

## コメント：柱状落下の気体カ学

京大工学部航空 榎井健郎

1. はじめに、

星や銀河のような天体が、天体間のガス内を、極超音速で運動するものとして。簡単の為、天体の速度は時間的に一定で、流れは軸対称とする。また、武田氏<sup>1)</sup>が論じたような天体風の効果、Spiegel<sup>2)</sup>が論じたような天体の大きさの効果等も無視する。そのような場合、天体と共に運動する観測者から見ると、極超音速の定常流れが天体を過ぎる事になる。極超音速流れに於ては、圧力を無視するニュートン近似が適用出来る。ニュートン流れに於ては、各流体粒子は、天体を集点とする双曲線軌道を描き、天体後方にのびた柱状領域に流れ込む。ニュートン流れと柱状領域の境界には衝撃波が出来、主流に垂直な速度成分に対応する運動エネルギーの殆んどを熱エネルギーに変える。断熱衝撃波の場合には、柱状領域の温度が上がり、等温衝撃波の場合には、密度が上がる。何れにしても、柱状域内の圧力が上がり、その効果を考慮に入れねばならなくなる。柱状域内の流れ模様は、岐点を通る流線によって分けられ、ヘアピン状の弧を描いて天体に落下する流れと、ゆるやかにカーブしながら無限下流に流れ去る流れ

の二種類になる。

図1に上の流れ模様を示してあるが、それは、Bondi-Hoyle<sup>3)</sup>に始まる柱状落下の理論に於て繰り返し述べられた事を気体力学的に言い換えたものに過ぎない。文献等については、藪下氏の本論を参照されたい。

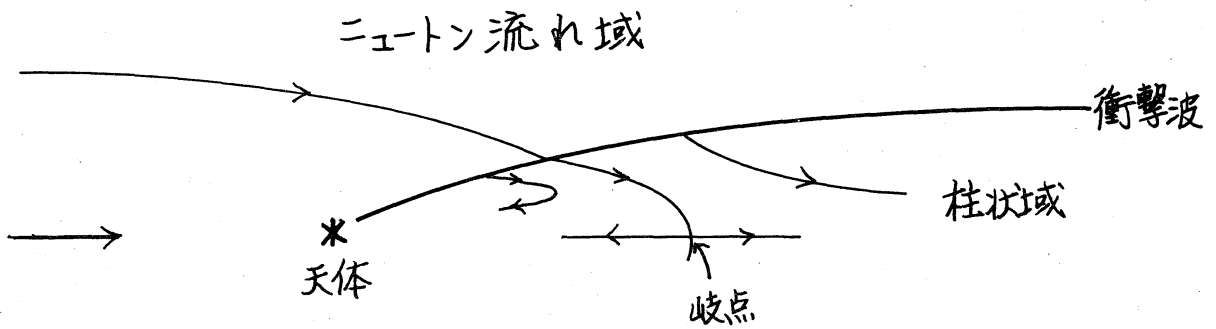


図 1

藪下氏の取り扱いには、柱状域での圧力を考慮に入れた最初のものであるが、Bondi-Hoyle流に、柱状域の断面について平均した形の保存則を用いている。そのような扱いは、天体の受ける抵抗等流れの平均的性質を調べるには適しているが、詳しい流れ模様を調べるには不向きである。

ここで、柱状落下の取り扱いに従って、柱状域の太さが無視出来るものとしよう。そうすると、衝撃波前面でのニュートン流れは、主流に等しい軸方向成分と、天体からの距離が減るにつれて増加する動径成分を持つ。この事を頭に置いて、衝撃波後面でのマッハ数が天体からの距離と共に単調に減り、ある点Cで1になるとしよう。その場合の流れ模様のスケッチを、岐点を通る流線がC点より上流側になるか、下流側になるかによって、図2に示す。この図では、簡単の為、岐点の両側で対称軸附近に超音速域の現れる場合だけを示してある。

