

2次元 normal singularity について 都立大・理 渡辺敬一

我々の考える対象は 2次元 analytic set $V \subset \mathbb{C}^n$ の normal な singularity である。

(注) 2次元の場合 normal \Rightarrow (高次元) 孤立特異点だが
逆は成立しない。

例1 $\{xw - yz = y^3 - x^2z = y^2w - xz^2 = yw^2 - z^3 = 0\}$
 $\subset \mathbb{C}^4(x, y, z, w)$ は $(0, 0, 0, 0)$ に於て孤立特異点だが、これは正規 (= normal) でない。この特異点の正規化は $(0, 0, 0, 0)$ に於て、 \mathbb{C}^5 の中でなければ埋め込めない。しかし、 $V = \{f=0\} \subset \mathbb{C}^3$ のとき、又は V が局所的に完全交叉 (complete intersection) であるとき、正規 \Leftrightarrow 孤立特異点である。2次元 normal singularity の次のような topics について述べようと思う。

1. Resolution of the Singularity ; その方法.
2. 遂に regular surface の exceptional set を "ついで" できる特異点について.
3. 特異点の不変量及びそれが小さいときの "分類" ("genus", "rational singularity", "elliptic singularity", Gorenstein singularity)
4. \mathbb{C}^* -action をもつ特異点 (= weighted homogeneous singularity) に関する精密な結果.
5. いろいろな性質をもつ特異点について (tangent singularity, solvable fundamental group をもつ singularity など)

1. Resolution について.

V を 2次元 analytic space, $P \in V$ の normal sing. とする.

(以後, 簡単のため, 常に P は V の 唯一 の特異点と仮定する)

$\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ が P の resolution とは, π は proper holomorphic map で, $\pi|_{\tilde{V}-\pi^{-1}(P)}: \tilde{V}-\pi^{-1}(P) \rightarrow V-\{P\}$ は bi-holomorphic. resolution は常に存在する (広中, Zariski). このとき $\pi^{-1}(P) = \bigcup_{i=1}^n E_i$; (E_i は irreducible projective curve) と書ける. $\bigcup_{i=1}^n E_i$ がどのような曲線群で, $\bigcup_{i=1}^n E_i$ の \tilde{V} への埋め込みの様子がどうなっているかによって, 特異点 P の状態が変わる. 与えられた P に対して \tilde{V} を求める方法を試みる.

ここでは Laufer の本にある Jung (?) の方法を書いて見る.

Step 1. Cyclic Quotient Singularity の resolution.

$$C_{n,q} \cong \begin{bmatrix} e_n & 0 \\ 0 & e_q^* \end{bmatrix} \quad (e_n = \exp(\frac{2\pi i}{n}), n \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

で生成された, $GL(2, \mathbb{C})$ の subgroup とする. $C_{n,q}$ は自然に \mathbb{C}^2 に作用し, $\mathbb{C}^2/C_{n,q}$ は $(0,0)$ に normal singularity をもつ 2次元 analytic space となる. $\tilde{X}_{n,q}$ と書く. 一般に, $X_{n,q}$ を \mathbb{C}^N の領域に埋め込んだり, その方程式を書き (おぼろげに) 面倒だが, (Riemann-schneider, [3] 参照) $X_{n,q}$ は

$$\{z^n = x^{nq} y\} \subset \mathbb{C}^3 \text{ の正規化になっている.}$$

$X_{n,q}$ の resolution を構成しよう.

$$\frac{n}{q} = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{k_3 - \dots - \frac{1}{k_s}}} \quad \text{と連分数展開する.}$$

$$\left[\frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}, \frac{5}{4} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} \right]$$

smooth surface $M = M(k_1, \dots, k_s)$ を次のように構成する.

$$M = \bigcup_{i=0}^s U_i, \quad U_i = \mathbb{C}(u^{(i)}, v^{(i)}) \quad (u=u^{(0)}, v=v^{(0)} \neq 0), \text{ but,}$$

$$U_0 \cap U_1 = \{u \neq 0\}, \quad u' = u^{-1}, \quad v' = u^{k_1} v$$

$$U_1 \cap U_2 = \{v \neq 0\}, \quad v'' = v^{-1}, \quad u'' = v^{k_2} u'$$

$$U_2 \cap U_3 = \{u'' \neq 0\}, \quad u''' = u''^{-1}, \quad v''' = (u'')^{k_3} v''$$

