数理解析研究所講究録
第 316 巻 1977 年 41-47

Multiplicity の Bifurcation と Newton boundary の位相について

東大 理　岡 睦雄

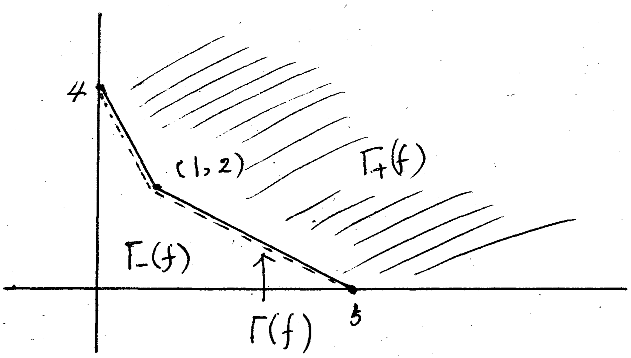
A.G. Kouchnirenko は [1] において、次の美しい公式を示した。$V=f^{-1}(0)$ を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で正則な函数 $f(z)$ で定義された超曲面で、原点で孤立特異点を持ち、f の Newton 主要部が非退化ならば、f の 0 での Milnor 数 $\mu(f,0)=\dim_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}/\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)$ が多面体 $\Gamma_-(f)$ の "Newton 数" と一致する事を示した。彼の証明は極めて代数的でありベクトル空間 $\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}/\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)$ の階数を "Newton filtration" を使って巧みに計算している。

この草稿では $\mu(f,0)$ は Milnor fiber の Middle Betti 数であり、それは連立方程式 $\frac{\partial f}{\partial z_1}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial z_n}=0$ の $z=0$ の多重指数でもあるという立場から、幾何的に Bifurcation を用いて、得られる事を示す。

1. 種々の定義（[1], [2] 参照）.

$f(z)=\sum_\nu a_\nu z^\nu$ を $z=0$ を中心としたTaylor展開とする。（ν は $\mathbb{Z}^n$ の元であり，$\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ のとき $z^\nu=z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n}$）$a_\nu\neq 0$ なる ν についてその上半空间 $\nu+(\mathbb{R}^+)^n$ をとり，その ν，（$a_\nu\neq 0$）での和集合の凸包を $\Gamma_+(f)$ で表し，そのコンパクトな面で境界に含まれるものの全体を $\Gamma(f)$ で表わし，Newton境界と呼ぶ。$\Gamma_-(f)$ で $(\mathbb{R}^+)^n-\Gamma_+(f)$ を表す。

例. $f(z)=z_1^5+z_1z_2^2+z_1^2z_2^2+z_2^4$



$\Gamma(f)$ は自然に多面体（$(n-1)$ 次元）になる．Δ を $\Gamma(f)$ の任意の(閉)面とした時，$f_\Delta(z)$ を $\sum_{\nu\in\Delta}a_\nu z^\nu$ で定義する．$f(z)$ が $\Delta\in\Gamma(f)$ で非退化とは $\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1}=\cdots=\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n}=0$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ で根を持たない事を示す。f が非退化とは任意の面 $\Delta\in\Gamma(f)$ で f は非退化である時を言う。f の Newton 主要部を $\sum_{\nu\in\Gamma(f)}a_\nu z^\nu$ で定義する.

P が $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな多面体の時，Newton数 $\nu(P)$ を $\sum_{I\subset\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{n+|I|}\,n!\,\mathrm{Volume}(P_I)$ で定義する．ただし．$P_I=\{x\in P;\ x_j=0\ \ j\notin I\}$ で，$\mathrm{volume}(P_I)$ は $|I|$ 次元のEuclidの体積.

