数理解析研究所講究録
第 316 巻 1977 年 1-18

差分方程式 $y(x+1)=y(x)+1+\dfrac{\lambda}{y(x)}$ の有理型解について

千葉大 理　　柳原二郎

1. 序論

1.-1. 一般的性質

T. Kimura [1] は，解析函数の iteration に関連して，つぎのような差分方程式を考察した：

$$(1.1)\qquad y(x+1)=y(x)+1+\frac{\lambda_1}{y(x)}+\frac{\lambda_2}{y(x)^2}+\cdots$$

ここで $\dfrac{\lambda_1}{z}+\dfrac{\lambda_2}{z^2}+\cdots$ は，$|z|$ が大のとき収束するものとする．この方程式の解を global に研究するための準備的な研究として，T. Kimura [2] はその最も簡単な場合

$$(E)\qquad y(x+1)=y(x)+1+\frac{\lambda}{y(x)}$$

について調べ，つぎの結果を得た：

1°) (E) は，$y(x)\equiv-\lambda$ なる trivial な解をもつが，それ以外にも有理型な解が存在し，それらはすべて超越的で，

$\lambda \neq 1$ ならば任意の値をとる。$\lambda = 1$ ならば -1 以外の任意の値をとる [2, P. 80, 定理 3.2]。したがってとくに正則な解は, trivial な解 $y(x) \equiv -\lambda$ に限る。

2°) $y(x)$ を (E) の有理型な解とする。x_0 が $y(x)$ の極ならば, x_0+m, $m=1,2,\cdots$ も極である。また, x_1 が $y(x)$ の零点ならば, x_1+1 は $y(x)$ の極である。

さらに Takano [3] はつぎのことを証明した：

3°) (E) の有理型な解 (trivial でない) は hypertranscendental である。すなわち, 代数的な微分方程式の解とはならない。

1.-2. Kimura による解

$\varepsilon > 0$ と $R > 0$ とに対し

$$(1.2)\qquad D_\ell(R,\varepsilon) = \{x;\ |x|>R,\ |\arg x - \pi| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\} \cup \cup \{Im(xe^{-i\varepsilon}) > R\} \cup \{Im(xe^{i\varepsilon}) < -R\}$$

とおく。複素数 c と $\varepsilon > 0$ とを任意に与えるとき, $R > 0$ がきまって,

$D_\ell(R,\varepsilon)$ で正則で, かつそこで $|x| \to \infty$ のとき

$$(1.3)\qquad \phi(x,c) \sim x\Big(1 + \sum_{j+k\geq 1} p_{jk}\, x^{-j}(x^{-1}\log x)^k\Big),\quad p_{10} = c,$$

をみたす有理型な解 $\phi(x,c)$ が存在する [2, P. 81]。このとき

4°) $\phi(x,c) = \phi(x+c, 0)$ [2, P. 82].

[2] の諸結果から容易につぎのことがわかる：

5°) $D=\{x; |x|>R,\ Re(x)<0\} \cup \{x;\ |Im(x)|>R\}$

とおくと，$\phi'(x,c)$ は D で有界で，$\dfrac{\phi(x,c)}{x} \to 1\ (x\to\infty)$.

これらを用いると

定理 1. $\phi(x,c)$ の Nevanlinna の位数 $=\infty$.

これの応用として

定理 2. c と λ とできまる直線 $\{Im(x)=\eta_0\}$ が存在してつぎの性質をもつ： $\Pi_\delta=\{|Im(x)-\eta_0|<\delta\}$ とおくと

(i) $\lambda\neq 1$ ならば $\phi(x,c)$ は，任意の $\delta>0$ に対し Π_δ 内ですべての値を無限回とる．くわしくいえば，任意の値 $a\ (|a|\leqq\infty)$ に対し，Π_δ 内にある $\phi(x,c)=a$ の根を $x_n(a,\delta)$ とおくと，任意の $\rho>0$ に対して

(1.4) $$\sum |x_n(a,\delta)|^{-\rho}=\infty.$$

(ii) $\lambda=1$ ならば，$a\neq -1$ に対して (1.4) が成り立つ．

証明には，帯状領域における Nevanlinna 第 2 基本定理（それは，M. Tsuji [4, P.272] による角領域での第 2 基本定理と全く同様にして得られる）を用いる．

