数理解析研究所講究録
第 326 巻 1978 年 109-114

Homogeneous Burgerlence の特性汎函数

岩手大工　　　細川　巌

よく知られているように、[1,2] 乱流の特性汎函数は

$$\phi(y,t) = \int e^{i\int y(x)T^t u_0(x)dx} p(u_0,0)\delta u_0 \qquad (1)$$

$$p(u_0,0) = \int e^{-i\int u_0(x)y_0(x)dx-\frac{1}{2}\iint Q(x,x')y_0(x)y_0(x')dxdx'}\delta y_0 \qquad (2)$$

と書かれる。ここで、$u_0(x)$ は初期に与えられた乱流（ストカスティックな流れ）の速度場を示し、これの確率分布が $p(u_0,0)$ である。(1) 式で、T^t は流れの方程式（ナヴィエ・ストークス etc.）に従って発展した t 時刻後の速度場を与える解オペレータである。(2) 式で、$Q(x,x')$ は、初期に与えられた乱流の速度相関：$\langle u_0(x)u_0(x')\rangle$ である。

汎函数積分については、Ref. 2 又は Ref. 3 に説明されたように、$u_0(x)$ 又は $y_0(x)$ が連続無限次元のベクトルであるべきところを、先ず有限多次元ベクトルで近似するところから始めて、そのベクトル空間にわたる積分で近似し、次元数を

上げると共に、適当な極限が存在する場合に、汎函数積分が得られたとするのが実用的な考え方である。

そのようなベクトル空間での積分のために、次のような公式を用意する。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \exp(i\sum t_k x_k - \sum\sum a_{ij}x_i x_j)dx_1\ldots dx_n$$
$$= (\pi)^{n/2}(\det A)^{-1/2}\exp[-\langle t, A^{-1}t\rangle/4] \qquad (3)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int F(\Sigma s_k x_k)\exp(-\Sigma\Sigma b_{ij}x_i x_j)dx_1\ldots dx_n$$
$$= (\pi)^{(n-1)/2}(\det B)^{-1/2}\int_{\infty}^{\infty}F(\alpha u)e^{-u^2}du, \quad \alpha^2 = \langle t, B^{-1}t\rangle\ . \qquad (4)$$

先ず、(2)の積分を遂行するために、I_1 の公式を適用する。この場合、x の空間を体積 Δx^i の n 個の cell に分け、次のようなおきかえを考えればよい。

$$a_{ij} \to \frac{1}{2}Q(x^i, x^j)\sqrt{\Delta x^i}\sqrt{\Delta x^j}, \qquad x_i \to y_0(x^i)\sqrt{\Delta x^i},$$

$$t_i \to -u_0(x^i)\sqrt{\Delta x^i}, \qquad \delta y_0 \to \Pi\ dy_0(x^i)\sqrt{\Delta x^i}/\sqrt{2\pi}$$

この結果、

$$p(u_0, 0) = (\det A)^{-1/2}\exp[-\frac{1}{4}\iint A^{-1}(x,x')u_0(x)u_0(x')dxdx']\Pi(\sqrt{2})^{-1} \qquad (5)$$

が得られる。

一方、流れの方程式が、 Burgers 方程式である場合、

$T^t u_0(x)$ はよく知られた Hopf-Cole の解で陽に表わされる。それを使い $R\to\infty$ （R はレイノルズ数に相当する。 Homogeneous Burgerlence の Decay を扱う場合は、代表速度は乱流の初期相関の平方根をとり、代表長さは初期相関の距離又は、初期のエネルギー・スペクトルの最大点の波数の逆数で決めることが多い。）での漸近的挙動を調べてみよう。そうすると次式が得られる。

$$T^t u_0(x) = -\frac{2\partial}{R\partial x}\log\int_{\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{R}{2}\int_0^{x'} u_0(x'')dx'' - \frac{R(x-x')^2}{4t}\right]dx' \qquad (6)$$

$$\underset{R\to\infty}{\simeq} \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{x'_0} u_0(x'')dx'' + \frac{(x-x'_0)^2}{2t}\right] + O(R^{-1}\log R) \qquad (7)$$

但し、(7) では exponent にユニークに鞍部点 x'_0 があると仮定し、鞍部点法で積分評価をしたものの主要な部分が示してある。以後、主要項のみを扱う。