上の例では $\nu(\Gamma_-(f)) = 14-(5+4)+1 = 6.$

$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ が $\mathbb{C}^n$の原点の近傍から $\mathbb{C}^n$への解析写像で、$\varphi(0)=0$, $\varphi^{-1}(0)$の中で0が孤立しているとする。その時 $\varepsilon>0$ を十分小さく取り $D_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \|z\|\le\varepsilon\}$ と $\varphi^{-1}(0)$の共通部分が 0のみにできる。その時 方程式 $\varphi_1(z)=\cdots=\varphi_n(z)=0$ の多重指数を $\hat{\varphi}=\varphi/\|\varphi\| : \partial D_\varepsilon \longrightarrow S^{2n-1}$ の写像としての次数で定義する。これを $\mu(\varphi, 0)$ で表す。更に解析写像の解析的族 $\{\varphi_t\}_{0\le t\le 1}$ が与えられ，$\varphi_0=\varphi$で，$\varphi_t^{-1}(0)\cap\partial D_\varepsilon=\phi$ のとき，分岐指数 $Bf(\varphi_t,0)$ を $\mu(\varphi_0,0)-\lim_{t\to 0}\mu(\varphi_t,0)$ で定義する。

2. 以下では $f(z)$は Newton主要部が非退化で、$\Gamma(f)$は各座標軸 $\mathbb{R}_i=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_j=0\ j\ne i\}$ と空でなく交ると仮定しよう。fの原点での多重指数は次の方程式:

$$(M):\ \frac{\partial f}{\partial z_1}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial z_n}=0$$

の $\mu(M,0)$ と一致する。([2]) これを直接計算する代りに、

$$(A):\ z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}=\cdots=z_n\frac{\partial f}{\partial z_n}=0$$

を考える。$I\subset\{1,2,\cdots,n\}$ に対して，$f_I(z^I)$ を fの $\mathbb{C}^I=\{z\in\mathbb{C}^n;\ z_j=0\ \text{if}\ j\notin I\}$ とすると、非退化の仮定より容易に f_I も $\mathbb{C}^I$ で孤立特異点を(原点で)持つ事がわかる。

多重指数の加法性より容易に

命題: $\mu(A,0)=\sum_I \mu(f_I,0)$, ($\mu(f_\phi,0)=1$).

これによって $\mu(A,0)$ より $\mu(f,0)$ が求められる.

さて(A)の計算の為に、$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\in \mathbb{C}^n$ を固定して、

$$(A_t):\quad z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}-t\gamma_j=0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

を考えよう. 次の定理が主定理である.

定理1. f の Newton 主要部の係数が一般で, γ が $\Gamma(f)$ に対して一般であれば, Bf. $\mu(A_t,0)=n!\,\mathrm{volume}\,\Gamma\!\!\!-(f)$. しかも $t\neq 0$ が十分小ならば, (A_t) の根は全て単純。

注意. $\forall\Delta\in\Gamma(f)$ に対して, $L(\Delta)$ を Δ の頂点で生成される $\mathbb{C}^n$ の vector space とする。γ が $\Gamma(f)$ に対して一般とは $v_1,\cdots,v_k$ を $\Gamma(f)$ の任意の頂点とし, $\gamma\in L(v_1,\cdots,v_k)$ ならば $\mathrm{rank}(v_1,\cdots,v_k)=n$.

系. $\mu(f,0)=\mu(M,0)=\nu(\Gamma\!\!\!-(f))$.

これは上の定理及び命題より直ちに得られる.

3. 証明の方針及び注意.

A_t の根 $z(t)$ で $z(t)\to 0,(t\to 0)$ なるものは, 曲線選択定理より, 解析曲線で表される. それを今

$$z(t)=(z_1(s),\cdots,z_n(s)),\quad t=s^b$$

$$z_j(t)=\alpha_j s^{a_j}+\ \text{higher} \text{ とする. } (j=1,\cdots,n).$$

$l_a(x)=\sum_{j=1}^n a_j x_j$ を考える. $I=\{i \mid z_i(s)\neq 0\}$.