定理 2 にいう直線 $\{Im(x)=\eta_0\}$ は，多分 1 本であろうと思われるが，よくわからない．

1.-3. $\left|1-\dfrac{1}{\lambda}\right|>1$ のとき．

$1-\dfrac{1}{\lambda}=e^a$ とおくと，$Re(a)>0$．$-\pi<Im(a)\leqq\pi$ と

してよい．このときには，上記の Kimura の解 $\phi(x, c)$ のほかに，つぎのような有理型な解 $s(x, c')$ （c' は任意の複素数）がある：$\varepsilon>0$ を任意に与えるとき，c' と ε とできまる $R>0$ あって，$s(x, c')$ は

$$S(a, \varepsilon, R)=\{x\ ;\ |x|>R,\ |\arg(ax)-\pi|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\}$$

において正則で，そこで $x \longrightarrow \infty$ のとき

$$(1.5)\qquad s(x) \sim -\lambda+\sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{jax}, \quad p_1=c'$$

なる漸近展開をもつものである．証明は

$$Q_N(x)=\sum_{j=1}^{N-1} p_j e^{jax},$$

$$W_N(x)=Q_N(x-1)-Q_N(x)+Q_N(x-1)\big/\big(-\lambda+Q_N(x-1)\big)$$

とおき，函数族 $\mathfrak{F}$ を

$$\mathfrak{F}=\{\xi(x)\ ;\ \xi(x) \text{ は } S(a, \varepsilon, R_N) \text{ で正則で，そこで } |\xi(x)| \leqq K_N\,|e^{Nax}| \text{ をみたす}\}$$

とする．ここで K_N, R_N は適当な正数である．

$\xi(x) \in \mathfrak{F}$ に対して

$$(T\xi)(x)=\xi(x-1)+\frac{-\lambda\,\xi(x-1)}{\big(Q_N(x-1)+\xi(x-1)-\lambda\big)\big(Q_N(x-1)-\lambda\big)}+W_N(x)$$

と定義すると，R_N, K_N が適当ならば，T は $\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{F}$ の中への写像となり，不動点定理が適用されて，解 $s(x, c')$ の存在がわかる．

$s(x, c')$ の性質として

6°) $c'=0$ すなわち $p_1=0$ ならば $p_k=0$, $k\geqq 2$. したがって, trivial な解 $y(x)\equiv -\lambda$ は $s(x,0)$ である.

7°) $s(x,c') = s(x+\frac{1}{a}\log c', 1)$ $(c'\neq 0)$

8°) $s(x+\frac{2\pi i}{a}, c') = s(x,c')$. したがって $s(x,c')$ は e^{-ax} の函数として $s(x,c') = \psi(e^{-ax})$ とかける. ここで $\psi(z)$ は $0<|z|\leqq\infty$ で有理型で, $z=0$ で真性特異点をもつ.

1-4. その他の解の表示.

4°), 7°) により, ある c, c' に対して $\phi(x,c)$, $s(x,c')$ がわかれば他の c_1, c_1' に対しての $\phi(x,c_1)$, $s(x,c_1')$ もわかることとなる. したがって以下, 単に $\phi(x)$, $s(x)$ とかいて任意に指定された $c=p_{10}$, $c'=$ $=p_1(\neq 0)$ をもつ解をあらわすものとしておく.

$\pi(x)$ を周期1の整函数とする. $\phi(x+\pi(x))$, $s(x+\pi(x))$ などがやはり解となることは明らかである. それ以外に解はないであろうか? ここで示そうとするのはつぎの定理である.

定理3. (i) $|1-\frac{1}{\lambda}|>1$ のとき, (E) の任意の有理型な解 $y(x)$ は

(1.6) $$y(x) = \phi(x+\pi(x))$$

とかけるか, または

(1.7) $$y(x) = s(x+\frac{1}{a}\log\pi(x))$$

とかける．ここで $\pi(x)$ は周期 1 の整函数である．

(ii) $\left|1-\frac{1}{\lambda}\right|<1$ のときには，(E) の有理型な解はすべて (1.6) の形にかける．

(1.7) で $\pi(x)\equiv 0$ としたのが trivial 解 $y(x)\equiv -\lambda$ である．($\left|1-\frac{1}{\lambda}\right|=1$ の場合はまだわからない．)