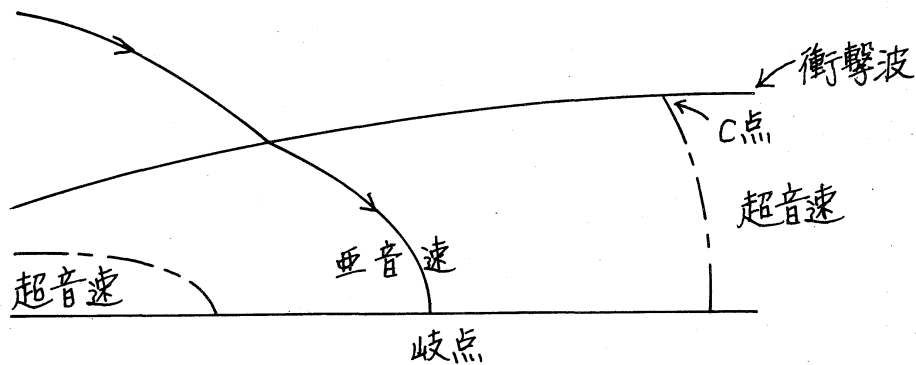


図 2A

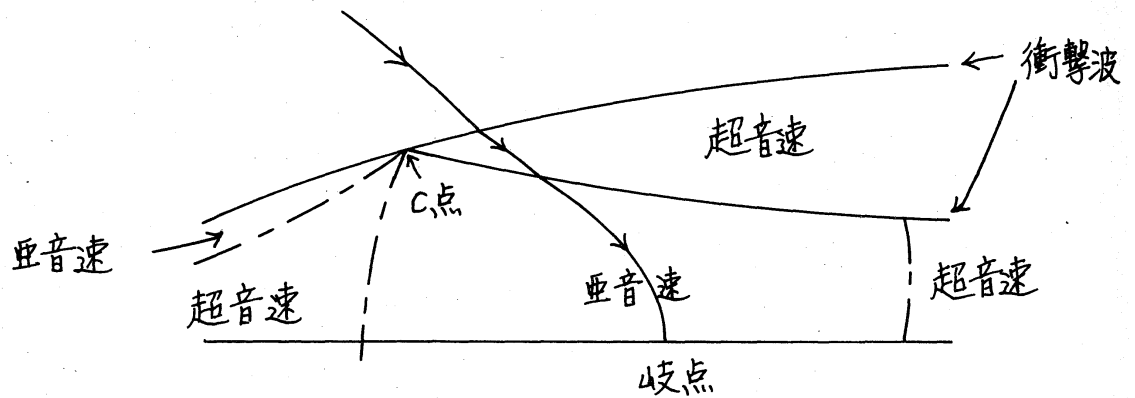


図 2 B

図のように流れ模様は複雑で、特に、岐点上流側には強い逆り勾配がある。下流側にも逆り勾配のある事が懸念される。この逆り勾配の為に流れが不安定になり、その不安定の為に柱状域の性質そのものまで変えはしないだろうか？このような問いかけに答えるには、Bondi-Hoyle 流の扱いは不向きである。

最近、Spiegel を始めとして、相似解を用いて柱状域の構造を詳しく調べる試み<sup>4)</sup>がなされているが、それは上のような疑問が基になっているのではないかと思う。尤も、相似解を用いたのでは、図 2 に示したような流れ模様を再現する事は出来ないが。

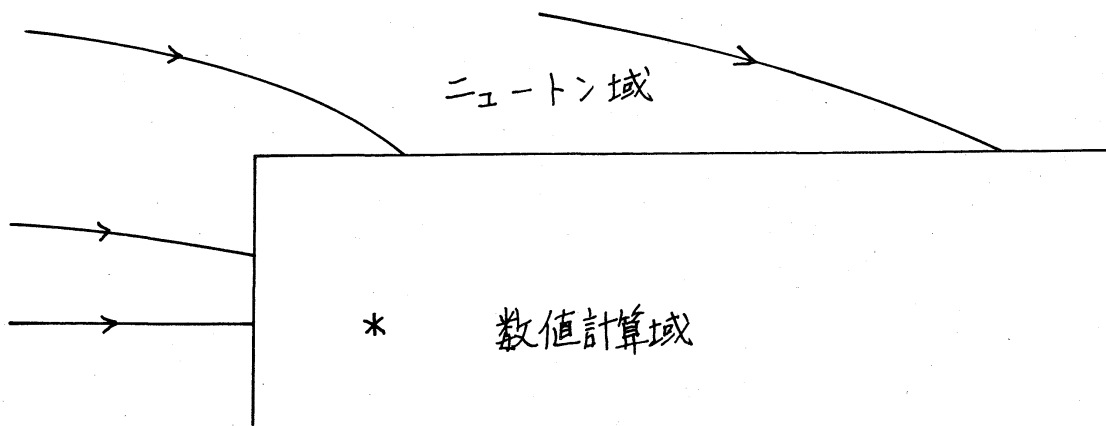


図3

柱状域内の流れを詳しく調べるには、例えば、天体を包み込み、下流側に細長くのびる円柱状の数値計算域を設定する方法が考えられる。計算域境界の状態をニュートン近似によって与え、域内のきざみを適当に細かくして、仮想粘性を導入する通常の数値計算をするのである。そうすれば、柱状域の構造は、計算精度の範囲内で、自然に姿を現わして来る。之は、Hunt<sup>5)</sup>が行なった大域の数値計算に於て、下流側の軸附近のきざみだけ細かくする事に対応する。

