0)L}}+\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^2+\\
&+\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}+\frac{1}{2}\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon F_{(1)L}}{F_{(0)L}}\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^2-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon F_{(1)LL}}{F_{(0)L}}\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^2+\\
&-\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\frac{\varepsilon F_{(1)LG}}{F_{(0)L}}p\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon F_{(1)GG}}{F_{(0)L}}\left\{p\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^2-\frac{1}{3!}\frac{F_{(0)LLL}}{F_{(0)L}}\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^3+\\
&+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon F_{(1)G}}{F_{(0)L}}p\left[\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^2\right]+\frac{\varepsilon^2 \overset{*}{F}_{(2)g^*}}{F_{(0)L}}p^*\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}+\frac{1}{2}\left\{\frac{F_{(0)LL}}{F_{(0)L}}\right\}^2\left\{\frac{\varepsilon\mathcal{F}_{(1)}}{F_{(0)L}}\right\}^3+\cdots .
\end{aligned}
$$

實は此のままでは發生函數 $\varepsilon S_{(1)}+\cdots$ の變數 l のみに依存する部分と云ふのは未だ抽出されてはゐない。そこで新たな演算子 $\mathbf{I}_0$ を次の様に導入：

(22) $$\mathbf{I}_0 \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dl \quad ,$$

量 x の變數 l に依存しない部分を $\overline{x}$ と書く事にすればそれは次式で與へられる：

(23) $$\overline{x} = \mathbf{I}_0 x \ .$$

かくして眞に短周期的なる部分は次で與へられるのが知れた：

(24) $$\frac{\partial \varepsilon S_{(1)}(L^*, G^*, H^*; l, g)}{\partial l}+\cdots = x-\overline{x} = (1-\mathbf{I}_0)x \ .$$

これで見るにひとたび表式(21)を得て置くならば平均化の積分操作(22)を唯一回施せば良い事が知れる。

表式：$(1-\mathbf{I}_0)x$ が變數 l に無關係な量を含まないやうにすると云ふ要請から新規Hamilton函數 $F^*(L^*, G^*, H^*; g^*)$ が逐次求められる事になる。但し(24)式の函數 $\varepsilon S_{(1)}+\cdots$ を求めるに

際しては必ずしも此の新しい函數F^*の具體的な表式迄も知る必要は無く唯單にそれが如何なる形で存在してゐるかと云ふ事のみが必要となつて來る。

尚我々の得た結果が從來の計算方式に依るものと完全に一致する事が確められた。(主)

(主) Kozai, Y., Astron. J. vol. 67 (1962) p. 446.

5. 發生函數$\varepsilon S_{(1)}+\cdots$に依つて系$F^*(L^*, G^*, H^*; g^*)$に移る事が出來たので今一度變數變換を施して自明の系$F^{**}(L^{**}, G^{**}, H^{**})$に移る事を考へる。先と全く同樣にしてHamilton函數保存の關係式：

(25) $$F^*(L^*, G^*, H^*; g^*)-F^{**}(L^{**}, G^{**}, H^{**})=0,$$

を點$(L^{**}, G^{**}, H^{**}; g^*)$の$\varepsilon$近傍でTaylor展開を次の樣な發生函數$S^*$の導入のもとで行ふ：

(26) $$S^*=S^*(L^{**}, G^{**}, H^{**}; l^*, g^*, h^*)=$$
$$=L^{**}l^*+G^{**}g^*+H^{**}h^*+\varepsilon S^*_{(1)}(L^{**}, G^{**}, H^{**}; g^*)+\cdots\ ;$$

(27) $$\begin{cases} L^*=\dfrac{\partial S^*}{\partial l^*}, & G^*=\dfrac{\partial S^*}{\partial g^*}, \quad H^*=\dfrac{\partial S^*}{\partial h^*}, \\ l^{**}=\dfrac{\partial S^*}{\partial L^{**}}, & g^{**}=\dfrac{\partial S^*}{\partial G^{**}}, \quad h^{**}=\dfrac{\partial S^*}{\partial H^{**}}. \end{cases}$$

再び略記號を導入：

(28) $$y^*\equiv\frac{\partial \varepsilon S^*_{(1)}}{\partial g^*}+\cdots,$$

と置けば(25)式は次の形に展開出來る：

(29) $-\mathcal{F}^{*}+F^{*}_{G^{*}}y^{*}+\frac{1}{2}F^{*}_{G^{*}G^{*}}y^{*2}+\frac{1}{3!}F^{*}_{G^{*}G^{*}G^{*}}y^{*3}+\cdots=0$,

(30) $\mathcal{F}^{*}\equiv\varepsilon^{2}\mathcal{F}^{*}_{(2)}+\varepsilon^{3}\mathcal{F}^{*}_{(3)}+\cdots\equiv F^{**}(L^{**},G^{**},H^{**})-F^{*}(L^{**},G^{**},H^{**};g^{*})$.

