数理解析研究所講究録
第 315 巻 1977 年 40-47

Poisson-Boltzmann 方程式系の解の存在定理

阪市大工　鵜飼正二

§1 序

天体力学及びプラズマ物理の基礎方程式である衝突のないBoltzmann方程式（標題の方程式系及びVlasov方程式）に対する初期値問題の（主として）大域解の存在について述べる。ここで大域解とは，時刻 $t=0$ で与えられた初期値から出発した解が途中（有限時刻）で跡切れることなく $t=+\infty$ 迄存在しつづけている解のことである。有限時刻で爆発（解自身又はその何階かの導関数等が無限大になること）するか，或いは有限時間の存在のみが証明される解を局所解と云う。解の存在定理を除くと，上記初期値問題の，漸近挙動その他の，解のさらに詳しい性質についての数学的研究は未だないようである。

考える初期値問題は，$t\in[0,\infty)$ を時間変数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ を空間変数，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ を速度変数として，

$$
(1.1)\quad
\begin{cases}
f_t + \xi\cdot\nabla_x f + \alpha\nabla_x\varphi\cdot\nabla_\xi f = 0, & (t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\\
\Delta_x\varphi = \beta\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\,d\xi, & (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\\
f|_{t=0} = f_0, & (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\\
\nabla_x\varphi \to 0\ (|x|\to\infty), & t\in[0,\infty).
\end{cases}
$$

ここで $f=f(t,x,\xi)$ は時刻 t に於ける $x-\xi$ 空間での質量密度, $\varphi=\varphi(t,x)$ は重力ポテンシァル, $f_0=f_0(x,\xi)$ は f の初期値(既知), α, $\beta\in\mathbb{R}^n$ は定数, ∇_x (∇_ξ) は x (ξ) に関する gradient operator, Δ_x は x に関する laplacian, $\cdot$ は $\mathbb{R}^n$ に於ける内積を表わす。

一次元 ($n=1$) の場合の大域解が Iordanskii [5] によって, $n=2$ の場合は [7] でその存在が示されている。いずれも古典解(§2の定義2.1参照)である。$n\geq 3$ に対しては,一般の f_0 に対してはその古典的な大域解の存在は未解決の問題である。しかし古典的な局所解の存在が [1], [6] で示され, ある種の弱い解(古典的でない解, 定義3.1参照)が大域的に存在することが Arsen'ev [2] によって証明された。又最近 Batt [3] によって f_0 が球対称でかつ ξ に関して support compact ならば (i.e. 有界集合の外で 0 となる) 同じ性質を持つ古典的な大域解が存在することが示された。[3] 以外の結果は Vlasov 方程式に対しても成り立つが, [3] の証明を Vlasov 方程式にあてはめることは出来ない。以下 [2] と [7] の結果を紹介する。

§2　古典的な解

m 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の(開)集合 Ω 上で定義された l 回連続的微分可能な関数の全体を $C^l(\Omega)$，そのうち l 階迄のすべての導関数が Ω で有界なものの全体を $\mathcal{B}^l(\Omega)$，$\mathcal{B}^l(\Omega)$ に属し，l 階導関数が指数 $\sigma \in (0,1]$ の Hölder 連続性を持つ関数の全体を $\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)$，で表わす。$\mathcal{B}^l(\Omega)$，$\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)$ は次のノルムで Banach 空間である。

(2.1)　$$\|u\|_{\mathcal{B}^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \quad \|u\|_{\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{B}^l(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = l} \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\sigma},$$

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m .$$

$L^p(\Omega)$ は Ω 上で p 乗可積分関数(の同値類)の全体で，ノルムを

(2.2)　$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p dx, \qquad 1 \leq p < +\infty; \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

とする Banach 空間である。

$T > 0$ として $Q_T = [0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，$\Omega_T = [0, T) \times \mathbb{R}^n$ とおく。$C^{l_1, l_2}(\Omega_T)$ は Ω_T 上で t に関して l_1 回，$x \in \mathbb{R}^n$ に関して l_2 回連続的微分可能な関数 $\varphi(t,x)$ の全体，$\mathcal{B}^{\sigma_1, l+\sigma_2}(\Omega_T)$ は t に関して指数 σ_1 の Hölder 連続性を持ち，x に関する l ~~回~~階導関数が指数 σ_2 の Hölder 連続性を持つ $\varphi = \varphi(t,x) \in C^{0,l}(\Omega_T)$ の全体，とする。

定義 2.1.　次の条件 (2.3)(2.4) を満す (f, φ) の組を (1.1) の古典的な解と呼ぶ。

(2.3)　(i)　$f = f(t, x, \xi) \in C^1(Q_T)$,

(ii)　$f(t, x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$　$(\forall (t,x) \in \Omega_T)$,

(iii)　$\varphi = \varphi(t,x) \in C^{0,2}(\Omega_T)$.