このコメントでは、図1に表わされた流れ模様に対し、柱状域内の流れを最低次の近軸展開によって表わし、衝撃条件等を考慮して解く方法について述べる。この方法は、一種の平均法であるから、蕨下氏の扱いの延長上にある。しかし、動径方向の速度成分を取り扱う事が出来るし、また、項数を

増して、詳しい構造を調べる事も出来る。

## 2. 柱状域に対する境界値問題

### 2.1 ニュートン流れの式

ここでは、気体の圧力を無視出来る。流体粒子は、天体を焦点とする双曲線軌道を描く。速度は、軌道の式と角運動量保存則から求まる。図4の記号を参照して、それらは次のようになる (次元のある量には $\sim$ をつける。また、添字0は主流を表す):

軌道の式

$$\tilde{r}_1 = \frac{\tilde{l}_1}{1 + e \cos \varphi}, \quad \tilde{l}_1 = \frac{\tilde{S}^2 \tilde{v}_0^2}{G \tilde{M}}, \quad e = \sec \phi \quad (1)$$

角運動量保存則

$$\tilde{q}_z \tilde{r} - \tilde{q}_r \tilde{z} = \tilde{v}_0 \tilde{S} \quad (2)$$

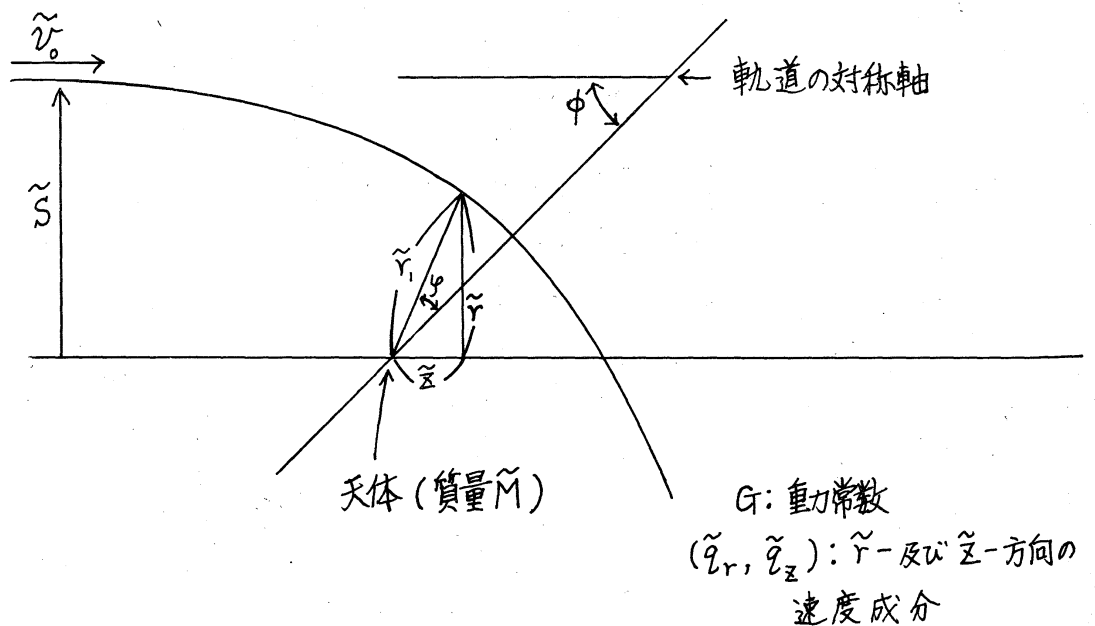


図4

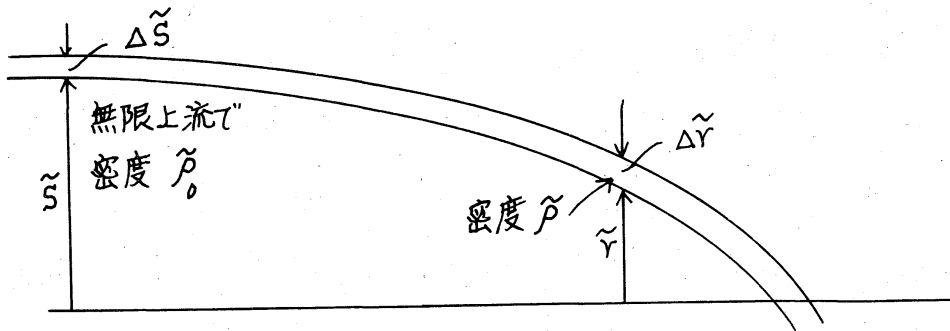


図 5

密度は、図5のような流管についての、質量保存則から求まる：

$$\tilde{\rho}_0 \tilde{v}_0 \tilde{s} \Delta \tilde{s} = \tilde{\rho} \tilde{v}_z \tilde{r} \Delta \tilde{r} \quad (3)$$

最初に断ったように、ここでは天体の大きさを無視している。天体の大きさを考慮に入れると、天体の上流側に前面衝撃波が現れる可能性がある。そして、前面衝撃波と柱状衝撃波の相互作用を扱わねばならなくなる。ここでの扱いは、図1で示した流れ模様が天体自身の大きさに比べて十分に大きなスケールで起る場合だけに適用出来る。この点については、Spiegel<sup>2)</sup>を参照されたい。次に、天体風のような、天体からの物質放出の影響も無視している。物質放出のある場合にも、武田氏<sup>1)</sup>が論じたように、前面衝撃波が出来る。この場合には、放出された物質と落下する物質の間の相互作用により、複雑な非定常運動の起る事が予想される。ここでは、

そのような事柄も無視している。

衝撃波より上流の超音速流れは、上の留意事項の成り立つ範囲でなら、ニュートン流れと同様に、既知と考える事が出来る。超音速流れでは、圧力の効果は無視出来ないが、流れが衝撃波の所迄“何も知らずに”やって来るからである。

## 2.2 衝撃条件

ニュートン流れでのマッハ数は無限大であるから、衝撃条件は“強い衝撃”の条件で近似できる：

$$\tilde{\rho}_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tilde{\rho}_1, \quad \tilde{q}_{n2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tilde{q}_{n1}, \quad \tilde{q}_{t2} = \tilde{q}_{t1} \quad (4)$$

