数理解析研究所講究録
第315巻 1977年 27-39

非線型振動の摂動論

堀 源一郎 東大・理 天文学教室

1. 正準変換を利用した一般摂動論[1]は非正準系にも適用できるように一般化されたが,[2] それをさらに改良した摂動論に基づいて Duffing の問題を論ずる. Duffing の微分方程式

$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 + \gamma \dot{x} = \beta \cos \omega t, \quad (\omega \neq 1) \tag{1}$$

は, x, $\dot{x}$, t をそれぞれ z_1, z_2, z_3 で表わすと

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_j &= Z_j^{(0)}(z) + Z_j^{(1)}(z), \quad (j=1,2) \\ \dot{z}_3 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここに

$$Z_1^{(0)}(z) = z_2,\ Z_2^{(0)}(z) = -z_1,\ Z_1^{(1)}(z) = 0,\ Z_2^{(1)}(z) = -\alpha z_1^3 - \gamma z_2 + \beta \cos \omega z_3, \tag{3}$$

と書かれる. α, β, γ は1次の微小量である. $\omega \approx 1$ のレゾナンスは後に論じ, まず $\omega \neq 1$ とする.

2. 変換 z_1, z_2, $z_3 \longrightarrow \zeta_1$, ζ_2, ζ_3 を

$$\left.\begin{aligned} z_j &= \zeta_j + T_j^{(1)}(\zeta) + T_j^{(2)}(\zeta) + \cdots, \quad (j=1,2) \\ z_3 &= \zeta_3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

とし, 新変数 ζ によって (2) が

$$\left.\begin{aligned} \dot{\zeta}_j &= Z_j^{*(0)}(\zeta) + Z_j^{*(1)}(\zeta) + Z_j^{*(2)}(\zeta) + \cdots, \quad (j=1,2) \\ \dot{\zeta}_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

と書き換えられたとしよう. $T_j^{(1)}$, $T_j^{(2)}$, $\cdots$ を適当に選んで (5) を解ける形にもってゆく. 以後諸関数の引数は ζ なので明記しない.

3. 0次の $Z_1^{*(0)}$, $Z_2^{*(0)}$ は次によって求められる:

$$Z_1^{*(0)} = Z_1^{(0)} = \zeta_2, \quad Z_2^{*(0)} = Z_2^{(0)} = -\zeta_1. \tag{6}$$

4. 1次以降に進む前に次の補助方程式によってパラメータ τ を導入する:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta_j}{d\tau} &= Z_j^{*(0)}, \qquad (j=1,2) \\ \frac{d\zeta_3}{d\tau} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

その一般解は, $c>0$, c' を τ に関して定数として,

$$\zeta_1 = c\cos\tau, \quad \zeta_2 = -c\sin\tau, \quad \zeta_3 = \tau + c' \tag{8}$$

と与えられる. ただし τ は附加定数 c'' を含むと考える.

5. このとき1次の諸量 $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $Z_1^{*(1)}$, $Z_2^{*(1)}$ は一般論によって次の4式を充たすように求められる:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dT_1^{(1)}}{d\tau} + T_2^{(1)} &= Z_1^{*(1)}, \\ -\frac{dT_2^{(1)}}{d\tau} - T_1^{(1)} + Z_2^{(1)} &= Z_2^{*(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{dZ_1^{*(1)}}{d\tau} = Z_2^{*(1)}, \qquad \frac{dZ_2^{*(1)}}{d\tau} = -Z_1^{*(1)} \tag{10}$$

ここに(10)は $Z_1^{*(1)}$, $Z_2^{*(1)}$ が ζ_1, ζ_2 の線型結合であることを示す. これは Averaging Principle (平均原理) の帰結である. 実際 (9) の才1式を τ で微分して才2式と(10)を使えば

$$\frac{d^2 T_1^{(1)}}{d\tau^2} + T_1^{(1)} = Z_2^{(1)} - 2 Z_2^{*(1)} \tag{11}$$

を得る. ここに (3) の才4式から

$$Z_2^{(1)} = -\alpha \zeta_1^3 - \gamma \zeta_2 + \beta \cos \omega \zeta_3 \tag{12}$$