これを少し言いなおしておく．つぎの記号を用いる：

$$L(\eta_0;K)=\{x=\xi+i\eta_0\,;\,-\infty<\xi\leqq K\},$$

$$Q_\delta=Q_\delta(\eta_0;c)=\{x=\xi+i\eta_0\,;\,c\leqq\xi\leqq c+2,\ |\eta-\eta_0|\leqq\delta\}$$

$$S_\delta(\eta_0)=\{x=\xi+i\eta\,;\,-\infty<\xi<\infty,\ |\eta-\eta_0|<\delta\},$$

$$H(\eta_0,\delta;K)=\{x=\xi+i\eta\,;\,-\infty<\xi\leqq K,\ |\eta-\eta_0|\leqq\delta\}.$$

いま $y(x)$ は (E) のある有理型な解とする．

$$(1.8)\quad \left\{\begin{aligned}X=\{\eta\,;\ &\text{ある定数 } K(\eta) \text{ に対し，} y(x) \text{ が}\\ &L(\eta,K(\eta)) \text{ 上に極をもたない}\}\end{aligned}\right.$$

とおく．このとき明らかに，つぎの 2 つの中のどちらか 1 方が成り立つ：

$$(1.9)\qquad \text{ある } \eta_0\in X \text{ に対し } \varlimsup_{\xi\to-\infty}|y(\xi+i\eta_0)|=\infty.$$

$$(1.10)\qquad \text{任意の } \eta_0\in X \text{ に対し } \varlimsup_{\xi\to-\infty}|y(\xi+i\eta_0)|<\infty.$$

すると明らかに，定理 3 はつぎの定理 4－6 に含まれる．

定理 4．$y(x)$ が条件 (1.9) をみたすならば，$y(x)$ は (1.6) の形にかける．

定理5. $|1-\frac{1}{\lambda}|>1$ とし，$y(x)$ は条件(1.10) をみたすとすると，$y(x)$ は (1.7) の形にかける。

定理6. $|1-\frac{1}{\lambda}|<1$ ならば，(E) の trivial でない解は (1.10) をみたさない。

さらにもっと高次の方程式

$$(E_n)\qquad y(x+1)=y(x)+1+\frac{\lambda_1}{y(x)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{y(x)^n}$$

も考えられる。このとき

$$t^n+\lambda_1 t^{n-1}+\cdots+\lambda_n=P(t)$$ とおくと

μ が $P(t)=0$ の単根ならば，上記の $-\lambda$ の代りに μ をとって，対応することがいえる。重根については事情がやや複雑である。

2. 定理4の証明.

2-1. いくつかの補題

補題 2.1. $\phi(z)$ は (1.3) にいう解とする。$\varepsilon<\frac{\pi}{4}$ とする。$l>\max(\sqrt{2}R,1)$ を十分大にとれば

(2.1) $\quad |\phi'(z)-1|<1/2 \quad$ in $D_l(R,\varepsilon;l)$

(2.2) $\quad |\phi(z)/z-1|<1/6 \quad$ in $D_l(R,\varepsilon;l)$,

(2.3) $\quad w=\phi(z)$ は $D_l(R,\varepsilon;l)$ において $Re(w)<-4l$ なる任意の値をとる，

(2.4) $\quad \phi(z)$ は $D_\ell(R,\varepsilon;\ell)$ で単葉である,

$(D_\ell(R,\varepsilon;\ell)=D_\ell(R,\varepsilon)\cap\{|z|>\ell\})$.

(証明は容易.)

<u>補題 2.2.</u> ([1, P. 222, 定理 9.1])

$$(2.5) \qquad F(z)=z+1+\frac{\lambda}{z}$$

とかき,

$$(2.5') \qquad z_n=F^n(z)$$

とおく。このとき, $n=1,2,\cdots$ に対し

$$(2.6) \qquad z_n=z+n+h_n(z)+g_n(z)$$

とする。ここで

$$(2.7) \qquad h_n(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\lambda\Big/(z+j).$$

であって, $z\in D'(\varepsilon,T)=\{z;\ Re(z)>0,\ -z\in D_\ell(T,\varepsilon)\}$

のときある定数 M に対して (M は n によらない)

$$(2.8) \qquad |g_n(z)|\leqq M\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|h_{j+1}(z)|+1}{|z+j|^2}$$

が成り立つ. ここで T は十分大な正数である.

