数理解析研究所講究録
第319巻 1978年 65-69

同変双対性定理と群 $J_G(*)$

大阪大理　　川久保勝夫

§1. 同変双対性定理.

定義1. G；位相群, X, Y：G-space. それぞれの不動点集合 X^G, Y^G に reference points x_0, y_0 が定められているとする。その時 XとYが同じ同変S型であるとは, 2つの表現空間 V, W が存在して $S(V\oplus\mathbb{R})\wedge X$ と $S(W\oplus\mathbb{R})\wedge Y$ が同じ G-ホモトピー型をもつ時に言う。ここで $S(\cdots)$ は単位球面, $\mathbb{R}$は1次元実ベクトル空間で Gの作用は自明なものとする。

定義2. X；compact G-space. V：G-表現空間で $S(V)\supset X$ の時, $S(V\oplus\mathbb{R})-X$ をXの equivariant dual という。

定義3. $X^{\#}$ が Xの equivariant S-dual である

とは $X^{\#}$ と X の equivariant dual が 同じ同変 S型をもつ時に言う。

同変ホモトピー論的見地での同変S型の考察は 村山氏に譲り，ここでは 次の Atiyah の定理の同変化を報告する。

定理4. X : compact G-manifold with boundary Y. V : G-表現空間, $X \subset V$: G-embedding. νをその normal bundle. その時 $T(\nu)$ は X/Y の equivariant S-dual である。ここに $T(\nu)$はν の Thom complex を表わす。

定理5. X : closed G-manifold. $\xi \longrightarrow X$: G-vector bundle. $\nu \longrightarrow X$: G-vector bundle で $\nu \oplus \tau(X) \oplus \xi$: trivial とする。但し $\tau(X)$ は X の tangent bundle を示す。 その時 $T(\nu)$ は $T(\xi)$ の equivariant S-dual である。

（証明の idea） Atiyah の Thom complex における 証明のほんの一部は ホモトピー論的にやっていて equivariant に 平行にゆかないので そこを explicit

に equivariant deformation retract や equivariant homotopy equivalence の写像を作って証明します。

§2. 群 $J_G(*)$ の決定.

類似の群 $J.O(G)$ が Atiyah - Tall により定義され Snaith, Lee - Wasserman 等により研究されているが，彼等の定義は Adams operation で引っかかるように定義されており幾何学的見地からは余り いさぎよいと言えない。我々は次のように定義する。

定義6. G：コンパクト位相群，V, W： G－表現空間. その時 VとWが J－equivalent であるとは G－表現空間 U が存在して $S(V \oplus U)$ と $S(W \oplus U)$ が同じ G－ホモトピー型をもつ時に言う。ここで $S(\cdots)$ は単位球面を示す.

表現環 $RO(G)$ の部分群 $T_G(*)$ を次で定義する

$$T_G(*) = \{ V - W \mid V と W は J\text{-equivalent} \}.$$

定義7. $J_G(*) = RO(G)/T_G(*)$.

n を 2 以上の整数，$n = 2^{k} \cdot p_1^{r(1)} \cdots p_t^{r(t)}$ を素因数分解とする。Z_n で 位数 n の巡回群 Z/nZ を表わす。その時 群 $J'_{Z_n}(*)$ を次のように定義する。

定義8. Case 1. $k \geqq 2$.

$$J'_{Z_n}(*) = Z \oplus Z_{2^{k-2}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} Z_{(p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1})}$$

Case 2. $k = 0$ or 1.

$$J'_{Z_n}(*) = Z \oplus \left\{ \bigoplus_{i=1}^{t} Z_{(p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1})} \right\} / Z_2$$

ここで Z_2 の $\bigoplus_{i=1}^{t} Z_{(p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1})}$ への入り方は

$$1 \longmapsto \bigoplus_{i=1}^{t} \frac{p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1}}{2}$$

G をコンパクト可換位相群．F_0 を G の subgroup H で $G/H \cong S^1$ となるその全体からなる family. F_1 を G の subgroup H で G/H : 有限巡回群 となるその全体からなる family とする。その時我々は，次の構造定理を得る。

定理9. $J_G(*) \cong Z \oplus Z(F_0) \oplus \bigoplus_{H\in F_1} J'_{G/H}(*)$

ここで $Z(F_0)$ は F_0 により生成される自由可換群を表わす。

系10. V, W : G－表現空間. その時 V と W が J－equivalent であることと $S(V)$ と $S(W)$ が同じ G－ホモトピー型をもつことと同値である。

注意11. 系10は stable と unstable の間に差がないことを意味し全くの予想外である。