ここに添字  $n, t, 1$  及び  $2$  は、夫々衝撃波面に垂直、及び平行な速度成分、及び衝撃波の前、後面を表わす。また、 $\gamma$  は比熱の比である。

柱状域境界の形を  $\tilde{r} = \delta(\tilde{x})$  によって与えると、ニュートン流れの式：(1), (2), (3) と衝撃条件：(4) とから、柱状域内の気体流れに対する境界条件が得られる。また、(4) は断熱衝撃波の式であるが、等温流れを取り扱う場合には、等温衝撃波に対する式を用いればよい。

## 2.3 柱状域流れの基礎方程式

柱状域流れの基礎方程式は、通常の気体力学の式である：



$$\tilde{\rho} \left\{ \tilde{q}_r \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial \tilde{r}} + \tilde{q}_z \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial \tilde{z}} \right\} = \tilde{R} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} \quad (5)$$

$$\tilde{\rho} \left\{ \tilde{q}_r \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial \tilde{r}} + \tilde{q}_z \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial \tilde{z}} \right\} = \tilde{Z} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{q}_r \tilde{r})}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{q}_z \tilde{r})}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_s} = \left( \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_s} \right)^\gamma \quad (8)$$

$$\tilde{R} = -\frac{\tilde{\rho} \tilde{M} G \tilde{r}}{(\tilde{r}^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tilde{Z} = -\frac{\tilde{\rho} \tilde{M} G \tilde{z}}{(\tilde{r}^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

但し、添字  $S$  は岐点を表わす。

基礎方程式(5)~(9)を(1)~(4)で与えられる境界条件で解くのが問題である。この問題を最初から数値的に解く方法も考えられる。しかし、境界の形が未定であるし、流れの中に亜音速部と超音速部が共存するので、難しい。どうせ数値的に扱うのなら、図3に関連して述べた方法がより現実的と思われる。

