数理解析研究所講究録
第326巻 1978年 69-88

母汎関数によるWiener-Hermite展開の定式化と2次元非粘性流体のGauss型定常厳密解*

兵医大・数学　土井正明
関学大・理　今村　勤

§1. 序論

乱流理論において，一つの有効な方法として，速度場を確率関数と見なし，Wiener-Hermite[1-4]展開する方法がある。即ち未知の確率関数を理想確率関数のHermite汎関数で展開する方法である。

この方法の利点として

(1) Gauss 分布に近い確率関数を扱うのに適している。

(2) 時間に依存する理想確率関数[5]の導入によって，切断の近似を良く保ちながら，少数項の展開形を用いることが出来る場合が多い。

(3) 確率関数を直接取り扱うために，エネルギー・スペクトル，分散等が負であるような非物理的な解になることはない。

(4) 解を利用して，低次のモーメントのみならず，高次のモーメントを求めることが出来る。

---

* 本論文は1978年1月18日に「2次元非圧縮等方性乱流」の題で講演したものと同内容である。

(5)近似の精度を機械的に上げることが出来る。
等があげられる。

この論文では，Wiener-Hermite展開の方法を母汎関数[6]
(generating functional)によって再構成する。これは従来の生成・消滅演算子による構成法に比べて，Wiener-Hermite汎関数の色々の性質を導出する上で見通しがよい。これを§2，§3で述べる。§4で2次元非粘性非圧縮乱流の定常Gauss型厳密解をpseudo-scalar型理想確率関数を用いて導出する。これはCook，Taylorの解[7]と一致する。

§2. 母汎関数によるWiener-Hermite展開の定式化[6]

理想確率関数 $a_i(\mathbf{x})$ $(i=1,2,3)$ を特性汎関数が

$$\left\langle \exp\left\{ i\int d\mathbf{x}\, Z_i(\mathbf{x})\, a_i(\mathbf{x}) \right\} \right\rangle \equiv \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\, Z_i(\mathbf{x}) Z_i(\mathbf{x}) \right\} \tag{2-1}$$

である確率関数と定義する。ここで$\mathbf{x}$は3-次元ユークリッド空間のベクトルを表し，統計的平均値は理想確率関数 $a_i(\mathbf{x})$ の1価汎関数 $F[\vec{a}(\cdot)]$ に対して

$$\left\langle F[\vec{a}(\cdot)] \right\rangle \equiv \int P[\delta\vec{a}(\cdot)]\, F[\vec{a}(\cdot)] \tag{2-2}$$

で定義する。Lebesgue-Stieltjes 測度 $P[\delta\vec{a}(\cdot)]$ は(2-1)より

$$P[\delta\vec{a}(\cdot)] = N^{-1}\,\delta\vec{a}(\cdot)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x)\, a_i(x)\right] \tag{2-3}$$

で与えられる。ここで

$$\delta\vec{a}(\cdot) \equiv \lim_{dx_j\to 0} \prod_{\substack{j\\ i=1,2,3}} [da_i(x_j)] \tag{2-4}$$

であり，添字 j は3次元ユークリッド空間を細胞(Cell)に分割したときの指標を意味する。 N は規格化定数で

$$N \equiv \int \delta\vec{a}(\cdot)\,\exp\left[-\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x)\, a_i(x)\right] \tag{2-5}$$

と形式的に書ける。N 自身は発散量である。

確率関数 $a_i(x)$ の1価汎関数で，統計的平均値が δ-汎関数的singularityを含めた意味で存在するような確率汎関数 $F[\vec{a}(\cdot)]$ の全体，即ち確率汎関数空間 $\Omega[\vec{a}(\cdot)]$ を考える。 以下の議論では，δ-汎関数を通常の汎関数のごとく見なして取り扱う。

確率汎関数空間 $\Omega[a(\cdot)]$ 上で，直交汎関数の理論を展開しよう。まずHermite 関数に対応する理想確率関数 $a_i(x)$ のWiener-Hermite汎関数を

$$H^{[N]}_{i_1\cdots i_N}(x_1, \cdots, x_N) = \exp\left[\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x)\, a_i(x)\right]$$

$$\times \prod_{k=1}^{N}\left[-\frac{\delta}{\delta a_{i_k}(x_k)}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x)\, a_i(x)\right] \quad (2-6)$$