(2.4)　(f,φ) は (1.1) を (t に関しては $[0,T)$) で満す。

ここで $T<+\infty$ ならば (f,φ) は局所解, $T=+\infty$ と取れれば大域解である。(2.3) により (1.1) の各項が通常の(古典的な)意味で well-defined となり, (2.4) が意味を持つことになる。古典的な解の存在定理を述べよう。詳しくは [7] を参照。

定理 2.2.　$f_0=f_0(x,\xi)$ が次の条件を満すとする。

(2.5) (i) $f_0\in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\exists\gamma>2n,\ \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|x|)^\gamma(1+|\xi|)^\gamma f_0(x,\xi)\right|<+\infty$.

この時, $n=2$ ならば (1.1) は古典的な大域解 $(T=+\infty)$ を, $n\geq 3$ ならば f_0 にのみ依存する定数 $T_0>0$ が存在して (1.1) は古典的な局所解 $(T=T_0)$ を持ち, さらにこれらの解は次の性質を持つ。

(2.6) (i) $f\in \mathcal{B}^\delta(Q_{T'})\cap L^\infty([0,T');L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))\cap L^\infty([0,T');L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))$,

$\varphi\in\mathcal{B}^{\delta_1,2+\delta_2}(\Omega_{T'})$,　$(\forall T'<T)$,

(ii) $\|f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}=\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}$, $(1\leq\forall p\leq+\infty,\ \forall t\in[0,T))$.

(iii) $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|f(t,x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\leq\rho(t)\equiv\begin{cases}ae^{bt}, & n=2,\\ \dfrac{a}{(T_0-t)^{\frac{1}{n-2}}}, & n\geq 3.\end{cases}$　$(\forall t\in[0,T))$。

ここで $\delta,\delta_1,\delta_2,a,b,T_0$ は f_0 のみに依存する定数である。

注意 2.3.　$f_0(x,\xi)\geq 0$ ならば $f(t,x,\xi)\geq 0$ である。

注意 2.4.　$n\geq 3$ の場合 (2.5) の下での大域的存在は未だ得られていないが, Poisson 方程式に次の修正を施せば, $n\geq 3$ でも初期値問題 (1.1) の古典的な解が大域的に構成できる。詳しくは [2], [7] 参照;

(2.7) $\Delta_x\varphi=\beta\int_{|\xi|\le R} f(t,x,\xi)\,d\xi$, $(R>0)$, ([7]),

又は

(2.8) $-\varepsilon(-\Delta_x)^m\varphi+\Delta_x\varphi=\beta\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\,d\xi$, $(\varepsilon>0,\ 2m-n>1)$ ([2])。

ここで $R\to\infty$ 又は $\varepsilon\to 0$ とすれば元の(1.1)の解に(何らかの意味で)収束することが期待される(§3参照)。

定理2.2で得られた解の一意性については([7]),

定理 2.5. f_0 が(2.5)の他に,更に

(2.6) (i) $\nabla_x f_0,\ \nabla_\xi f_0\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{\frac{n}{2}}\{|\nabla_x f_0|+|\nabla_\xi f_0|\}<+\infty$,

を満せば,次の条件を満す(f,φ)のクラスで,定理2.2で得られた解が唯一つの解である。

(2.7) (i) $f\in\mathcal{B}^0(Q_T)\cap C^1(Q_T)$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\,d\xi\in\mathcal{B}^\delta(\Omega_T)\cap\mathcal{B}^\delta([0,T];L^1(\mathbb{R}^n_1))$,

(iii) $\nabla_x\varphi\in\mathcal{B}^{0,1}(\Omega_T)$.