これからさらに

<u>補題 2.3.</u> $y(x)$ は有理型解とし, $\eta_0\in X$ とすると, ある $K(\eta_0)$ あって,

$$\xi\leqq K(\eta_0) \text{ のとき } Re[y(\xi+i\eta_0)]<T'=T+1$$

が成り立つ (T は補題 2.2 にいう正数).

さらに

<u>補題 2.4</u>　$\eta_0 \in X$ とし，$y(x)$ は $L(\eta_0; N)$（N は整数）上に極をもたないとする。このとき $K=K(\eta_0)$ と $\sigma=\sigma(\eta_0)$ とあって，$y(x)$ は $H(\eta_0, \sigma; K)$ において正則でかつ $Re\,[y(x)] < T' = T+1$（T は補題 2.2 にいう数）.

<u>補題 2.5</u>.　$y(x)$ は条件 (1.9) をみたすとする。このとき ある $\xi_n \downarrow -\infty$ に対して $Re\,[y(\xi_n + i\eta_0)] \to -\infty$ となる。

<u>補題 2.6</u>.　$y(x)$ は条件 (1.9) をみたすとする。このとき ある $\xi_n \downarrow -\infty$ に対し，$Re\,[y(\xi_n + x)] \to -\infty$ が，$H(\eta_0, \sigma; K)$ の各 compact 集合上一様に成り立つ．

<u>補題 2.7</u>.　$y(x)$ は条件 (1.9) をみたすとする。このとき ある正数 δ と，$S_\delta(\eta_0)$ で正則な函数 $\pi_\delta(x)$（$\pi_\delta(x+1) = \pi_\delta(x)$）があって，

(2.9)　$$y(x) = \phi(x + \pi_\delta(x))$$

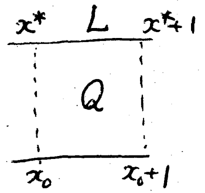
が $x \in S_\delta(\eta_0)$ のとき成り立つ。

2.-2.　<u>定理 4 の証明</u>

$$\delta^* = \sup\{\delta\ ;\ \delta \text{ は (2.9) が成り立つ正数}\}$$

とおく．$\delta^* < \infty$ と仮定して矛盾を導こう．$\eta^* = \eta_0 + \delta^*$ とし，$x^* = \xi_0 + i\eta^*$ を，x^* も x^*+1 も $y(x)$ の極でないようにとり，$x_0 = \xi_0 + i\eta_0$ とおき，Q を 4 点 $x_0, x_0+1,$

x^*+1, x^* を頂点とする4角形で，L はその辺 $\overline{x^*\,(x^*+1)}$



とする。$\pi_{\delta^*}(x)$ なる $S_{\delta^*}(\eta_0)$ で正則な函数があって，(2.9) が成り立つ。$\pi_{\delta^*}(x)$ を $\pi^*(x)$ とかくことにする。

$x'\in L$ をとる。いま $\{x_n\}\subset Q$, $x_n\to x'$ あってその上で $\pi^*(x_n)$ が有界とする。b を補題2.1にいう数とし，N を十分大な正整数とすると

$$x_n - N + \pi^*(x_n) \in D_b(R,\varepsilon\,;2b),\quad n=1,2,\cdots.$$

すると $y(x_n-N)=\phi(x_n-N+\pi^*(x_n))$ は $n\to\infty$ のとき有界で，したがって $x'-N$ は $y(x)$ の極ではない。$\phi(z)$ は $D_b(R,\varepsilon\,;b)$ で正則単葉であるから，$\pi^*(x)$ は $x'-N$ まで，したがって x' まで，解析的に接続される。

それゆえ

$$E=\{x''\in L\,;\ \pi^*(x)\ \text{が}\ x''\ \text{まで接続されない}\}$$

とおくと，x が Q 内から $\to x''$ のとき $\pi^*(x)\to\infty$ とならねばならない。よって Lusin-Privalov の定理 [4, P.320, 定理 VIII. 28] により meas$(E)=0$.