である. (8) によって $Z_2^{(1)}$ を τ で表わしたとき, $\cos\tau$, $\sin\tau$ の項を集めてそれを $\langle Z_2^{(1)} \rangle$ と記せば, (10) によって

$$Z_2^{*(1)} = \frac{1}{2} \langle Z_2^{(1)} \rangle = -\frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma}{2} \zeta_2 \tag{13}$$

と選ぶことになるが, この選択が平均原理に適っている. このとき (11) は

$$\frac{d^2 T_1^{(1)}}{d\tau^2} + T_1^{(1)} = Z_2^{(1)} - \langle Z_2^{(1)} \rangle \tag{14}$$

となり, 今や安心して積分できて

$$T_1^{(1)} = \frac{\alpha}{32} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) + \frac{\beta}{1-\omega^2} \cos \omega \zeta_3 \tag{15}$$

を得る. この辺の具体的計算には, $\zeta_1^n \zeta_2^m$ $(n, m = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $\langle \zeta_1^n \zeta_2^m \rangle$ の値と

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = \zeta_1^n \zeta_2^m - \langle \zeta_1^n \zeta_2^m \rangle$$

を充たす X の値とを一度求めておけば何度でも利用できる.[2)]

$T_1^{(1)}$ と $Z_2^{*(1)}$ とが求まれば, (9), (10) から $T_2^{(1)}$, $Z_1^{*(1)}$ も求まって

$$T_2^{(1)} = \frac{3\alpha}{32}(7\zeta_1^2\zeta_2 + 3\zeta_2^3) - \frac{\gamma}{2}\zeta_1 - \frac{\beta\omega}{1-\omega^2}\sin\omega\zeta_3, \tag{16}$$

$$Z_1^{*(1)} = \frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_2 - \frac{\gamma}{2}\zeta_1. \tag{17}$$

となる．

6．2次の諸量 $T_2^{(1)}$，$T_2^{(2)}$，$Z_1^{*(2)}$，$Z_2^{*(2)}$ は次の諸式を充たすように決められる：

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dT_1^{(2)}}{d\tau} + T_2^{(2)} + \Phi_1^{(2)} &= Z_1^{*(2)}, \\ -\frac{dT_2^{(2)}}{d\tau} - T_1^{(2)} + \Phi_2^{(2)} &= Z_2^{*(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\frac{dZ_1^{*(2)}}{d\tau} = Z_2^{*(1)}, \quad \frac{dZ_2^{*(2)}}{d\tau} = -Z_1^{*(2)}, \tag{19}$$

ここに $\Phi_1^{(2)}$，$\Phi_2^{(2)}$ は1次の諸量から計算されるもので

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= -\sum_{j=1}^{2} Z_j^{*(1)} \cdot \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \zeta_j} \\ \Phi_2^{(2)} &= \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial Z_2^{(1)}}{\partial \zeta_j} \cdot T_j^{(1)} - Z_j^{*(1)} \cdot \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \zeta_j}\right) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

と与えられる．具体的には

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= \frac{9\alpha^2}{256}c^2(-3\zeta_1^2\zeta_2 + \zeta_2^3) + \frac{3\alpha\gamma}{64}(\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2), \\ \Phi_2^{(2)} &= \frac{3\alpha^2}{256}(-8\zeta_1^5 + 9\zeta_1^3\zeta_2^2 - 15\zeta_1\zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{64}(4\zeta_1^2\zeta_2 + 7\zeta_2^3) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{4}\zeta_1 - \frac{3\alpha\beta}{1-\omega^2}\zeta_1^2\cos\omega\zeta_3 + \frac{\beta\gamma\omega}{1-\omega^2}\sin\omega\zeta_3 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

である．

(19) は (10) と同じ形で平均原理の要請であるから，2次の諸量は1次の場合と同様の過程で決められる．つまり

まず (13) に対応して

$$Z_2^{*(2)}=\frac{1}{2}\left\langle \Phi_2^{(2)}+\frac{d\Phi_1^{(2)}}{d\tau}\right\rangle=-\frac{69\alpha^2}{2048}c^4\zeta_1+\frac{75\alpha\gamma}{512}c^2\zeta_2+\frac{\gamma^2}{8}\zeta_1, \tag{22}$$