### 3. $r$ -展開による解法

物理量を  $\tilde{r}$  の多項式に展開し、方程式及び境界条件を用いて、展開係数を定める方法を考える。この方法では、柱状

域が細いという仮定を最初から導入する必要はない。柱状域の半径  $\tilde{r}$  が  $\tilde{z}$  より大きくなる場合についても解析を行なえる。そして、結果の妥当性は、項数を増した場合の解の変化を調べて、後から確かめる事が出来る。恐らく、その過程で  $\tilde{r}$  と  $\tilde{z}$  の大小関係についての制限が見つかる事になる。しかし、ここでは、簡単の為、柱状域の半径  $\tilde{r}$  が  $\tilde{z}$  より小さいという仮定を行ない、また、多項式の次数を 1 ~ 2 に抑える最低次の取り扱いを示す。

先づ、長さの単位として  $\tilde{r}_0 = \sqrt{GM}/(2\tilde{v}_0^2)$ 、速度の単位として  $\tilde{v}_0$ 、密度の単位として  $\tilde{\rho}_0$ 、圧力の単位として  $\tilde{\rho}_0 \tilde{v}_0^2$  を用い、方程式を無次元にする。次に、物理量を

$$\left. \begin{aligned} u &= r u_0, & w &= w_0, \\ p &= p_0 + r^2 p_1, & \rho &= \rho_0 + r^2 \rho_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

のように仮定し [( $u, w$ ) は  $r$ -及び  $z$ -方向の速度成分である。また、 $\rho_0$  は  $\tilde{\rho}_0$  とまぎらわしいが、 $\rho$  の  $r$ -展開の最低次の項である]、(5) ~ (9) に代入し、 $r/z$  に関する最低次の項だけを残すと次式を得る：

$$\rho_0 \left\{ u_0^2 + w_0 \frac{d u_0}{d z} \right\} = -\frac{2\rho_0}{z^3} - 2p_1 \quad (11)$$

$$\rho_0 w_0 \frac{d w_0}{d z} = -\frac{2\rho_0}{z^2} - \frac{d p_0}{d z} \quad (12)$$

$$0 = 2\rho_0 u_0 + \frac{d(\rho_0 w_0)}{dz} \quad (13)$$

$$\rho_0 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \rho_0^\gamma, \quad \rho_1 = \frac{\gamma-1}{2} \rho_0^{\gamma-1} \rho_1 \quad (14)$$

次に、(10)を(4)に代入し、最低次のものだけ残すと次式を得る：

$$u_0 \delta = \frac{-2}{\sqrt{z}}, \quad \rho_0 + \rho_1 \delta^2 = \frac{\delta_s}{\delta} \left( \frac{z}{z_s} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_s \quad (15)$$

$$\psi_s = \left\{ \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{z_s + 4}{z_s} \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (16)$$

(15)を導く際、柱状域が細いという事から、 $d\delta/dz$ の程度を無視している。また、仮定(10)を考慮して(4)の第3式を落した。これは、柱状域に持ち込まれる軸方向の運動量の効果を落す事を意味するので、ここでの方法の適用限界を与える原因になる。しかし、それは(10)のような最低次の展開を用いた為であって、 $r$ -展開法自体の欠点ではない。

(14)の第1式を用いると、(12)式は直ちに積分出来る：

$$w_0^2 = 1 - \frac{4}{z_s} + \frac{4}{z} - \rho_0^{\gamma-1} \quad (17)$$

(14)及び(15)を用いて(11)及び(13)を整理すると、次式を得る：

$$\frac{d\rho_0}{dz} = 2\rho_0 w_0 \left\{ u_0 - \frac{1}{w_0 z^2} \right\} / \left\{ \frac{(\gamma-1)\rho_0^{\gamma-1}}{2} - w_0^2 \right\} \quad (18)$$

$$\frac{du_0}{dz} = \frac{-1}{w_0} \left\{ u_0^2 + \frac{2}{z^3} - \frac{(\gamma-1)z u_0^2 \rho_0^{\gamma-1}}{4} \left( \rho_0 + \frac{\delta_s \psi_s}{2\sqrt{z_s}} u_0 z \right) \right\} \quad (19)$$

(17)~(19)の物理的に有意な解は、岐点 ( $w_0 = 0$  の点  $z_s$ ) 及び音速点 [ $w_0^2 = (\gamma-1)\rho_0^{\gamma-1}/2$  が成り立つ点  $z_c$ ] で有限な微係数を持たねばならない。数値計算を行なう前に、それらについて調べて見る。