で定義する。ここで $\delta/\delta a_i(x)$ は汎関数微分である。

ここで上のWiener-Hermite 汎関数の母汎関数(generating functional)を次の様に導入する。即ち理想確率関数 $\vec{a}(x)$ と通常の関数 $\vec{z}(x)$ の汎関数

$$G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] \equiv \exp\left\{\int dx\left[z_i(x)\, a_i(x) - \frac{1}{2} z_i(x) z_i(x)\right]\right\} \quad (2-7)$$

を考える。これはWiener-Hermite汎関数の母汎関数になっている，即ち

$$G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\int dx_1 \cdots dx_N$$

$$\cdot H^{[N]}_{i_1\cdots i_N}(x_1, \cdots, x_N)\, z_{i_1}(x_1)\cdots z_{i_N}(x_N) \quad (2-8)$$

となっている。実際汎関数 $G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)]$ の一般化された Taylor 展開において $z_{i_1}(x_1)\cdots z_{i_N}(x_N)$ の係数は

$$\left.\frac{\delta^N G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)]}{\delta z_{i_1}(x_1)\cdots\delta z_{i_N}(x_N)}\right|_{\vec{z}=0}$$

$$= \left.\frac{\delta^N \exp\left\{\int dx\left[z_i(x)\, a_i(x) - \frac{1}{2} z_i(x) z_i(x)\right]\right\}}{\delta z_{i_1}(x_1)\cdots\delta z_{i_N}(x_N)}\right|_{\vec{z}(\cdot)=0}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x) a_i(x)} \prod_{j=1}^{N} \left[\frac{\delta}{\delta z_{i_j}(x_j)} \right]$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int dx\, [z_i(x) - a_i(x)][z_i(x) - a_i(x)] \right\} \Big|_{\vec{z}(\cdot)=0}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x) a_i(x)} \prod_{j=1}^{N} \left[-\frac{\delta}{\delta a_{i_j}(x_j)} \right]$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\int dx\, [z_i(x) - a_i(x)][z_i(x) - a_i(x)]} \Big|_{\vec{z}(\cdot)=0}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x) a_i(x)} \prod_{j=1}^{N} \left[-\frac{\delta}{\delta a_{i_j}(x_j)} \right] e^{-\frac{1}{2}\int dx\, a_i(x) a_i(x)}$$

となる。 この母汎関数 $G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)]$ を用いて, Wiener Hermite 汎関数の色々の性質を導き出すために, 次の Lemma を始めに証明する。

[Lemma] 任意のベクトル値関数 $f_i(x)$ $(i=1,2,3)$ に対して

$$\left\langle e^{\int dx\, f_i(x) a_i(x)} \right\rangle = e^{\frac{1}{2}\int dx\, f_i(x) f_i(x)} \qquad (2-9)$$

である。

実際

$$\left\langle e^{\int dx\, f_i(x) a_i(x)} \right\rangle = \prod_{x} \frac{\int d\vec{a}(x)\, e^{-\frac{1}{2} dx\, [a_i(x) a_i(x) + f_i(x) a_i(x)]}}{\int d\vec{a}(x)\, e^{-\frac{1}{2} dx\, a_i(x) a_i(x)}}$$

$$= \prod_{\mathbf{x}} \frac{\int d\vec{a}(\mathbf{x})\, e^{-\frac{d\mathbf{x}}{2}[a_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})][a_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})]}}{\int d\vec{a}(\mathbf{x})\, e^{-\frac{d\mathbf{x}}{2} a_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x})}}\, e^{\frac{d\mathbf{x}}{2} f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\, f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})}$$

となる。 従って（2-7），（2-8）と（2-9）を利用すると容易に次の Lemma が得られる。

[Lemma]

$$\langle G[\vec{z}_1, \vec{a}] ---- G[\vec{z}_m, \vec{a}] \rangle$$

$$= \exp\Big[\sum_{i<j} \int d\mathbf{x}\, \vec{z}_i(\mathbf{x}) \cdot \vec{z}_j(\mathbf{x}) \Big]$$

$$= \sum_{N_1=0}^{\infty} --- \sum_{N_m=0}^{\infty} \frac{1}{N_1! ---- N_m!} \int \prod_{\substack{k_1=1 \\ i=1,2,3}}^{N_1} \Big[d\mathbf{x}_{[1,k_1]}\, z^{(i)}_{1,j_{k_1}}(\mathbf{x}_{[1,k_1]}) \Big] \times$$