E は明らかに閉集合であるから，$\pi^*(x)$ は $L-E$ の各開区間を越えて接続される。$I=\{x=\xi+i\eta^*\,;\ \xi_1<\xi<\xi_2\}$ はそのような区間の1つとする。ある $\delta_1>0$ をとって，$\pi^*(x)$ は $H=\{\xi+i\eta\,;\ \xi_3<\xi<\xi_4,\ |\eta-\eta^*|<\delta_1\}$ $(\xi_1<\xi_3<\xi_4<\xi_2)$

で正則となる。Nを十分大な自然数とすれば $y(x-N)=$ $=\phi(x-N+\pi^*(x))$ がHで成り立ち，これはHで正則である。

$x^0=\xi^0+i\eta^0\in H$ $(\eta^*<\eta^0<\eta^*+\delta_1)$ をとる。$y(x)$はあるK^0に対し$L(\eta^0;K^0)$上で極をもたないとしてよい。$\{N_m\}$を自然数列で$N_m\uparrow\infty$なものとすると$y(x^0-N_m)$ $=\phi(x^0-N_m+\pi^*(x^0-N_m))$ は$m\to\infty$のとき有界でない。それゆえ $\overline{\lim}_{\xi\to-\infty}|y(\xi+i\eta^0)|=\infty$ で，η_0の代りにη^0について論ずれば，補題2.7によってある$\delta^0>0$があって $y(x)=\phi(x+\pi^0(x))$ が$S_{\delta^0}(\eta^0)$で成り立つ。Nを十分大にして $x-N+\pi^*(x)$ と $x-N+\pi^0(x)$ とがどちらも$x\in H$のとき実部が$-4l$より小なようにすれば，$y(x-N)=\phi(x-N+\pi^*(x))=\phi(x-N+\pi^0(x))$ でϕがそこで単葉であるから $\pi^*(x)=\pi^0(x)$. すなわち$\pi^0(x)$は$\pi^*(x)$の解析接続と考えられ，必要ならばこれをくり返すことにより $\delta^0=\eta^0-\eta^*$ としてよい。したがってEのある近傍Uがあって，$\pi^*(x)$は$U-E$で1価正則となる。

$\pi^*(x)$がEの点で真性特異点をもつとすると，Eは$N_{\mathfrak{L}}$集合（$meas(E)=0$ ゆえ）だからその任意の近傍でたかだか2個以外の値をすべてとる。ところが $y(x)=\phi(x+\pi^*(x))$ がEの近傍で成り立っているから，これは$y(x)$がE上で

も有理型ということに矛盾する（$N_{\mathcal{G}}$ 条件については [5], [6] をみよ。）

こうして，E の点は $\pi^*(x)$ に対し，たかだか極であるにすぎないが，もし $\pi^*(x)$ が $x''\in E$ で極をもてば，$y(x) = \phi(x+\pi^*(x))$ は x'' で真性特異点をもつこととなり，$y(x)$ が有理型ということに矛盾する。

それゆえ $E=$ (空) で，$\pi^*(x)$ は L 全体を越えて接続される。$\pi^*(x+1)=\pi^*(x)$ であるから $\pi^*(x)$ は $Im(x)=\eta^*$ 全体を越えて接続される。同様に $Im(x)=\eta_0-\delta^*$ をも越えて接続され，よって $y(x)$ はある $\delta^{\wedge}>\delta^*$ に対し，(2.9) のようにあらわされ，これは δ^* が sup ということに矛盾する。

以上により，$\delta^*=\infty$ でなければならず，$y(x)$ は (1.6) の形にあらわされたこととなる。　　証明終

3. 定理 5 の証明

3.-1. いくつかの補題

$s(x)$ は $\psi(e^{-ax})$ とかかれ，$\psi(z)$ は $0<|z|\leqq\infty$ で正則で $z=0$ で真性特異点をもつことはすでに注意した。

補題 3.1. $\psi(z)$ は $|z|>R$ (R は十分大) で単葉である。

補題 3.2. σ が十分小のとき，$\psi(z)$ は，$0<|w+\lambda|<\sigma$

をみたす任意の w を，$|z|>4R$ においてとる。

<u>補題 3.3.</u>　$y(x)$ が極 $\{x_n^0\}$，$x_n^0=\xi_n^0+i\eta_0$，$\xi_n^0\downarrow-\infty$ をもつとする。任意の $\rho>0$ に対し $\delta=\delta(\eta_0,\rho)>0$ と $K=K(\eta_0,\rho)$ とがあって

(3.1) $\left\{\begin{array}{l} H_\rho(\eta_0,\delta\,;K)=\{x=\xi+i\eta\,;\ \xi\leqq K,\ |\eta-\eta_0|<\delta, \\ \qquad\qquad |x-x_n^0|\geqq\rho,\ n=1,2,\cdots\} \\ \text{において } y(x) \text{ は正則で，} Re[y(x)]<T' \\ \quad (T' \text{ は補題 2.3 にいう数}) \end{array}\right.$