### 3.1 岐点附近の解

岐点では  $\rho_0 = 1$  である。それ故、 $z = z_s$  の近くでは次のような展開が出来る：

$$z = z_s + \varepsilon \quad (20)$$

$$\rho_0 = 1 + \rho_{s1} \varepsilon + \dots \quad (21)$$

$$w_0 = w_{s1} \varepsilon + \dots \quad (22)$$

(20)~(22)を(17)~(19)に代入し、 $\varepsilon$ の各巾を等置すると、次式を得る：

$$\rho_{s1} = -\frac{4}{(\gamma-1)z_s^2}, \quad w_{s1} = \frac{4}{\delta_s \sqrt{z_s}} \quad (23)$$

$$\delta_s^2 = \frac{(\gamma-1)z_s^3}{2} \left\{ 1 - \psi_s - \frac{4}{z_s(\gamma-1)} \right\} \quad (24)$$

(23)第2式及び(24)式から、物理的に有意な解について、(24)式右辺の中カッコの中は正でなければならない。この条件により、 $\gamma = \frac{5}{3}$ の場合、 $z_s$ は下限値  $z_{s2}$  (~126)より大きくなけ

ればならぬ事になる。 $\Sigma_s$ は天体に落下する物質の総量を定めるから、また、藪下氏の扱いによる $\Sigma_s$ は1の程度であるから、この結果は重要である。しかし、(15)に関連して述べたように、ここでの扱いには軸方向の運動量の流れ込みが取り込まれていない。上の結果はここでの扱いの限界を示すものと考えねばならぬ。はっきりした事は、近似を上げてからでないとは解らない。ここで大切なのは、 $\Sigma_s$ を指定すると、岐点近くの解が一意に定まり、解が一意に定まる事である。解の自由度が1つだから(つまり、 $\Sigma_s$ の任意性に対応して)、藪下氏の場合のように、岐点の上流及び下流両方の音速点で有限な微係数を持つ解は不可能である。この事は近似を上げても成り立つものと考えられる。

### 3.2 音速点

音速点では

$$w_0^2 = \frac{(\gamma-1)\rho_0^{\gamma-1}}{2} \quad (25)$$

である。(18)により、音速点での微係数が有限である為には、

$$u_0 = \frac{1}{w_0 \Sigma^2} \quad (26)$$

でなければならない。所で、(15)の第1式により、物理的に有意な解に於ては、 $u_0$ は負でなければならない。それ故、(26)に

より、音速点で $w_0$ は負でなければならない。 $w_0$ が負になるのは岐点より上流側であるから、音速点は上流側だけに現れる。3.1で述べた $\Delta s$ の値は、この音速点での微係数が有限であるという条件によって定まる。

上の処方に従い、Runge-Kutta-Gill法を用いて数値積分を行なった。音速点での微係数を有限にするような $\Delta s$ の値は $\Delta s_{se}$ ぎりぎりの所にあるらしい。また、 $\Delta s$ の2~3倍の $\Delta$ に対し、 $\delta$ は $\Delta$ より1桁以上も大きい。この結果は、下流側が亜音速の場合の藪下氏の結果と一致するが、柱状域が細いという仮定に反するものである。更に高次の取り扱いが必要なので、細々としたグラフを示す事はさし控える。

#### 4. おわりに

ここでは、藪下氏のお話についてコメントした。引用文献の多くを藪下氏のもので代用したり、詳しい数値結果を省いたり、不完全な結果に終わってしまったが、 $r$ -展開法の筋道は確立出来たと考えている。今後は、その筋道に従って更に詳しい解析を行なって見たい。

#### 参考文献

本文でも述べたように、藪下氏の文献が詳しいので、そ

れを参照されたい。ここにあげるのは、本コメントと密接に関連したものだけである。

- 1) 武田英徳：本講究録の中にある武田氏の論文
- 2) E. A. Spiegel : *The Gas Dynamics of Accretion*,  
in *Interstellar Gas Dynamics*, ed. H. J. Habing,  
I. A. U., 1970, 201-214
- 3) H. Bondi and F. Hoyle : *On the Mechanism of Accretion  
by Stars*, *M. N. of Royal Astron. Soc.*  
Vol. 104 (1944), 273-282
- 4) R. Wolfson : *Axisymmetric Accretion near Compact Objects*,  
*Ap. J.* Vol. 213 (1977), 200-207
- 5) R. Hunt : *A fluid dynamical study of the accretion  
process*, *M. N. of Royal Astron. Soc.* Vol. 154 (1971),  
141-165