ここで函數$F^{*}_{G^{*}}$は微小量εの一次の大きさから始まるが函數$\mathcal{F}^{*}$が二次の大きさから始まるので量y^{*}は原理的には微小量εの一次の大きさに求まる事になつてゐる。しかしながら人工衛星の運動理論に於ては變數$(L^{**},G^{**},H^{**};g^{*})$の定義域内で函數$F^{*}_{G^{*}}$が符號を變へると云ふ事が起り得た。所謂臨界軌道傾斜角の存在である。これはかかる關係：$F^{*}_{G^{*}}=0$の起る様な場合には(29)式に對して陰函數の存在定理が適用できず從つて此のままの形ではLagrange展開に訴へる事も不可能なのであるから別種の取扱が必要なるは明らかである。

函數$F^{*}_{G^{*}}$が$F^{*}_{G^{*}}\simeq 0$である場合の近似理論が微小正數εの平方根で展開される時に首尾良く構築される事は古くから知られてゐる處である。(※)

(※) Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste Tome II (1893) p. 321.

かうした取扱は確に的を射たものであるがLagrange展開に依る場合はさうする事の妥當性が一層自然な形で理解され得る。即ち關係：$F^{*}_{G^{*}}=0$を満すが如き變數の値$(L^{**}_{c},G^{**}_{c},H^{**}_{c};g^{*}_{c})$の

近傍で函數$F^*_{G^*G^*}$が符號を變へないならば(29)式を次の形に書き換へて直ちにLagrange展開に依る表式を書き下すことが出來るからである：

$$(31)\quad \eta \equiv y^{*2},$$

$$(32)\quad y^* \equiv \psi(\eta) = \eta^{\frac{1}{2}};$$

$$(33)\quad \eta = 2\frac{\mathcal{F}^*}{F^*_{G^*G^*}} - 2\frac{F^*_{G^*}}{F^*_{G^*G^*}}\eta^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3!}\frac{F^*_{G^*G^*G^*}}{F^*_{G^*G^*}}\eta^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{4!}\frac{F^*_{G^*G^*G^*G^*}}{F^*_{G^*G^*}}\eta^2 + \cdots;$$

$$(34)\quad \eta = 2\frac{\mathcal{F}^*}{F^*_{G^*G^*}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}\left(2\frac{F^*_{G^*}}{F^*_{G^*G^*}}\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3!}\frac{F^*_{G^*G^*G^*}}{F^*_{G^*G^*}}\eta^{\frac{3}{2}} + \cdots\right)^n\right]_{\eta = 2\frac{\mathcal{F}^*}{F^*_{G^*G^*}}},$$

$$(35)\quad y^* = \left(2\frac{\mathcal{F}^*}{F^*_{G^*G^*}}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}\left\{\frac{1}{2}\eta^{-\frac{1}{2}}\left(2\frac{F^*_{G^*}}{F^*_{G^*G^*}}\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3!}\frac{F^*_{G^*G^*G^*}}{F^*_{G^*G^*}} + \cdots\right)^n\right\}\right]_{\eta = 2\frac{\mathcal{F}^*}{F^*_{G^*G^*}}}.$$

實運動を問題にするのならば函數$\mathcal{F}^*$と$F^*_{G^*G^*}$とは同符號でなければならない事勿論である。

ここでも表式(35)は求める長周期攝動の部分をこのままでは與へては呉れないので以下の處置が必要である：

$$(36)\quad \mathbf{J}^*_0 \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dg^*,$$

$$(37)\quad \overline{y^*} \equiv \mathbf{J}^*_0\, y^*;$$

$$(38)\quad \frac{\partial \varepsilon S^*_{(1)}(L^{**}, G^{**}, H^{**}; g^*)}{\partial g^*} + \cdots = y^* - \overline{y^*} = (1 - \mathbf{J}^*_0)\, y^*.$$

函數$F^*_{G^*}$が符號を變へない點の近傍では通常の展開法に許へれば良い。かくして如何なる場合をもLagrange展開に依って統一的に取扱へる事が知れた。

(77228＃1000
78108◎2150)