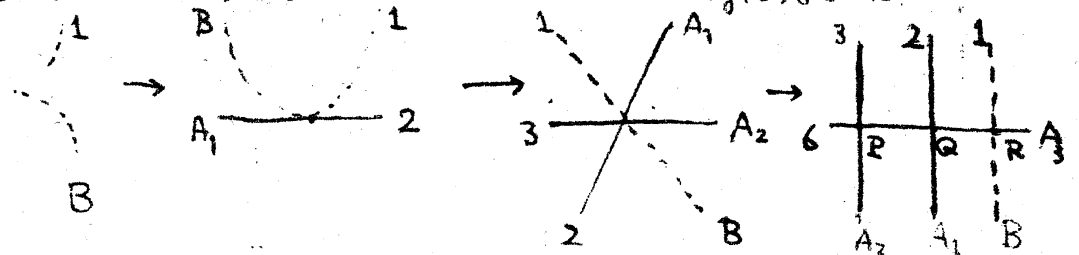
$$A_1 = \{v=v'=0\}, \quad A_2 = \{u'=u''=0\}, \quad \dots, \quad A = \bigcup_{i=1}^s A_i$$

とあると, $M = \{uv \neq 0\} \cup A \cup \{u=0\} \cup \{u^{(s)}=0\}$ (s : odd のとき)

↑
(s : even のとき, $v^{(s)}$ に代り, $v^{(s)}$ 同様に)

各 $A_i \cong \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ で, $A_i \cdot A_i = -R_i$ であり, また, (s : odd のとき)
 $v^{(s)} = u^m v^q$, また, $v^{(s)}, v$ は M 全体で holomorphic な函数である.

Step 2 一般の場合, V は \mathbb{C}^2 の covering space と思える.
 このとき $\pi: V \rightarrow \mathbb{C}^2$ の branch locus を考える. branch locus が $x^a y^b = 0$ の形になったときは, V は $z^c = x^a y^b$ の形になったわけだから, この場合は Step 1 に帰着できる.
 従って, branch locus を normal crossing (or 似たような形) にする設だが, これは, (branch locus は 平面曲線だから), \mathbb{C}^2 で一点に対する blow-up を繰り返して得られる.
 例として, $z^5 = x^2 + y^3$, $z^6 = x^2 + y^3$, $z^7 = x^2 + y^3$ を考えて見よう. このとき branch locus はいずれも $x^2 + y^3 = 0$ だから, この curve は特異点を持つ. これを normal crossing にする為に



$$Z^5 = x^2 + y^3$$

このとき、真 P, Q, R の上での resolution はそれぞれ、

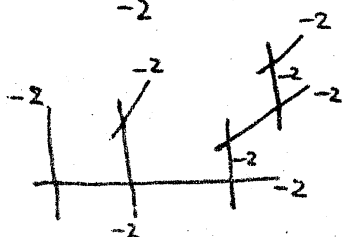
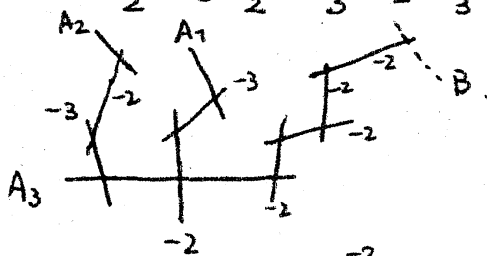
$X_{5,2}, X_{5,3}, X_{5,4}$ の resolution と同じになる。

$$\frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}, \frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3}, \frac{5}{4} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

よって, resolution は

$$A_1 \cdot A_1 = -1 = A_2 \cdot A_2,$$

$A_3 \cdot A_3 = -2$ となる。1 種例外

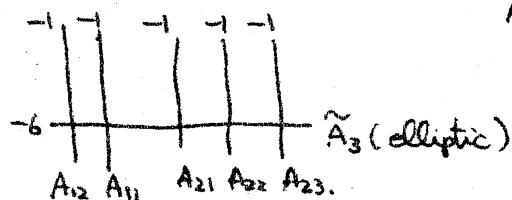


又は dual graph で、 を得る。

$$Z^6 = x^2 + y^3$$

このとき A_1, A_2 の逆像は可約で、それぞれ 2, 3 つの成分を成す。

また、 A_3 の逆像は elliptic curve である事がわかる。



$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{23}$ は contract できず、

$$\frac{-1}{\text{elliptic}} \quad \text{又は} \quad \textcircled{-1} \text{ を得る}$$