$$\times ------ \times \prod_{\substack{k_m=1 \\ i=1,2,3}}^{N_m} \Big[d\mathbf{x}_{[m,k_m]}\, z^{(i)}_{m,j_{k_m}}(\mathbf{x}_{[m,k_m]}) \Big]$$

$$\times \Big\langle H^{[N_1]}_{j[1,1] --- j[1,N_1]}(\mathbf{x}_{[1,1]}, ----, \mathbf{x}_{[1,N_1]}) \times -----$$

$$\times H^{[N_m]}_{j[m,1] --- j[m,N_m]}(\mathbf{x}_{[m,1]}, ----, \mathbf{x}_{[m,N_m]}) \Big\rangle \qquad (2-10)$$

この Lemma から，Wiener-Hermite 汎関数の多重積の平均に関する性質が容易に導き出される。

[定理]

$$\left\langle H^{[N_1]}_{j[1,1]\cdots j[1,N_1]}(\boldsymbol{x}_{[1,1]},\cdots,\boldsymbol{x}_{[1,N_1]})\cdots\cdots H^{[N_m]}_{j[m,1]\cdots j[m,N_m]}(\boldsymbol{x}_{[m,1]},\cdots,\boldsymbol{x}_{[m,N_m]})\right\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\text{右のすべての}\\ \text{可能な分け方}\\ \text{についての和}}} \prod_{\substack{\text{すべての}[a,p]\text{を}\\ a\neq b\text{の条件で}\\ \text{対}[a,p],[b,q]\\ \text{に分け，各対についての積}}} \delta_{j[a,p]\,j[b,q]}\,\delta[\boldsymbol{x}_{[a,p]}-\boldsymbol{x}_{[b,q]}] \qquad (2\text{-}11)$$

$$= 0 \qquad \text{for otherwise}$$

が得られる。 上の定理を次の様な Feynman rule 的計算規則にまとめた方が分り易いであろう。

(i) 各 $H^{[N_k]}$ に対して，N_k 個の点 $j_{[k,1]}\cdots\cdots j_{[k,N_k]}$ を横に並べて書く。

(ii) 各点を2つづつに分け，すべてのグラフを書く。ただし同じ $H^{[N_k]}$ に属するものは対をとらない。対をとれずに点が残るとき，例えば $\sum N_k$ が奇数であったり，1つの N_s が他の N_s の和よりも大きかったりするときは，統計的平均値は 0 である。

(iii) 各対 $j_{[a,b]}$，$j_{[c,d]}$ に対して

$$\delta_{j[a,b]\,j[c,d]}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}_{[a,b]}-\boldsymbol{x}_{[c,d]})$$

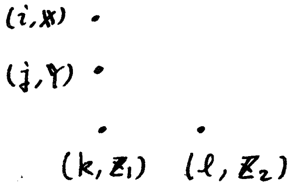
を割り当える。

(iv)　(iii) で与えたfactorの積を作る。

(v)　全ての対の種類に対応するfactorの積の和を取る。

例えば　$\left\langle H_i^{(1)}(\mathbb{X})\, H_j^{(1)}(\mathbb{Y})\, H_{kl}^{(2)}(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) \right\rangle$　は

(i)



(ii)

(iii) & (iv)

$$\delta_{ik}\,\delta(\mathbb{X}-\mathbb{Z}_1)\,\delta_{jl}\,\delta(\mathbb{Y}-\mathbb{Z}_2) \qquad \delta_{il}\,\delta(\mathbb{X}-\mathbb{Z}_2)\,\delta_{jk}\,\delta(\mathbb{Y}-\mathbb{Z}_1)$$

(v)

$$\left\langle H_i^{(1)}(\mathbb{X})\, H_j^{(1)}(\mathbb{Y})\, H_{kl}^{(2)}(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) \right\rangle$$

$$= \delta_{ik}\,\delta(\mathbb{X}-\mathbb{Z}_1)\,\delta_{jl}\,\delta(\mathbb{Y}-\mathbb{Z}_2)$$

$$+ \delta_{il}\,\delta(\mathbb{X}-\mathbb{Z}_2)\,\delta_{jk}\,\delta(\mathbb{Y}-\mathbb{Z}_1)$$