が得られ，次いで

$$\begin{aligned}T_1^{(2)}=&\frac{3\alpha^2}{24576}\left(-97\zeta_1^5+130\zeta_1^3\zeta_2^2+103\zeta_1\zeta_2^4\right)+\frac{3\alpha\gamma}{2048}\left(-35\zeta_1^2\zeta_2\right.\\&\left.+9\zeta_2^3\right)-\frac{3\alpha\beta}{4(1-\omega^2)}\left[\frac{2c^2}{1-\omega^2}\cos\omega\zeta_3-\frac{2(3+\omega^2)}{9-10\omega^2+\omega^4}(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\cos\omega\zeta_3\right.\\&\left.+\frac{16\omega}{9-10\omega^2+\omega^4}\zeta_1\zeta_2\sin\omega\zeta_3\right]+\frac{\beta\gamma\omega}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega\zeta_3,\end{aligned} \tag{23}$$

$$Z_1^{*(2)}=\frac{69\alpha^2}{2048}c^4\zeta_2+\frac{75\alpha\gamma}{512}c^2\zeta_1-\frac{\gamma^2}{8}\zeta_2 \tag{24}$$

を得る（$T_2^{(2)}$ は省略）.

7. 新運動方程式 (5) は

$$\left.\begin{aligned}\dot\zeta_1&=\zeta_2+\frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_2-\frac{\gamma}{2}\zeta_1+\left(\frac{69\alpha^2}{2048}c^4-\frac{\gamma}{8}\right)\zeta_2+\frac{75\alpha\gamma}{512}c^2\zeta_1\\\dot\zeta_2&=-\zeta_1-\frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_1-\frac{\gamma}{2}\zeta_2-\left(\frac{69\alpha^2}{2048}c^4-\frac{\gamma}{8}\right)\zeta_1+\frac{75\alpha\gamma}{512}c^2\zeta_2\\\dot\zeta_3&=1,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

となり，ここに，

$$c^2=\zeta_1^2+\zeta_2^2 \tag{26}$$

である． (25) は所期の通り積分できる形となっている．実際，(25) の才 1，2 式から

$$\frac{dc^2}{dt}=-\gamma c^2+\frac{75\alpha\gamma}{256}c^4 \tag{27}$$

および

$$\frac{d}{dt}\tan^{-1}(\zeta_1/\zeta_2) = \frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{3\alpha}{8}c^2 + \frac{69\alpha^2}{2048}c^4 - \frac{\gamma^2}{8} \tag{28}$$

を得るが，これらの解は求積（quadrature）に帰着される．すなわち（27）を積分すれば

$$\left|\frac{75\alpha}{256} - \frac{1}{c^2}\right| = \left|\frac{75\alpha}{256} - \frac{1}{c_0^2}\right| e^{\gamma(t-t_0)} \tag{29}$$

となり，cはtの既知関数となるので（28）より

$$\tau = \tau_0 + \int_{t_0}^{t}\left(1 + \frac{3\alpha}{8}c^2 + \frac{69\alpha^2}{2048}c^4 - \frac{\gamma^2}{8}\right)dt \tag{30}$$

とτが求められる．されば（8）からζ_1, ζ_2がtで表わされる（積分定数はc_0，τ_0）．

このとき$x\,(=z_1)$は，$\zeta_3 = t$，（15），（23）から

$$\begin{aligned}
x &= \zeta_1 + T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \\
&= \zeta_1 + \frac{\alpha}{32}(\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) + \frac{\beta}{1-\omega^2}\cos\omega t \\
&\quad + \frac{3\alpha^2}{24576}(-97\zeta_1^5 + 130\zeta_1^3\zeta_2^2 + 103\zeta_1\zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{2048}\times \\
&\quad \times(-35\zeta_1^2\zeta_2 + 9\zeta_2^3) - \frac{3\alpha\beta}{4(1-\omega^2)}\left[\frac{2c^2}{1-\omega^2}\cos\omega t\right. \\
&\quad \left.- \frac{2(3+\omega^2)}{9-10\omega^2+\omega^4}(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\cos\omega t + \frac{16\omega}{9-10\omega^2+\omega^4}\zeta_1\zeta_2\sin\omega t\right] \\
&\quad + \frac{\beta\gamma\omega}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega t
\end{aligned} \tag{31}$$