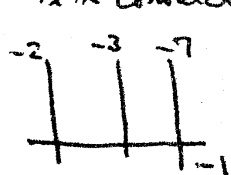
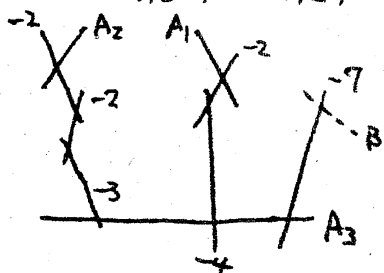
$$Z^7 = x^2 + y^3$$

このとき、真 P, Q, R の上での resolution はそれぞれ、

$X_{7,3}, X_{7,2}, X_{7,1}$ の resolution と同じである。従って

$$A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = -1 \text{ となる。}$$

順次 contract して行くと、



又は を得る。

今度は smooth な surface X の中 \mathbb{P}^2 上の ^{complete} curve $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ がうめこまれている状態を考へよ。このとき, (E は連結とする)。

定理 (Brieskorn) $\exists \pi: X \rightarrow V, \pi(E) = \{P\}$,

$\pi|_{X-E}: X-E \rightarrow V-\{P\}$ は biholomorphic

\Leftrightarrow intersection matrix $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ が負定値。

例 C を complete smooth curve, L を C 上の line bundle,

$\deg L < \infty$ とする。このとき L の 0-section を E とすると,

$E^2 = \deg L < 0$ より E は一頁に contract できる。このとき

$\pi(E) = P$ の局所環は

$R = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(C, \mathcal{O}(L^{\otimes n}))$ (を analytic にしたものを得られる。

更に, C が elliptic curve, $\mathcal{O}(L) = \mathcal{O}(-x)$ (C の某 x を定義する ideal)

のとき, R は $1 \in R_1, \wp$ (\wp 函数) $\in R_2, \wp' \in R_3$ で生成され,

$$\mathcal{O}_{V,P} \cong \mathbb{C}\langle X, Y, Z \rangle / (Z^2 - 4Y^3 + g_2 Y Z^2 + g_3 Z^3)$$

C の genus が 2 以上, $\mathcal{O}(L) = \mathcal{O}(-x)$ ($x \in C$) のとき, R (又は

$\mathcal{O}_{V,P}$) の構造は x に於ける "Weierstrass gap sequence"

と密接な関係をもつ。

2. いくつかの不変量について。

$\mathbb{P}^2 \supset C$ が degree d の既約曲線るとき, C の種数は

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{x \in C} \mu_x$$

ここで与えられた, (μ_x は $x \in C$ の特異点に対応する不変量)。

二次元 normal singularity のとき, これに対応するのは,

$$p_g(\mathcal{O}_x) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} R^1 \pi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \quad (\text{但し, } \tilde{V} \xrightarrow{\pi} V \text{ は特異点の}$$

resolution. (V が Stein のとき, $p_g(\mathcal{O}_x) = \dim H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_{\tilde{V}})$).

このとき $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, \tilde{X} が smooth のとき。

$$(\dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)) - (\dim H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) - \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})) = \sum_{X \in X} p_g(\mathcal{O}_X).$$

もう一つの invariant は, $(K_X)^2 - (K_{\tilde{X}})^2$ を記述する ($K_X, K_{\tilde{X}}$

は $K_X, K_{\tilde{X}}$ の canonical divisor, $\mathcal{O}(K_{\tilde{X}}) = \Omega_{\tilde{X}}^2$.)

$\pi^{-1}(P) = \bigcup_{i=1}^n E_i$ のとき, $Z = \sum n_i E_i$ ($n_i \geq 0$) で,

$\dim H^1(\mathcal{O}_Z) = \dim R^1 \pi_* (\mathcal{O}_Z) = p_g(\mathcal{O}_P)$ なる Z のうち最小のものがある.

更に, \mathcal{O}_P が Gorenstein 環となるとき, $Z = -K$ ($\pi^{-1}(P)$ の \mathbb{Q} - \mathbb{C})

となる. (M. Reid). このとき, $-Z^2 = K_X^2 - K_{\tilde{X}}^2$ となる.

また, $Z_0 = \sum m_i E_i$ ($m_i \geq 0$) で, $\forall E_i, Z_0 \cdot E_i \leq 0$ という条件を考えると, これをみたす Z_0 にも最小のものがある. これを fundamental cycle とする.

$p_g(\mathcal{O}_P) = 0$ (P : rational singularity とする) のとき, $-Z_0^2$ は \mathcal{O}_P の重複度と一致する. P を埋め込む最小次元は $-Z_0^2 + 1$ である.