となる。これは (2-10)より (2-11) を導き出す手順から容易に得られる規則であろう。

空間に一様性があるときの，$\langle v_i(\mathbf{x})\rangle = 0$ の確率関数 $v_i(\mathbf{x})$ の Wiener-Hermite 展開は

$$v_i(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' K^{(1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')H^{(1)}(\mathbf{x}') + \int d\mathbf{x}'d\mathbf{x}'' K^{(2)}_{ijk}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', \mathbf{x}-\mathbf{x}'')H^{(2)}_{jk}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + \text{-----} \tag{2-12}$$

と書くことが出来る。

空間に一様性があるとき，例えば (2-12)を見ると，Fourier 変換で話をすると便利である。波数空間における理想確率関数 $\tilde{a}_i(\mathbf{k})$ を

$$\tilde{a}_i(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{[2\pi]^{3/2}}\int d\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, a_i(\mathbf{x}) \tag{2-13}$$

で定義する。従って特性関数は (2-1)より

$$\left\langle \exp\left[i\int d\mathbf{k}\, \tilde{z}_i(-\mathbf{k})\tilde{a}_i(\mathbf{k})\right]\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, \tilde{z}_i(-\mathbf{k})\tilde{z}_i(\mathbf{k})} \tag{2-14}$$

となる。ここで $\tilde{z}_i(\mathbf{k})$ は

$$\tilde{z}_i(\mathbf{k}) \equiv [2\pi]^{-3/2}\int d\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} z_i(\mathbf{x})$$

とする。母汎関数は (2-7) より

$$G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] = \exp\left\{ \int d\mathbb{k} \left[\tilde{z}_i(-\mathbb{k}) \tilde{a}_i(\mathbb{k}) - \frac{1}{2} \tilde{z}_i(-\mathbb{k}) \tilde{z}_i(\mathbb{k}) \right] \right\} \tag{2-15}$$

という形に書けるから，波数空間におけるWiener-Hermite汎関数は

$$G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d\mathbb{k}_1 \cdots d\mathbb{k}_N H^{[N]}_{i_1 \cdots i_N}(\mathbb{k}_1, \cdots, \mathbb{k}_N) \times \tilde{z}_{i_1}(-\mathbb{k}_1) \cdots \tilde{z}_{i_N}(-\mathbb{k}_N) \tag{2-16}$$

で与えられる。すなわち具体的な形は

$$H^{[N]}_{i_1 \cdots i_N}(\mathbb{k}_1, \cdots, \mathbb{k}_N) = e^{\frac{1}{2}\int d\mathbb{k}\, \tilde{a}_i(-\mathbb{k}) \tilde{a}_i(\mathbb{k})} \times \prod_{j=1}^{N} \left[-\frac{\delta}{\delta \tilde{a}_{i_j}(-\mathbb{k}_j)} \right] e^{-\frac{1}{2}\int d\mathbb{k}\, \tilde{a}_i(-\mathbb{k}) \tilde{a}_i(\mathbb{k})} \tag{2-17}$$

である。Wiener-Hermite汎関数の多重積の統計的平均値は(2-15)及び(2-16)を使うと

$$\left\langle H^{[N_1]}_{j[1,1] \cdots j[1,N_1]}(\mathbb{k}_{11}, \cdots, \mathbb{k}_{1N_1}) \times \cdots \times H^{[N_m]}_{j[m,1] \cdots j[m,N_m]}(\mathbb{k}_{m,1}, \cdots, \mathbb{k}_{mN_m}) \right\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\text{右のすべての可能な分け方}\\\text{についての和}}} \prod_{\substack{\text{すべての}[a,p]\text{を}a \neq b\text{の条件のもとで}\\\text{対}[a,p]\ [b,q]\text{に分け各対についての積}}} \delta_{j[a,p]\, j[b,q]}\, \delta(\mathbb{k}_{[a,p]} + \mathbb{k}_{[b,q]})$$

$$= 0 \qquad \text{for otherwise}$$

となる。従って波数空間におけるFeynman型計算規則は座標空間におけるFeyman型規則において，factor $\delta_{j[s]j[t]}\delta[\mathbb{x}_s-\mathbb{x}_t]$ を $\delta_{j[s]j[t]}\delta[\mathbb{k}_s+\mathbb{k}_t]$ と置き換える以外，全っく同じである。またWiener-Hermite展開(2-12)は

$$v_i(\mathbb{k}:t) = \widetilde{K}^{(1)}_{ii_1}(\mathbb{k}:t)H^{(1)}_{i_1}(\mathbb{k})$$
$$+\int d\mathbb{k}_1\,\widetilde{K}^{(2)}_{ii_1i_2}(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1,\mathbb{k}_1:t)H^{(2)}_{i_1i_2}(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1,\mathbb{k}_1)+\cdots$$