と求められる．（31）は Duffing 方程式（1）の一般解（2次までの）である．

8.　(1) で $\gamma\dot{x}$ が抵抗を表わすなら $\gamma>0$ で，このとき c_0 の大小にかかわらず (29) によって $t\nearrow\infty$ で $c\searrow 0$．ゆえに $\zeta_1, \zeta_2 \to 0$ で，(31) は最終的に

$$x=\frac{\beta}{1-\omega^2}\cos\omega t+\frac{\beta\gamma\omega}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega t \tag{32}$$

と強制項のみになる．(32) は 2 次の近似で (1) を満足する特別解であり，いわゆる "最終運動" を与えている．抵抗の効果は (32) 右辺第 2 項の存在として現れ，x と強制振動との位相のずれをもたらすことはよく知られている．

次に $\gamma<0$ の場合（負の抵抗），(29) より $t\nearrow\infty$ で何はともあれ

$$\left|\frac{75\alpha}{256}-\frac{1}{c^2}\right|\searrow 0 \tag{33}$$

である．ゆえに $\alpha<0$（バネが soft）とすると $c\nearrow\infty$ ということになる．自由振動の振巾がいくらでも大きくなるというのだから，高次の摂動がより大きな効果をもつことになるので，2 次の理論で結論することなどできない．また他方で $\alpha>0$（バネが hard）とすると (33) は

$$c\longrightarrow(256/75\alpha)^{1/2} \tag{34}$$

を示すことになるが，c はオーダー 0 の量と暗々裡に仮定して論を進めてきたので，この場合も (34) を鵜呑みにするわけにはいかない．問題提起に留めておく．

9. 以下 $\omega \approx 1$ のレゾナンスを論ずる．$Z_1^{*(0)}$，$Z_2^{*(0)}$ は先と同様に (6) で与えられる．次に1次に進むに，今や (12) の $\beta\cos\omega\zeta_3$ は $\omega\approx1$ のために ζ_1，ζ_2 と同じく critical term となるので $Z_1^{*(1)}$，$Z_2^{*(1)}$ に取り込まなければならない．その際，$\omega\approx1$ だが $\omega=1$ とは限らないので (10) を要請することはできない．したがって (11) も使えず，もとに戻って (9) から得られる

$$\frac{d^2T_1^{(1)}}{d\tau^2}+T_1^{(1)} = Z_2^{(1)} - Z_2^{*(1)} - \frac{dZ_1^{*(1)}}{d\tau} \tag{35}$$

に基づいて考えると，平均原理から

$$Z_2^{*(1)} + \frac{dZ_1^{*(1)}}{d\tau} = \langle Z_2^{(1)}\rangle \tag{36}$$

が要請される．(12) を考慮すると

$$\begin{aligned} Z_2^{*(1)} &= \frac{1}{2}\langle -\alpha\zeta_1^3-\gamma\zeta_2\rangle + \frac{\beta}{1+\omega}\cos\omega\zeta_3 \\ &= -\frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_1 - \frac{\gamma}{2}\zeta_2 + \frac{\beta}{1+\omega}\cos\omega\zeta_3, \end{aligned} \tag{37}$$

$$Z_1^{*(1)} = \frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_2 - \frac{\gamma}{2}\zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega}\sin\omega\zeta_3 \tag{38}$$

でよい．もし $\omega=1$ なら (37) の右辺は $\frac{1}{2}\langle Z_2^{(1)}\rangle$ で (10) が満足されることに注意しよう．つまり (37)，(38) は (10) の一般化となっている．(36) によって (35) は安心して積分できて

$$T_1^{(1)} = \frac{\alpha}{32}(\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) \tag{39}$$

また

$$T_2^{(1)} = \frac{3\alpha}{32}(7\zeta_1^2\zeta_2+3\zeta_2^3) - \frac{\gamma}{2}\zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega}\sin\omega\zeta_3 \tag{40}$$