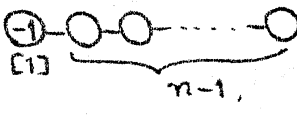
\mathcal{O}_P が Gorenstein $\Leftrightarrow -Z_0^2 = 2$ である (このとき, 完全な分類が良く知られている) このとき, $Z = -K = 0$.

$p_g(\mathcal{O}_P) = 1$ (P : "elliptic singularity" と呼ばれる事がある)

$\Rightarrow \mathcal{O}_P$ が Gorenstein のとき, $Z_0 = Z = -K$ (M. Reid).

このとき, $k = -Z_0^2$ は P の重複度, 埋め込み次元を決定する.

P の重複度 = $\max(k, 2)$, P の埋め込み次元 = $\max(k, 3)$.

例 1. $x^2 + y^3 + z^{6n} = 0$. グラフは 


$p_g = n, k = 1$.

例 2. $x^2 + (y + z^2)(y^2 + z^{n+4}) = 0$. グラフは

$p_g(\mathcal{O}_P) = 1, k = 1$.

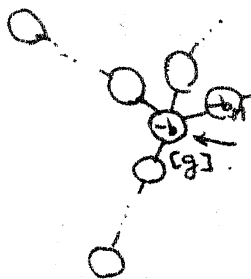


例 3. $x^2 + \prod_{i=1}^{2g+1} (y + a_i z^2) = 0$ ($a_i \neq a_j$).

 $p_g(\mathcal{O}_P) = g^2$.

3. \mathbb{C}^* -action をもつ特異点について (Pinkham による).

Orlik-Wagreich [4] による \mathbb{C}^* -action をもつ特異点は
調べるに, resolution のグラフは (\mathbb{C}^* -action をもつ =
weighted homogeneous form) weight だけで決まる事
がわかっている. また, グラフは "star" である事もわかっている.



\mathbb{C}^* -action をもつとき, 特異点は
次のものによって決まる.

central curve C 及び,

その conormal bundle $\mathcal{L} \stackrel{\text{put}}{=} \mathcal{O}(D)$.

"枝" と C の交点 $\{P_i\}_{i=1}^n$.

$$\frac{d_i}{e_i} = b_{i_1} - \frac{1}{b_{i_2} - \dots - \frac{1}{b_{i_r}}}$$

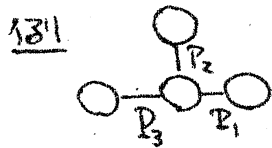
このときある curve C' , 有群 $G \subset \text{Aut}(C')$, G -invariant
な line bundle \mathcal{L}' on C' , があつて,

$$\mathcal{O}_P \cong \left(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(C', \mathcal{L}'^{\otimes n}) \right)^G \text{ (analytic algebra)}$$

がわかっているが, 更に, \mathcal{O}_P は

$$\mathcal{O}_P \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}(D^{(n)})), \text{ 但し, } D^{(n)} = nD - \sum_{i=1}^n \left\{ m \frac{e_i}{d_i} \right\} P_i$$

と書ける. 但し, $\{x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) は x 以上の最小の整数.



$P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = \infty, D = P_2 + P_3$ とおくと,

$$D^{(1)} = -P_1, H^0(\mathcal{O}(D^{(1)})) = 0,$$

$$D^{(2)} = P_2 + P_3 - P_1, H^0(\mathcal{O}(D^{(2)})) \ni x=t, y = \frac{t}{t-1}$$

$$D^{(3)} = -2P_1 + P_2 + P_3, H^0(\mathcal{O}(D^{(3)})) \ni z = \frac{t^2}{t-1}$$

$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}(D^{(n)}))$ は x, y, z で生成され, relation は,

$$z^2 = x^2(x+y).$$

References.

- [1] Laufer: Normal Two-dimensional Singularities,
Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press
- [2] M. Reid: Elliptic Gorenstein Singularities of Surfaces,
(Preprint).
- [3] O. Riemenschneider: Deformationen von Quotient
-singularitäten (nach zyklischen gruppen), Math. Ann.
209 (1974), 211~248.
- [4] G. Brieskorn: Singularities of algebraic surfaces
with \mathbb{C}^* -action, Ann. of Math. 93 (1971),
205~228.
- [5] H. Pinkham: Normal Surface Singularities with
 \mathbb{C}^* -action, Math. Ann. 227 (1977), 183~193.