となる。ここで

$$\widetilde{K}^{[N]}_{ii_1\cdots i_N}(\mathbb{k}_1,\cdots,\mathbb{k}_N)=[2\pi]^{-\frac{3}{2}(N+1)}\int d\mathbb{x}_1\cdots d\mathbb{x}_N\, e^{-i\sum_{j=1}^{N}\mathbb{k}_j\cdot\mathbb{x}_j}$$
$$\times K^{[N]}_{ii_1\cdots i_N}(\mathbb{x}_1,\cdots,\mathbb{x}_N) \qquad (2-18)$$

である。

§III 時間的に変わる理想確率関数を用いたWiener-Hermite展開[5)]

強い乱流状態はGauss分布に近いという実験事実を反映するようなWiener-Hermite展開の理論を考える。例えば速度場がNavier-Stokes方程式に従う場合，速度場が常に

Gauss分布に近いということはN.S.方程式の非線形項の効果の大部分がGauss分布へ寄与していることを意味する。従って理想確率関数を各時刻ごとに取り直すことによって，N.S.方程式の非線形項の効果のうち，大きな部分をGauss項に"くりこみ"，補正項を小さく保たせることによって，数項で良い近似が成立する様に理論を構成する必要があることを意味している。

N.S.方程式の非線形項は2次であるから，理想確率関数 $\vec{a}(\mathbb{k}:t)$ の時間変化を

$$\partial_t H^{(1)}_j(\mathbb{k}:t) = I^{(0)}_j(\mathbb{k}:t) + I^{(1)}_{jl}(\mathbb{k}:t)H^{(1)}_l(\mathbb{k}:t) + \int d\mathbb{k}' I^{(2)}_{jlm}(\mathbb{k}-\mathbb{k}',\mathbb{k}':t)H^{(2)}_{lm}(\mathbb{k}-\mathbb{k}',\mathbb{k}':t) \quad (3\text{-}1)$$

で記述出来ると仮定する。ここで空間の等方性を仮定した。$\vec{a}(\mathbb{k}:t)$ が各時刻で理想確率関数であるための必要十分条件は (2-14) である。即ち $\vec{a}(\mathbb{k}:0)$ が理想確率関数であるとすると，

$$\partial_t \langle a_{i_1}(\mathbb{k}_1:t)\cdots a_{i_N}(\mathbb{k}_N:t)\rangle = 0 \quad (3\text{-}2)$$

但し　$N = 1, 2, 3, \cdots$　，が，$\vec{a}(\mathbb{k}:t)$ が任意の時刻で理想確率関数であるための条件である。従って積分核 $I^{(0)}$，$I^{(1)}$，$I^{(2)}$ に対する条件は

$$I^{(0)}(\mathbb{k}:t) = 0 \quad (3\text{-}3)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}_{ik}(\mathbb{k}:t) + \mathcal{L}^{(1)}_{ki}(-\mathbb{k}:t) = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

$$\left[\mathcal{L}^{(2)}_{ijl}(\mathbb{k}_2,\mathbb{k}_3) + \mathcal{L}^{(2)}_{jli}(\mathbb{k}_3,\mathbb{k}_1) + \mathcal{L}^{(2)}_{lij}(\mathbb{k}_1,\mathbb{k}_2)\right]$$

$$\times\,\delta(\mathbb{k}_1+\mathbb{k}_2+\mathbb{k}_3) = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

である。但し $\mathcal{L}^{(2)}$ を一般性を失うことなく

$$\mathcal{L}^{(2)}_{ijl}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = \mathcal{L}^{(2)}_{ilj}(\mathbb{Q},\mathbb{P})$$