となる．

10. 2次に進むと，(18)で $\Phi_1^{(2)}$, $\Phi_2^{(2)}$ は

$$
\left.
\begin{aligned}
\Phi_1^{(2)} &= \frac{9\alpha^2}{256} c^2 \left(-3\zeta_1^2\zeta_2 + \zeta_2^3\right) + \frac{3\alpha\gamma}{64}\left(\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2\right) \\
&\quad + \frac{3\alpha\beta}{32(1+\omega)}\left[2\zeta_1\zeta_2 \cos\omega\zeta_3 - \left(\zeta_1^2-\zeta_2^2\right)\sin\omega\zeta_3\right], \\
\Phi_2^{(2)} &= \frac{3\alpha^2}{256}\left(-8\zeta_1^5 + 9\zeta_1^3\zeta_2^2 - 15\zeta_1\zeta_2^4\right) + \frac{3\alpha\gamma}{64}\left(4\zeta_1^2\zeta_2 + 7\zeta_2^3\right) \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{4}\zeta_1 - \frac{27\alpha\beta}{32(1+\omega)}\zeta_2^2\cos\omega\zeta_3 - \frac{\beta}{16(1+\omega)}\left(21\alpha\zeta_1\zeta_2 + 8\gamma\right)\sin\omega\zeta_3
\end{aligned}
\right\} \quad (41)
$$

で与えられる．1次と同じ過程で

$$
Z_2^{*(2)} + \frac{dZ_1^{*(2)}}{d\tau} = \left\langle \Phi_2^{(2)} + \frac{d\Phi_1^{(2)}}{d\tau} \right\rangle \qquad (42)
$$

から，途中の計算は省略するが，次の結果を得る（$T_2^{(2)}$は省く）:

$$
\begin{aligned}
Z_2^{*(2)} &= -\frac{69\alpha^2}{2048} c^4 \zeta_1 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_2 + \frac{\gamma^2}{8}\zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega}\left[-\frac{\gamma}{2(1+\omega)}\sin\omega\zeta_3\right. \\
&\quad - \frac{27\alpha}{64(1+\omega)} c^2 \cos\omega\zeta_3 + \frac{69\alpha}{128(3-\omega)}\left\{\left(\zeta_1^2-\zeta_2^2\right)\cos\omega\zeta_3\right. \\
&\quad \left.\left. - 2\zeta_1\zeta_2 \sin\omega\zeta_3\right\}\right],
\end{aligned}
\qquad (43)
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1^{*(2)} &= \frac{69\alpha^2}{2048} c^4 \zeta_2 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma^2}{8}\zeta_2 + \frac{\beta}{1+\omega}\left[\frac{\gamma}{2(1+\omega)}\cos\omega\zeta_3\right. \\
&\quad - \frac{27\alpha}{64(1+\omega)} c^2 \sin\omega\zeta_3 + \frac{69\alpha}{128(3-\omega)}\left\{-2\zeta_1\zeta_2\cos\omega\zeta_3\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(\zeta_1^2-\zeta_2^2\right)\sin\omega\zeta_3\right\}\right].
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

$$
\begin{aligned}
T_1^{(2)} &= \frac{3\alpha^2}{24576}\left(-97\zeta_1^5 + 130\zeta_1^3\zeta_2^2 + 103\zeta_1\zeta_2^4\right) + \frac{3\alpha\gamma}{2048}\left(-35\zeta_1^2\zeta_2 + 9\zeta_2^3\right) \\
&\quad + \frac{3\alpha\beta}{128}\cdot\frac{13+4\omega}{(1+\omega)(3+4\omega+\omega^2)}\left[\left(\zeta_1^2-\zeta_2^2\right)\cos\omega\zeta_3 + 2\zeta_1\zeta_2\sin\omega\zeta_3\right].
\end{aligned}
\qquad (45)
$$

11. 新運動方程式は

$$\left.\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + \frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_2 - \frac{\gamma}{2}\zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega}\sin\omega\zeta_3 + Z_1^{*(2)}\\ \dot{\zeta}_2 &= -\zeta_1 - \frac{3\alpha}{8}c^2\zeta_1 - \frac{\gamma}{2}\zeta_2 + \frac{\beta}{1+\omega}\cos\omega\zeta_3 + Z_2^{*(2)}\\ \dot{\zeta}_3 &= 1\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