注意 2.6. 以上述べたことは,Vlasov方程式に対する初期値問題に対してもそのまま(自明の修正を除けば)成り立つ。

定理2.2の証明の概略を述べておく。有名なSchauderの不動点定理[4]を用いる。注意2.4の場合も同じである。

定理 2.7 (Schauder) Banach空間Xのコンパクト凸閉集合Sをそれ自身に写す連続写像Vは不動点$u\in S$, $u=V[u]$, を持つ。

$g=g(t,x,\xi)$が与えられたとして,(1.1)のpoissonの方程式を,その

右辺の f を g で置き代え第4式の条件の下で解き，得られた φ を用いて (1.1) の第1式を第3式の初期条件で解 f を求める。g を f に対応さす写像を V とし，$X=B^0(Q_T)$，S を次の条件を満す f の集合とする。

(2.8) (i) $f\in B^{\delta}(Q_T)\cap L^{\infty}([0,T];L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))$,

(ii) $\|f\|_{B^{\delta}(Q_T)}\le M_1$,

(iii) $\|(1+|x|)^{\frac{\gamma}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{\gamma}{2}}f\|_{B^0(Q_T)}\le M_2$,

(iv) $\|f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}\le M_3$,

(v) $\sup_x\|f(t,x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le\rho(t)$。

ここで δ, T, M_1, M_2, M_3 を f_0 に依存して適当に定め，この (X,S,V) が定理 2.7の条件をすべて満すように出来る[ ]。

§3 弱い解

定義 3.1. 次の条件 (3.1) (3.2) を満す (f,φ) を (1.1) の弱い解と呼ぶ。

(3.1) (i) $f\in L^{\infty}([0,T];L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))\cap L^{\infty}([0,T];L^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))$,

(ii) $\nabla\varphi\in L^p(\Omega_T)\quad(1\le{}^{\exists}p\le+\infty)$,

(3.2) 任意の $\psi\in C_0^{\infty}(Q_T)$, $\chi\in C_0^{\infty}(\Omega_T)$ に対して,

(i) $\displaystyle\int_{Q_T}f(t,x,\xi)\{\psi_t+\xi\cdot\nabla_x\psi+\alpha\nabla_x\varphi\cdot\nabla_\xi\psi\}\,dt\,dx\,d\xi=-\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}f_0(x,\xi)\psi(0,x,\xi)\,dx\,d\xi$,

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_T}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\chi\,dt\,dx=-\beta\int_{Q_T}f(t,x,\xi)\chi(t,x)\,dt\,dx\,d\xi$

が成り立つ。　ここで $C_0^{\infty}(\Omega)$ は support compact な $\bigcap_{\ell=0}^{\infty}C^{\ell}(\Omega)$ に属す

関数の全体を表わす。

(f, φ)が(3.1)を満せば(3.2)はwell-definedとなっている。(3.2)は形式的には(1.1)の第一,第二式に夫々ψ, χを乗じ部分積分によって得られたものである。

注意3.2. 弱い解の定義は上のものが唯一ではない。

定義3.1の意味の弱い解の大域的存在についてArsen'evの結果を述べよう。[2]。

定理3.3. f_0が(2.5)を満し, $\alpha/\beta<0$ならば(1.1)は大域的な弱い解を持つ。

注意3.4. [2]では(2.5)より強い条件がf_0に課されている。

[2]では, Poisson方程式を(2.8)で置き代えた(1.1)の古典的な大域解$(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$で$\varepsilon\to 0$として定理3.3を得ている。即ち

定理3.5. 定理3.3の条件の下で, $(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$は$\varepsilon\to 0+$の時次の意味で収束する。$T>0$, $p\in[1,\infty)$を任意として,

(3.3) (i) $f_\varepsilon \to f$ weakly in $L^p(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ uniformly in $t\in[0,T]$,

(ii) $\nabla_x\varphi_\varepsilon \to \nabla_x\varphi$ strongly in $L^p(\Omega)$ uniformly in $t\in[0,T]$, ($\forall\Omega\subset\mathbb{R}^n_x$, 有界).

更に極限(f, φ)は(1.1)の弱い解である。

注意3.6. この証明からは定理3.3の弱い解の一意性は従わない。

参考文献

[1] Arsen'ev A.A., Local uniqueness and existence of a classical solutions of Vlasov's system of equations. Soviet Math. Dokl. 15, 1223-1225 (1974).

[2] Arsen'ev A.A., Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations. Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. 15, 136-147 (1975)

[3] Batt J., Global symmetric solutions of the initial value problem of steller dynamics, J. Differential Equations, 25, 342-364 (1977)

[4] Courant, R. Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, Vol II, Interscience 1962.

[5] Iordanskii S.V., The Cauchy problem for the kinetic equation of plasma, Amer. Math. Soc. Transl, series 2, 35, 351-363 (1964).

[6] Kurth R., Das Anfangswertproblem der Stellerdynamik, Z. Astrophysik, 30 213-229 (1952).

[7] Ukai S. Okabe T., On classical solutions in the large in time of Two-dimensional Vlasov's equation, To appear on Osaka J. Math.