と仮定することが出来る。

ここで一般性を失うことなく $\mathcal{L}^{(1)}=0$ にとることが出来ることを示す。新しい理想確率関数 $\vec{b}(\mathbb{k}:t)$ を

$$\vec{b}(\mathbb{k}:t) \equiv \left[\mathcal{A}\, e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(-\mathbb{k}:\tau)^{T}}\right]\vec{a}(\mathbb{k}:t) \qquad (3\text{-}6)$$

で定義する。ただし $\mathcal{A}$ は反時間順序積（anti-time ordered product）を表わす。又 T は転置行列を取ることを表わしている。$\vec{a}(\mathbb{k}:t)$ が理想確率関数であれば，$\vec{b}(\mathbb{k}:t)$ も理想確率関数であることは

$$\left[\mathcal{A}\, e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(\mathbb{k}:\tau)^{T}}\right]^{T} = \mathcal{T}\left[e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(\mathbb{k}:\tau)}\right] \qquad (3\text{-}7)$$

$$\left[\mathcal{A}\, e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(-\mathbb{k}:\tau)^{T}}\right]\left[\mathcal{T}\, e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(\mathbb{k}:\tau)}\right] = \mathbb{1} \qquad (3\text{-}8)$$

$$\left[\mathcal{T}\, e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(\mathbb{k}:\tau)}\right]\left[\mathcal{A}\, e^{\int_0^t d\tau\, \mathcal{L}^{(1)}(-\mathbb{k}:\tau)^{T}}\right] = \mathbb{1} \qquad (3\text{-}9)$$

に注意すると，$\vec{b}(\mathbb{k}:t)$ の特性関数が

$$\left\langle e^{i\int d\mathbf{k}\,\vec{z}(-\mathbf{k})\cdot\vec{b}(\mathbf{k}:t)}\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\,\vec{z}(-\mathbf{k})\cdot\vec{z}(\mathbf{k})} \qquad (3\text{-}10)$$

となることからわかる。ここで$\mathcal{T}$は時間順序積(time-ordered product)を表わす。さらに(2-17)と(3-6)より

$$H^{[N]}_{i_1\cdots i_N}(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_N) = \prod_{j=1}^{N}\left[\mathcal{T}\, e^{\int_0^t d\tau\, L^{(1)}(-\mathbf{k}_j:\tau)}\right]_{i_j l_j}$$

$$\times\, \overline{H}^{[N]}_{l_1\cdots l_N}(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_N) \qquad (3\text{-}11)$$

が成立する。ここで$\overline{H}$は$\vec{b}(\mathbf{k}:t)$のWiener-Hermite汎関数である。この新しい理想関数$\vec{b}(\mathbf{k}:t)$の時間微分のWiener Hermite展開が$H^{(1)}$の項をもたないことは，(3-1),(3-3),(3-6),(3-11)を用いて，実際

$$\partial_t b_i(\mathbf{k}:t) = \left[\mathcal{A}\, e^{+\int_0^t d\tau\, L^{(1)}(-\mathbf{k}:\tau)^T}\right]_{ij}\times$$

$$\times\int d\mathbf{k}'\, L^{(2)}_{jkl}(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{k}')\left[\mathcal{T}\, e^{\int_0^t d\tau\, L^{(1)}(-\mathbf{k}+\mathbf{k}':\tau)}\right]_{kk'}$$

$$\times\left[\mathcal{T}\, e^{\int_0^t d\tau\, L^{(1)}(-\mathbf{k}':\tau)}\right]_{ll'}\overline{H}^{(2)}_{k'l'}(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{k}':t) \qquad (3\text{-}12)$$

となることからわかる。

まとめると，理想確率関数$a_i(\mathbf{k}:t)$の時間微分の右辺は一般性を失うことなく

$$\partial_t a_i(\mathbb{k}:t) = \int d\mathbb{k}' L^{(2)}_{ijk}(\mathbb{k}-\mathbb{k}', \mathbb{k}':t)$$

$$\times H^{(2)}_{jk}(\mathbb{k}-\mathbb{k}', \mathbb{k}') \qquad (3-13)$$

と書くことが出来る。$L^{(2)}$ に対する条件は

$$L^{(2)}_{ijk}(\mathbb{P}, \mathbb{q}) = L^{(2)}_{ikj}(\mathbb{q}, \mathbb{P}) \qquad (3-14)$$

$$[L^{(2)}_{ijl}(\mathbb{k}_2, \mathbb{k}_3) + L^{(2)}_{jli}(\mathbb{k}_3, \mathbb{k}_1) + L^{(2)}_{lij}(\mathbb{k}_1, \mathbb{k}_2)]$$

$$\times \delta(\mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 + \mathbb{k}_3) = 0 \qquad (3-15)$$