この補題により，任意の η_0 と $d>0$ と $\rho>0$ とに対し $K=k(\eta_0,d,\rho)$ があって，

(3.2) $\left\{\begin{array}{l} H_\rho(\eta_0,d\,;K)=\{x=\xi+i\eta\,;\ \xi\leqq K,\ |\eta-\eta_0|<\delta, \\ \qquad\qquad |x-x_n|\geqq\rho,\ n=1,2,\cdots\} \\ \text{において } y(x) \text{ は正則でかつ } Re[y(x)]<T' \\ \quad (\{x_n\} \text{ は } y(x) \text{ の極の全部}) \end{array}\right.$

が成り立つことがわかる。また

(3.3)　$x\in H_\rho(\eta_0,d\,;K)$ なら $x-1\in H_\rho(\eta_0,d\,;K)$

なること，および，x が $y(x)$ の極から少くも ρ 以上の距離にあってかつ $|Im(x)-\eta_0|<d$ ならば

(3.4)　ある自然数 m に対し $x-m\in H_\rho(\eta_0,d\,;K)$

なること，に注意しておく．

<u>補題 3.4.</u>　$y(x)$ は条件 (1.10) をみたすとする。このとき，自然数の列 $\{m_k\}$, $m_k \uparrow \infty$ があって

(3.5) $\left\{\begin{array}{l} H' \ (\ |x|<\infty \text{ から } y(x) \text{ の極を除いたもの}) \\ \text{の任意の compact 部分集合上で一様に} \\ \qquad y(x-m_k) \longrightarrow -\lambda \quad \text{が成り立つ.} \end{array}\right.$

証明．$\{\exp[y(x-m)]\}_{m=1}^{\infty}$ は $H_\rho(\eta_0, d, K)$ において正規族をなす ((3.2) による)．よって，広義一様収束する部分列がとれる．$d_n \uparrow \infty$, $\rho_n \downarrow 0$ をとり，各れに対してやはり部分列をとる．ここで (3.4) のため，正規族をなすための数 K は d_n, ρ_n によらず一定にとれることに注意する。こうして対角線論法により任意の $\rho>0$, $d>0$，および K に対し，したがって H' の任意の compact 集合上で一様に収束する部分列がとれる．その極限函数を $Y(x)$ とすると，$Y(x)$ は $y(x)$ の極を除いては正則であるが，極の近傍でも $Re[Y(x)] \leqq T'$ だから，$Y(x)$ はそこでも正則で，したがって ($Y(x)$ はやはり解になっているから) 最初に述べたようにそれは trivial な解でなければならない：$Y(x) \equiv -\lambda$．これは (3.5) が成り立つことを示している．

3.-2. <u>定理5 の証明</u>

$R>0$ と $\sigma>0$ とを，補題 3.1 と 3.2 にいう数とする．補題 3.4 により，数 c と $\delta(>0)$ とがあって

(3.6) $$|y(x)+\lambda|<\sigma \quad \text{for } x\in Q_\delta(\eta_0;c)$$

が成り立つ．ここで η_0 としては，$y(\xi+i\eta_0)\neq-\lambda$ なようにとっておく．容易にわかるように，δ が十分小なら

(3.6′) $$0<|y(x)+\lambda|<\sigma \qquad x\in Q_\delta(\eta_0;c)$$

である．（$y(x_0)=-\lambda$ なら $y(x_0+1)=-\lambda$，なことによる。）

$x\in Q_\delta(\eta_0;c)$ に対し，$\psi(t)=y(x)$ をみたす $|t|>R$ が1意的にきまる（補題 3.1 と 3.2 による）．よって $t=\psi^{-1}[y(x)]$ は $Q_\delta(\eta_0;c)$ で正則である．

(3.7) $$z=-\frac{1}{a}\log(\psi^{-1}[y(x)]) \quad ,\ \text{i.e.,}\quad s(z)=y(x)$$