と書かれる. (8) を省みて ζ_1, ζ_2 の代りに c, τ を使えば

$$\begin{aligned}\dot{c} &= -\frac{\gamma}{2}c - \frac{\beta}{1+\omega}\sin(\tau-\omega\zeta_3) + \frac{75\alpha\gamma}{512}c^3\\ &\quad + \frac{\beta}{1+\omega}\left[\frac{\gamma}{2(1+\omega)}\cos(\tau-\omega\zeta_3) + \frac{3(77+5\omega)\alpha}{128(1+\omega)(3-\omega)}c^2\sin(\tau-\omega\zeta_3)\right]\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= 1 + \frac{3\alpha}{8}c^2 - \frac{\beta}{(1+\omega)c}\cos(\tau-\omega\zeta_3) + \frac{69\alpha^2}{2048}c^4 - \frac{\gamma^2}{8} + \frac{\beta}{1+\omega}\times\\ &\quad \times\left[-\frac{\gamma}{2(1+\omega)c}\sin(\tau-\omega\zeta_3) + \frac{3(31-41\omega)\alpha}{128(1+\omega)(3-\omega)}c\cos(\tau-\omega\zeta_3)\right]\end{aligned} \tag{48}$$

となる. τ と ζ_3 が今や $\tau-\omega\zeta_3$ の組合せでのみ現われることに注意しよう. そこで

$$\theta = \tau-\omega\zeta_3 = \tau-\omega t \tag{49}$$

と置き, 2次の項では $\omega=1$ と近似して

$$\dot{c} = -\frac{\gamma}{2}c - \frac{\beta}{1+\omega}\sin\theta + \frac{75\alpha\gamma}{512}c^3 + \frac{\beta\gamma}{8}\cos\theta + \frac{123\alpha\beta}{512}c^2\sin\theta, \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 1-\omega + \frac{3\alpha}{8}c^2 - \frac{\beta}{(1+\omega)c}\cos\theta + \frac{69\alpha^2}{2048}c^4 - \frac{\gamma^2}{8}\\ &\quad - \frac{\beta\gamma}{8c}\sin\theta - \frac{15\alpha\beta}{512}c\cos\theta.\end{aligned} \tag{51}$$

が得られる. 非レゾナンスの場合と異なって (50), (51) を求積で解くことは難かしいが, 原方程式 (1) が非自律系であっ

たのに対し (50), (51) は自律系であって1階逓減されている.

12. (50), (51) の平衡解を

$$c = c_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 \tag{52}$$

とするなら, これから (49) によって

$$\zeta_1 = c_0 \cos(\omega t + \theta_0), \ \zeta_2 = -c_0 \sin(\omega t + \theta_0) \tag{53}$$

となり, したがって (39), (45) から, 2次項では $\omega = 1$ として,

$$\begin{aligned} x = \ &\zeta_1 + \frac{\alpha}{32}(\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) + \frac{3\alpha^2}{24576}(-97\zeta_1^5 + 130\zeta_1^3\zeta_2^2 + 103\zeta_1\zeta_2^4) \\ &+ \frac{3\alpha\gamma}{2048}(-35\zeta_1^2\zeta_2 + 9\zeta_2^3) + \frac{51\alpha\beta}{2048}\Big[(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\cos\omega t \\ &+ 2\zeta_1\zeta_2 \sin\omega t\Big] \end{aligned} \tag{54}$$

が得られる. これは $2\pi/\omega$ を周期とする周期解であり, 特別解である.

平衡解の条件は

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\gamma}{2}c_0 - \frac{\beta}{1+\omega}\sin\theta_0 + \frac{75\alpha\gamma}{512}c_0^3 + \frac{\beta\gamma}{8}\cos\theta_0 + \frac{123\alpha\beta}{512}c_0^2\sin\theta_0 = 0, \\ &1 - \omega + \frac{3\alpha}{8}c_0^2 - \frac{\beta}{(1+\omega)c_0}\cos\theta_0 + \frac{69\alpha^2}{2048}c_0^4 - \frac{\gamma^2}{8} \\ &\quad - \frac{\beta\gamma}{8c_0}\sin\theta_0 - \frac{15\alpha\beta}{512}c_0\cos\theta_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

で与えられる. まず大勢を見るために2次項を省略すると

$$\frac{\gamma}{2}c_0 + \frac{\beta}{2}\sin\theta_0 = 0, \quad 1 - \omega + \frac{3\alpha}{8}c_0^2 - \frac{\beta}{2c_0}\cos\theta_0 = 0. \tag{56}$$

したがって才1式から

$$\sin\theta_0 = -\frac{\gamma}{\beta}c_0, \quad \cos\theta_0 = \pm\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}c_0^2} \tag{57}$$