である。

§IV 2次元非粘性非圧縮流体

今才1軸と才2軸によって張られる空間に対して，等方的かつ一様，そして才3軸に関して一様な2次元非圧縮非粘性流体を考える。

速度場 $v_i(\mathbb{k}:t)$ は Navier-Stokes 方程式

$$[\partial_t + \nu \mathbb{k}^2]\, v_i(\mathbb{k}:t)$$

$$= -i \int d\mathbb{k}'\, k_l \Delta_{ij}(\mathbb{k})\, v_l(\mathbb{k}-\mathbb{k}')\, v_j(\mathbb{k}') \qquad (4-1)$$

および連続の方程式

$$k_i v_i(\mathbb{k}:t) = 0 \qquad (4-2)$$

に従うものとする。ここで

$$\Delta_{ij}(\mathbb{k}) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \qquad (4-3)$$

である。

非粘性（$\nu = 0$）の場合に適当な時間的に変る pseudo-scalar 理想確率関数を選ぶことによって

$$v_a(\mathbb{k}) = \varepsilon_{ab3}\, k_b\, V(\mathbb{k})\, H^{(1)}(\mathbb{k}:t) \qquad (4-4)$$

$$\mathbb{k} \equiv (k_1, k_2, 0)$$

の形で表わされる定常 Gauss 解が存在することを示そう。ここで $H^{(1)}(\mathbb{k}:t)$ は

$$\partial_t H^{(1)}(\mathbb{k}:t) = \int d\mathbb{k}'\, I^{(2)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}', \mathbb{k}':t)\, H^{(2)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}', \mathbb{k}':t) \qquad (4-5)$$

を充たすとして，$I^{(2)}$ は条件

$$I^{(2)}(\mathbb{k}, \mathbb{l}:t) + I^{(2)}(\mathbb{l}, -\mathbb{k}-\mathbb{l}:t) + I^{(2)}(-\mathbb{k}-\mathbb{l}, \mathbb{k}:t) = 0 \quad (4-6)$$

を充たす範囲で任意に選べる。連続の式（4－2）は（4－4）ととることにより充たされることは明らかである。（4－1）式で $\nu = 0$ としたものに（4－4）（4－5）を代入すると

$$\varepsilon_{ab3}\, k_b\, V(\mathbb{k}) \int d\mathbb{k}'\, I^{(2)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}', \mathbb{k}':t)\, H^{(2)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}', \mathbb{k}':t)$$

$$= -i \int d\mathbb{k}'\, \Delta_{ab}(\mathbb{k})\, k_c\, \varepsilon_{cd3}\, [\mathbb{k}-\mathbb{k}']_d\, V(\mathbb{k}-\mathbb{k}')\, H^{(1)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}':t)$$

$$\times \varepsilon_{be3}\, k'_e\, V(\mathbb{k}')\, H^{(1)}(\mathbb{k}':t) \qquad (4-7)$$

となる。これに $H^{(n)}$ を掛けて平均をとると，$n \neq 2$ では恒等的に成立し，$n=2$ で

$$2\varepsilon_{ab3}k_b V(\mathbb{k}) L^{(2)}(\mathbb{P},\mathbb{q})\delta(\mathbb{P}+\mathbb{q}+\mathbb{k})$$
$$= -i\Delta_{ab}(\mathbb{k})k_c\left[\varepsilon_{cd3}p_d V(\mathbb{p})\varepsilon_{be3}q_e V(\mathbb{q})\right.$$
$$\left.+\varepsilon_{cd3}q_d V(\mathbb{q})\varepsilon_{be3}p_e V(\mathbb{P})\right]\delta(\mathbb{P}+\mathbb{q}+\mathbb{k}) \tag{4-8}$$

となる。(4-8) の右辺は

$$i\Delta_{ab}(\mathbb{k})\varepsilon_{cd3}p_c q_d\,\varepsilon_{be3}(q_e-p_e)V(\mathbb{p})V(\mathbb{q})$$
$$\times\delta(\mathbb{P}+\mathbb{q}+\mathbb{k}) \tag{4-9}$$

