数理解析研究所講究録
第 319 巻 1978 年 70-78

G多様体上の孤立零点をもつGベクトル場について

山口大 文理　小宮克弘

Gをコンパクト Lie 群とする。(可微分) G多様体Mの接バンドル$\tau(M)$の(連続な) G-cross section s をM上のGベクトル場という。$s(z) \in M \subset \tau(M)$ となる点 $z \in M$ をsの零点という。本稿においては，とくに，孤立した零点をもつGベクトル場について考える。Rubinsztein [4] による球面の同変ホモトピー論を援用して，零点の指数に関するある種の条件の下で，その零点を除去しようという問題を中心に，さらに二，三の問題を考える。

§1．準備

G多様体Mの各点xに対し，その点におけるGの isotropy subgroup を G_x で表わす。Gの任意の(閉)部分群Hに対して，

$$M_H = \{ x \in M \mid G_x = H \}$$

$$M^H = \{ x \in M \mid G_x \supset H \}$$

とおく。これらはMの部分多様体である。M上のGベクトル場 s を M^H 上に制限することにより，M^H 上のベクトル場が得られる。それを s^H で表わすことにする。

$z \in M - \partial M$ をM上のベクトル場 s の孤立零点とする。s の z における指数 $\mathrm{ind}(z; s)$ は，$(n-1)$ 次元単位球面 S^{n-1} からそれ自身への写像

$$f = d\varphi \circ s \circ \varphi^{-1} / \| d\varphi \circ s \circ \varphi^{-1} \|$$

の写像度 $\deg f$ として定義される。ここに，n はMの次元 φ は z の十分小さな近傍から $\mathbb{R}^n$ への chart で z を原点 0 に写すものである。ここでとくに，MがG多様体，s がその上のGベクトル場であれば，φ は z の G_z 不変で十分小さな近傍から G_z の n 次元直交表現Vへの G_z 同変な chart としてとれるから，上のようにして induce される写像 f はVの単位球面 $S(V)$ からそれ自身への G_z 同変な写像となる。

G_z の任意の部分群Hに対して，z は M^H 上のベクトル場 s^H の孤立零点でもある。G_z 同変な写像 $f: S(V) \to S(V)$ を $S(V)^H$ に制限することにより，写像 $f^H: S(V)^H \to S(V)^H$ が得られる。このとき明らかに，$\mathrm{ind}(z; s^H) = \deg f^H$ である。

写像度に関する約束：　空集合 ϕ からそれ自身への（ただ

一つの）写像 f に対し，$\deg f = 1$ とする。従って，0次元多様体上のベクトル場は，各点において指数1をもつ。0次元球面 S^0 からそれ自身への写像 f に対し，f が恒等写像のとき $\deg f = 1$，f が一点への写像であるとき $\deg f = 0$，f が二点を入替える写像であるとき $\deg f = -1$，と定義する。

§2. 存在

G 作用を考えない場合，任意のコンパクト多様体上には有限個の零点をもつベクトル場が存在する。一方，G 作用を考えるとき，任意のコンパクト G 多様体上に有限個の零点をもつ G ベクトル場が存在するとは限らない。例えば，偶数次元の球面 S^{2n} を標準的な作用で $O(2n+1)$ 多様体とみるとき，S^{2n} 上の $O(2n+1)$ ベクトル場は S^{2n} のすべての点が零点となる trivial なベクトル場のみである。しかし，G を有限群に限れば，任意のコンパクト G 多様体上には，常に，有限個の零点をもつ G ベクトル場が存在することがわかる。

<u>定理 1.</u> G を有限群，M をコンパクト G 多様体とする。このとき，M 上に次の (i), (ii), (iii) を満たす G ベクトル場 s が存在する。(i) 零点は有限個。(ii) ∂M 上では<u>内向き</u>

で零点はない。(iii) z を s の零点，H を G_z の部分群とするとき，$ind(z; s^H) = ind(z; s^{G_z})$.

上のような G ベクトル場を実際に構成することにより，この定理は示される。証明は省略する。

附記：G 多様体上の零点のない G ベクトル場の存在に関しては，Komiya [2]，Hauschild [1] を見よ。

§3. 零点の除去

本稿の主要目的である G ベクトル場の零点の除去について論じる。

$z \in M$ を M 上のベクトル場 s の孤立零点とする。G 作用を考えない場合，$ind(z; s) = 0$，即ち，§1 の写像 $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ が n 次元単位球体 D^n に拡張されれば，z の周辺でのみベクトル場を取替えることにより，零点 z を除去することができる。G 作用を考える場合も同様に，G_z 同変な写像 $f: S(V) \to S(V)$ が V の単位球体 $D(V)$ 上の G_z 同変写像に拡張されれば，z の orbit $G(z)$ の周辺でのみベクトル場を取替えることにより，M 上の G ベクトル場で，$G(z)$ の周辺ではもはや零点はなく，その外側では最初の G ベクトル場 s と一致するようなものを得ることができる。