(3.7′) $$\varkappa_\delta(x)=-\frac{1}{a}\log(\psi^{-1}[y(x)])-x$$

とおく．$\varkappa_\delta(x)$ は $Q_\delta(\eta_0;c)$ において正則であり，$x\in Q_\delta$，$c\leqq \mathrm{Re}\,x\leqq c+1$，のとき（3.7）から

$$y(x+1)=y(x)+1+\lambda/y(x)=s(z)+1+\lambda/s(z)=s(z+1)$$

それゆえ $\psi(t)$ の単葉性により

(3.8) $$\varkappa_\delta(x+1)=\varkappa_\delta(x)+2k\pi i/a$$

を得る．ここで k は整数で，明らかに $x\in Q_\delta(\eta_0;c)$ によらない．こうして $\varkappa_\delta(x)$ は $S_\delta(\eta_0)$ 全体に周期性(3.8)によって接続される．

(3.8′) $$\varkappa_\delta(x)=\frac{1}{a}\log\pi_\delta(x)$$

とおくと $\varkappa_\delta(x)$ が $S_\delta(\eta_0)$ で正則なことから $\pi_\delta(x)$ はそこで0とならず，正則でかつ

$$\pi_\delta(x+1) = \pi_\delta(x) \qquad x \in S_\delta(\eta_0) \tag{3.8''}$$

をみたす．こうして，ある $\delta > 0$ と $S_\delta(\eta_0)$ で正則な π_δ とがあって

$$\begin{aligned} y(x) &= s\left(x + \frac{1}{a}\log \pi_\delta(x)\right) \qquad x \in S_\delta(\eta_0) \\ &= \psi(e^{-ax}\ \pi_\delta(x)^{-1}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

が成り立つことがわかる．

$$\delta^* = \sup\{\delta\ ;\ (4.9) \text{ が成り立つような } \delta\}$$

とおき，$\delta^* < \infty$ ということから矛盾を導く．その方法は定理4の場合とほとんど同じであるが，$\pi_{\delta^*}(x)$ が接続できないような点の集合 E を考えると，E はやはり測度 0 で $\pi_{\delta^*}(x)$ はそこでは 0 となることはあり得る．しかし π_{δ^*} が接続できないような点はないことが結局示され，$\delta^* = \infty$ となって，定理5の証明が終る．（(3.9) で，$\pi_\delta(x) \to 0$ となっても $e^{-ax}\pi_\delta(x)^{-1} \to \infty$ ゆえ ψ は正則であるが，$\pi_\delta(x) \to \infty$ となると $e^{-ax}\pi_\delta(x)^{-1} \to 0$ で，ψ の真性特異点に近づく，ことに注意しよう．）

4. 定理6の証明．

$y(x)$ は有理型な解で，条件 (1.10) をみたすとする．補題3.4（それは任意の λ について成り立つものである）により $\eta_0 \in X$ 上で $y(\xi + i\eta_0) \to -\lambda$ $(\xi \to -\infty)$．よっ

て $y(x) = -\lambda + w(x)$ とおくと $w(\xi + i\eta_0) \to 0 \quad (\xi \to -\infty)$.

方程式 (E) により

$$w(x+1)/w(x) = 1 - 1/(-\lambda + w(x)) \to 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

$|1 - \frac{1}{\lambda}| < A < 1$ な A をとると，ある ξ_0 に対し，$\xi \leqq \xi_0$ のとき $|w(x+1)/w(x)| \leqq A \quad (x = \xi + i\eta_0)$．したがって

$$|w(\xi_0 - m + i\eta_0)| \geqq A^{-m} \, |w(\xi_0 + i\eta_0)| \, .$$

$m \to +\infty$ とすれば $\xi_0 - m \to -\infty$ で，しかも $w(\xi_0 - m + i\eta_0) \to \infty$ となるから，これは $y(x) \to -\lambda$ としたことに矛盾する．ゆえに $|1 - \frac{1}{\lambda}| < 1$ なる (1.10) はどの有理型解についても成り立たない．

REFERENCES

[1] T. Kimura: "On the iteration of analytic functions". Funkcialaj Ekvacioj, 14(1971), 197-238.

[2] T. Kimura: "On meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}$". Lecture Notes in Math., #312(Symposium on Ordinary Differential Equations). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[3] K. Takano: "On the hypertranscendency of solutions of a difference equation of Kimura". Funkcialaj Ekvacioj, 16(1973), 241-254.

[4] M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory. Chelsea Publ., New York, 1975.

[5] L. Ahlfors and A. Beurling: "Conformal invariants and function-theoretic null-sets". Acta Math., 83(1950) 101-129.

[6] S. Kametani: "On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions". Japanese Jour. Math., 19 (1945), 217-257.