と書ける。いま

$$L^{(2)}(\mathbb{P},\mathbb{q}) = \frac{-i}{2}\varepsilon_{ab3}p_a q_b\frac{k_c[p_c-q_c]}{\mathbb{k}^2}\frac{V(\mathbb{P})V(\mathbb{q})}{V(\mathbb{k})} \tag{4-10}$$

ととれば (4-8) が充たされることを示そう。$\mathbb{k}$ 方向を $\mathbb{e}^{(1)}$ 軸にとれば $a=1$ に対して (4-8) が成立することは自明である。このとき $a=2$ に対しては左辺は

$$i\varepsilon_{ab3}p_a q_b(p_1-q_1)V(\mathbb{P})V(\mathbb{q})\delta(\mathbb{P}+\mathbb{q}+\mathbb{k})$$

となり，(4-9) から右辺と一致することが判る。

従って問題は(4−10)が条件(4−6)を充たすように$V(\mathbb{k})$を求められるかということになる。(4−10)を(4−6)に代入すれば

$$\Big[\frac{p^2-q^2}{k^2}\frac{1}{V(\mathbb{k})^2}+\frac{q^2-k^2}{p^2}\frac{1}{V(\mathbb{p})^2}+\frac{k^2-p^2}{q^2}\frac{1}{V(\mathbb{q})^2}\Big]V(\mathbb{p})V(\mathbb{q})V(\mathbb{k})\,\delta(\mathbb{p}+\mathbb{q}+\mathbb{k})=0 \qquad (4-11)$$

が得られる。α,βを任意定数として

$$V(\mathbb{k})=\frac{\alpha}{k[1+\beta k^2]^{1/2}} \qquad (4-12)$$

は(4−11)を充たす。かくして

$$v_a(\mathbb{k})=\varepsilon_{ab3}k_b\frac{\alpha}{k[1+\beta k^2]^{1/2}}H^{(1)}(\mathbb{k}:t) \qquad (4-13)$$

は定常Gauss解である。

これから作られる特性汎関数は

$$G[\mathbb{z}(\cdot)]=\Big\langle e^{i\int d\mathbb{k}\, z_a(-\mathbb{k})v_a(\mathbb{k}:t)}\Big\rangle$$

$$=\exp\Big[-\frac{1}{2}\int d\mathbb{k}\, z_a(-\mathbb{k})\Delta_{ab}(\mathbb{k})\frac{\alpha^2}{1+\beta k^2}z_b(\mathbb{k})\Big] \qquad (4-14)$$

であり，また渦度

$$\omega(\mathbb{k}) = i\varepsilon_{ab3} k_a v_b(\mathbb{k}:t)$$

$$= i\frac{\alpha k}{[1+\beta \mathbb{k}^2]} H^{(1)}(\mathbb{k}:t)$$

に対する特性汎関数は

$$G^{\omega}[\mu(\cdot)] = \left\langle e^{i\int d^3\mathbb{k}\, \mu(-\mathbb{k})\,\omega(\mathbb{k})} \right\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int d^3\mathbb{k}\, \mu(-\mathbb{k}) \frac{\alpha^2 \mathbb{k}^2}{1+\beta \mathbb{k}^2} \mu(\mathbb{k})}$$

となり Cook, Taylor[7]のそれと一致する。
従ってこの解は新しく発見されたものではない。しかし解をWiener-Hermite展開の形で書くことは小さな粘性を考慮したときに生ずるGauss分布に対する補正，また準安定なエネルギー・スペクトルの形についての研究への道を開くことになる。目下この線に沿って研究中である。

文　献

(1) R.H. Cameron and W.T. Martin, Ann. Math. 48 (1947) 385

(2) N. Wiener, Non-linear Problems in Random Theory (John Wiley & Sons, Inc. New York 1958)

(3) T. Imamura, W. C. Meecham and A. Siegel, J. Math. Phys. 6 (1965) 695

(4) 今村勤, 確率場の数学, 岩波書店

(5) M. Doi and T. Imamura, Progr. Theor. Phys. 41 (1969) 358

(6) 土井正明, 博士論文 (関学大理) 1976年

(7) I. Cook and J. B. Taylor, Phy. Rev. Lett. 28, N2 (1972) 82