数理解析研究所講究録
第316巻 1977年 27-29

或種の離散部分群 $\subset \mathrm{Aut}(B_n)$ の基本領域の体積公式

神戸大 理　吉田正章

§1.　Laurricella の超幾何微分方程式 F_D のモノドロミー群 Γ で、単位球体 $B_n=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid \sum|z_j|^2<1\}$ に働く離散部分群になっているものに対して、その基本領域 F の体積を与える公式を作る。B_n の metric は普通の Bergmann metric

$$ds^2=4\frac{(1-\sum|z_j|^2)(\sum dz_j d\bar{z}_j)+(\sum\bar{z}_j dz_j)(\sum z_j d\bar{z}_j)}{(1-\sum|z_j|^2)^2}$$

で与えられているとして、F_D は $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ で定義されているとする。今、F_D の singular locus の p $(0\leq p\leq n-1)$ 次元の成分を $S_1^{(p)},\cdots,S_{\nu(p)}^{(p)}$ とし、$S_j^{(p)}$ の generic point における F_D の local monodromy 群の位数を $n_j^{(p)}$ とすると、F の体積は

$$\frac{1}{2}\frac{O_n}{K_n}\left(-(n+1)+\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{\nu(p)}\left(1-\frac{1}{n_j^{(p)}}\right)\right)$$

で与えられる．ここで，

O_n ： $2n$ 次元球面 S^{2n} の体積，

$$K_n := \frac{n!}{(2n)!}\left(n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1+n) - 2^n\right).$$

注意　$n=1$ のとき，F_D は Gauss の超幾何微分方程式

$$x(1-x)y'' + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0$$

になり，モノドロミー群が離散的（即 Fuchs 群）になるのは，$|1-\gamma|$，$|\gamma-\alpha-\beta|$，$|\alpha-\beta|$ が各々整数 n_1, n_2, n_3 の逆数で，$1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3 < 1$ となる場合である．一方

$$O_1 = 4\pi, \quad K_1 = 1$$

故，上記公式は，

$$\mathrm{vol}(F) = 2\pi(1 - 1/n_1 - 1/n_2 - 1/n_3)$$

となり，よく知られた円弧三角形の（2倍）面積公式である．

注意　$n \geqq 2$ のときも $n_j^{(p)}$ は F_D の係数から容易に決る．

§2．公式の証明の概略．

佐竹先生の V-manifold 上の Gauss-Bonnet の定理を適用すればよい．F が non-compact の場合の積分の処理は，B_n を第2種 Siegel 領域（上半空間）に移して行う．また Gauss 曲率を求めるには（constant であることは明），

holomorphic sectional curvature $= -1$ 故，公式

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = -\frac{1}{2}(g_{\alpha\bar{\beta}}\, g_{\gamma\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\delta}}\, g_{\bar{\beta}\gamma})$$

を $z=0$ で使うとよい.

文献

[1] Satake, I : The Gauss-Bonnet Theorem for V-manifolds. J. of Math. Soc. of Jap. 9, No. 4. (1957)

[2] T. Terada : Problème de Riemann et fonctions… J. of Math. of Kyoto Univ. 13 No 3 (1973)

[3] Yano, K and Bochner, S : Curvature and Betti numbers. Princeton (1953).