よって，同変写像 $f: S(V) \to S(V)$ が $D(V)$ 上の同変写像に拡張されるための条件が必要になってくる。

補題2. Gを有限可換群，VをGの直交表現で trivial action の直和因子をもつものとする。このとき，G同変写像 $f: S(V) \to S(V)$ が $D(V)$ 上のG同変写像に拡張されるためには，Gの任意の部分群Hに対して，$\deg f^H = 0$ であることが必要十分である。

この補題は，$S(V)$ のG同変写像をG同変ホモトピーにより分類した Rubinsztein の結果 [4] より得られる。

附記: $S(V)$ のG同変写像のG同変ホモトピーによる分類に関して，S. J. Willson の論文 [6] もある。しかし，彼の証明の中にはミスがあり，得られた結果も一部正しくない。念のため附記しておく。

補題2を使って次の定理を得る:

定理3. Gを有限可換群，KをGの部分群とする。sをG多様体M上のGベクトル場とし，$\{z_1, z_2, \cdots, z_p\}$ を M_K の連結成分A上のsの零点の全体とする。さらに，これらの零点はMにおける孤立零点で，かつ，Mの内点であるとする。

このとき，Kの任意の部分群Hに対して，

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{ind}(z_i\, ;\, s^H) = 0$$

であれば，$G(A)$のMにおける任意のG不変な近傍Uに対して，次のようなM上のGベクトル場tが存在する：tは$G(A)$上では零点をもたず，$M-U$上および∂M上ではsと一致する。

［証明の概略］　DをAの内点を中心とし半径が十分小さなMにおける球体とする。次のようなG微分同相写像$f: M \to M$を構成することができる：$f(G(\{z_1, \cdots, z_p\})) \subset G(\mathrm{Int}\, D)$，　$f|(M-U) \cup \partial M = \mathrm{identity}$.
φを，Dを含むK不変な近傍からKの直交表現VへのK同変なchartとする。$f: S(V) \to S(V)$を§1のようにしてGベクトル場$df \circ s \circ f^{-1}$およびK同変なchart φからinduceされるK同変写像とする。このとき，定理の仮定より，Kの任意の部分群Hに対して$\deg f^H = 0$であることがわかる。よって，補題2より，このfは$D(V)$上のK同変写像に拡張できる。従って次のようなM上のGベクトル場s_1が存在する：$G(D)$上では零点はなく，$M - \mathrm{Int}\, G(D)$上では$df \circ s \circ f^{-1}$に一致する。このとき，$t = df^{-1} \circ s_1 \circ f$が求める$G$ベクトル場である。

§4. 応用

応用 I　Gを有限可換群とし，MをコンパクトG多様体とする。sを定理1より得られるM上のGベクトル場とする。このsの零点を，定理3を使って除去することにより，[2]の主定理の別証を与えることができる。

応用 II

定理 4.　Gを奇数位数の有限可換群とする。Wをn次元コンパクトG多様体とし，∂Wは二つのG不変な$(n-1)$次元閉多様体M_0, M_1の disjoint union になっているとする。このとき，W上の零点をもたないGベクトル場でM_0上では内向き，M_1上では外向きであるものが存在するためには，Gの任意の部分群HおよびW^Hの任意の連結成分Aに対して，$\chi(A) = \chi(A \cap M_0) = \chi(A \cap M_1)$となることが必要十分である。ここに，$\chi(-)$はオイラー標数．

注意：この定理は二つの閉G多様体がG同変に Reinhart cobordant になるための必要十分条件を与える。Reinhart cobordism に関しては Reinhart [3], Stong [5] を見よ。

［証明の概略］ W上に定理に述べたGベクトル場が存在すれば，A上にも零点がなく $\partial A \cap M_0 = A \cap M_0$ 上で内向き $\partial A \cap M_1 = A \cap M_1$ 上で外向きのベクトル場が induce されるから，必要であることは［3］よりわかる。十分であることは次のようにしてわかる。 $P = M_0 \times [0, 1]$ を M_0 の W における G不変な collar とし，$Q = W - M_0 \times [0, 1)$ とする。定理1より得られる P，Q 上の Gベクトル場を s_1，s_2 とする。s_1 と，s_2 の向きを逆にした $-s_2$ より W上の Gベクトル場 s_3 が得られる。s_3 は M_0 上で内向き，M_1 上で外向きである。この s_3 の零点を定理3を使って除去すればよい。

参　考　文　献

［1］ H. Hauschild; Ein Hopfscher Satz über äquivariante Vektorfelder, (unpublisched)

［2］ K. Komiya; A necessary and sufficient condition for the existence of non-singular G-vector fields on G-manifolds, Osaka J. Math., 13(1976), 537－546.

［3］ B. L. Reinhart; Cobordism and the Euler number, Topology, 2 (1963), 173 − 177.

[4] R. L. Rubinsztein; On the equivariant homotopy of spheres, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 134 (1976).

[5] R. E. Stong; Tangential cobordism, Math. Ann., 216 (1975), 181 − 196.

[6] S. J. Willson; Equivariant maps between representation spheres, Pacific J. Math., 56 (1975), 291 − 296.