これを才2式に代入すれば

$$\omega = 1+\frac{3\alpha}{8}c_0^2 \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4c_0^2}-\frac{\gamma^2}{4}} \quad (\text{複号は } \theta_0,\ \pi-\theta_0 \text{ に対応}) \tag{58}$$

を得る．(58)は"レスポンス式"とよばれている．これを図示したものが"レスポンス曲線"である．

図1

$\alpha>0$

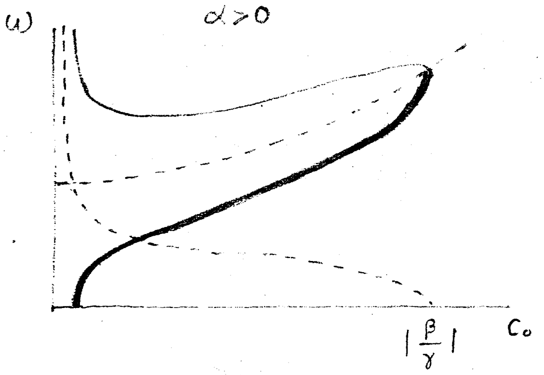
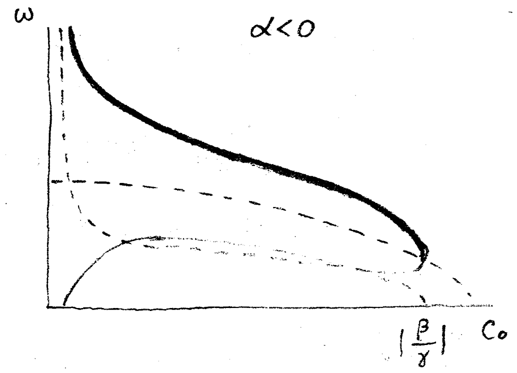


図2

$\alpha<0$



13. 平衡解の安定性を論じよう．1次で論ずるとして

$$\dot c = -\frac{\gamma}{2}c - \frac{\beta}{2}\sin\theta, \quad \dot\theta = 1-\omega+\frac{3\alpha}{8}c^2 - \frac{\beta}{2c}\cos\theta, \tag{59}$$

に

$$c = c_0+\xi, \qquad \theta = \theta_0+\eta \tag{60}$$

を代入すれば，(57)を省みて

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi &= -\frac{\gamma}{2}\xi - \frac{\beta}{2}\cos\theta_0\cdot\eta \\ \dot\eta &= \left(\frac{3\alpha}{4}c_0 + \frac{\beta}{2c_0^2}\cos\theta_0\right)\xi - \frac{\gamma}{2}\eta \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

を得る．(61)の解が $\xi, \eta \propto e^{\lambda t}$ とすると，λ に対する特性方程式は

$$\left(\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{\beta}{2}\cos\theta_0\left(\frac{3\alpha}{4}c_0+\frac{\beta}{2c_0^2}\cos\theta_0\right)=0 \tag{62}$$

で与えられる.

$\alpha>0$（バネ hard, 図1）で $\beta\cos\theta_0>0$ とすると, c_0 は約束で正で $\lambda=-(\gamma/2)+$（純虚数）となり, $\gamma>0$（抵抗）なら安定はもちろん $\xi, \eta \to 0$ となって平衡解に漸近する. $\alpha<0$（バネ soft, 図2）で $\beta\cos\theta_0<0$ でも同じことになる. これらの場合, 平衡解はいわゆる"最終運動"に通じるもので, その意義は単なる特別解に留まらない.

$\beta>0$ と定めると上記の $\beta\cos\theta_0$ の正負は $\cos\theta_0$ のそれと同じであるから, 安定平衡解は $\alpha>0$ なら $\cos\theta_0>0$ で (57) 才2式の複号は +, (58) 右辺の複号は − で, 図1では下側の太線に対応する. 同様に考えて $\alpha<0$ なら図2の上側太線が安定平衡解である.

以上は (59) による1次の理論だが, その本質は (50), (51) に基づく2次の理論にも受けつがれる. (56) の代りに (55) を使ってレスポンス式, レスポンス曲線が改良される. 大勢はすでに把握されているので, パラメーター α, β, γ が数値的に与えられたとき, レスポンス曲線を図示するのは容易である.

1) Hori, G. 1966, Publ. Astro. Soc. Japan, 18, 287

2) Hori, G. 1971, Publ. Astro. Soc. Japan, 23, 567