$l_a | \Gamma(f_I)$ が最大値をとる面をΔとする. その時(A_t)に
$(z(s), s^{t})$ の最初の項を比べると、次の方程式を得る.

$$\alpha_j \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_j}(\alpha) = \gamma_j \qquad (j=1,\cdots,n)$$

ただし、$\alpha_j = 0$ for $j \notin I$. γの一般性の仮定より$I = \{1,\cdots,n\}$で. $\dim\Delta = n-1$を得る. 従って問題は次の2つに分けられる.

(I) $\Delta \in \Gamma(f)$, $\dim\Delta = n-1$の時、

$$B_\Delta(\gamma): \quad \alpha_j \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_j}(\alpha) = \gamma_j \qquad (j=1,\cdots,n)$$

が$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$の方程式として$(\mathbb{C}^*)^n$に何個の根をもつか.

(II) $B_\Delta(\gamma)$の解と(A_t)($\alpha(s)$)の解の対応はどうか.

(I)は難しいが(II)は次の様に明解な回答を与えられる.
今. $m(\Delta)_1 x_1 + \cdots + m(\Delta)_n x_n = d(\Delta)$を$\Delta$の定義方程式で各$m(\Delta)_j$は正の整数とする.

補題: (I)の孤立解を1つ固定(それをα^0とする)して, α^0の$B_\Delta(\gamma)$での多重指数を$\mu(B_\Delta(\gamma),\alpha^0)$とする. その時$s$を十分小さくとれば$\alpha^0(s) = (\alpha_1^0 s^{m(\Delta)_1},\cdots,\alpha_n^0 s^{m(\Delta)_n})$の十分近くに$A_{s^{d(\Delta)}}$の根が多重性をこめて丁度$\mu(B_\Delta(\gamma),\alpha^0)$コ存在する; これは写像度に対するRouchéの原理及び. fの非退化性より直ちに得られる. (略).

(I)については次の補題がKeyとなる答である.

補題： $B_\Delta(\gamma)$ は丁度 $n!\,\mathrm{volume}\,\Delta(0)$ コの単純根をもつ（ただし係数は一般，$\Delta(0)$ は Δ と原点とのcone）.

この補題の証明を完全に与えるには紙数が足らないので，省略するが，一番簡単な時のoutlineを与えておこう．今 Δ の頂点が丁度 n コでそれを $\nu^1, \dots, \nu^n$ とする．$f_\Delta(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j z^{\nu^j}$ と書ける．この時 $B_\Delta(\gamma)$ は，

$$\begin{pmatrix} \nu_1^1 & \cdots & \nu_1^n \\ \vdots & & \\ \nu_n^1 & \cdots & \nu_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \alpha^{\nu^1} \\ \vdots \\ c_n \alpha^{\nu^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

と書ける．行列 $M=(\nu_j^i)$ の逆行列を乗ずれば，

$$\begin{pmatrix} c_1 \alpha^{\nu^1} \\ \vdots \\ c_n \alpha^{\nu^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, \quad (\forall \delta_j \neq 0)$$

と書ける．$d=\det M$ として，$N=d\cdot M^{-1}$ とすれば N は整係数行列で，$\det N = d^{n-1}$．今変換 $\alpha=\beta^N$ i.e. $\alpha_j=\beta_1^{n_1^j}\cdots\beta_n^{n_n^j}$ を考えれば，$\beta\mapsto\alpha$ は $(\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ の d^{n-1} fold covering map である．一方上の方程式を β のそれに書きなおすと，

$$\begin{pmatrix} c_1 \beta_1^d \\ \vdots \\ c_n \beta_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

明らかにこれは d^nコの単純根をもつ．従って前の方程式は
$d^n/d^{n-1}=d$ コの単純根をもつ。$d=n!\,\mathrm{volume}\,\Delta(0)$
であるから，主張はこの場合正しい。

注意．詳細は[3]をみてほしい。

文献．

[1] A.G. Kouchnirenko : Polyhèdres de Newton et nombres de Milnor. Inv. math. 32, (1976)

[2] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces. Ann of Math. Studies 61. (1968)

[3] M. OKA : On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, to appear.