ここで、I_2 の公式を使うと、(1) 式の積分ができる。この場合 (5) と (7) からわかるように、おきかえは

$$B \to A^{-1}/4,\quad s_k \to \sqrt{\Delta x^k} \text{ in } [0,x'_0]\ ,$$

とする。従って

$$\alpha^2 = \langle t,B^{-1}t\rangle = \langle t,At\rangle\times 4 = 2\int_0^{x'_0}\int_0^{x'_0} Q(x,x')dxdx', \qquad (8)$$

$$(\det B)^{-1/2} = (\det A^{-1}/4^n)^{-1/2} = (\det A)^{1/2}\times 2^n\ . \qquad (9)$$

が得られ、これを(4)式に入れ、(1)に帰って整理すると、次の式

$$\phi(y,t) \simeq (\sqrt{\pi})^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\int y(x)\frac{\partial}{\partial x}[\alpha u + \frac{(x-x'_0)^2}{2t}]dx} e^{-u^2} du , \qquad (10)$$

$$\alpha = \pm[2\int_0^{x'_0}\int_0^{x'_0} Q(x-x')dxdx']^{1/2} = \pm 2[\int_0^{x'_0}dx\int_0^{x} Q(s)ds]^{1/2} \qquad (11)$$

が得られる。

ところで、鞍部点 x'_0 は未定々数である。元来、(6)式の中で

$$\int_0^{x'} u_0(x'')dx'' + \frac{(x-x')^2}{2t}$$

の極値を与える点として、求められるべきものであったわけであるから(10)式の中で

$$f(x'_0,x) \equiv \alpha(x'_0)u + (x-x'_0)^2/2t; \qquad (12)$$

の極値を与える点によって近似するのが適当であると思われる。実際の鞍部点は(6)式でわかるように $u_0(x'')$ に依存し、ユニークであるはずはないが、上記の近似は、$u_0(x)$ の確率的な挙動が(11)の形で考慮されているために、いわば平均的意味での鞍部点を計算することに相当するだろう。

こうして $\partial f/\partial x'_0=0$ により $x'_0(x,t)$ が決まれば、(16)の形からみて $\partial f/\partial x$ がストカスティックな速度場 $u(x,t)$ を与えることは明らかである。即ち

$$\langle u(x,t)\rangle = \delta\phi/i\delta y(x)|_{y=0} = \langle\partial f/\partial x\rangle \qquad (13)$$

ここで、適当なQを与えて実際計算をやってみよう。

$$\text{Put } Q(s) = 2\int_0^\infty E(k)\cos ks\,dk; \quad E(k) = C_n k^n e^{-k^2/4}. \qquad (14)$$

とする。C_nは定数。このとき

$$\int_0^{x'_0}dx\int_0^x Q(s)ds = 4\int_0^\infty E(k)\frac{\sin^2(kx'_0/2)}{k^2}dk \sim |x'_0|^{1-n} \quad ; \qquad (15)$$

が成り立つ領域で、x'_0 が決まると仮定する。($|x'_0|^{1-n}$ のファクターは、$kx'_0=\xi$ と置換すれば出る。) この仮定が正しければ

$$f(x'_0,x) = D_n|x'_0|^{(1-n)/2}u + (x-x'_0)^2/2t \qquad (16)$$

$$\partial f/\partial x'_0 \sim D_n\left(\frac{1-n}{2}\right)|x'_0|^{-(n+1)/2}u - (x-x'_0)/t = 0, \quad |x'_0|^{(n+3)/2} \sim t \qquad (17)$$

により、x の小さい所、tの大きい所で $|x'_0| \sim t^{2/(n+3)}$が出てくる。$n=1$ の時は除く。(この場合は $n \gtrless 1$ の結果から考えることにする。) この結果

$$\partial f/\partial x \sim (x-x'_0)/t + O(\partial x'_0/\partial x) \sim t^{\frac{2}{n+3}-1} \quad \text{for } x = 0. \qquad (18)$$

$$\langle u^2(x,t)\rangle \sim t^{2\left(\frac{2}{n+3}-1\right)}. \qquad (19)$$

となる。

(19) 式は、$n \geq 0$ のすべての場合について、 Homogeneous Burgerlence のエネルギー減衰の時間依存を与える。$n=1$ の時は考察から除いてあったが、この式では、$n = 1 \pm 0$ で有限連続の決果を与えている。この式は減衰についての t の index は、$-2/3(n=0)$ から $-2(n=\infty)$ まで連続的に変化する。この傾向は Yamamoto & Hosokawa[4] のモンテカルロ法による計算結果と一致し、又、 Mizushima[5] の理論的取扱いとも完全に一致する。

本計算は、然しながら、(7) と (15) に関しての二つの仮定に基いているので、これ自体でそれほど厳密性を主張することはできないことを附記する。

REFERENCES

1. E. Hopf, J. Ratl. Mech. Anal. 1, 87 (1952).

2. 細川巌、航空宇宙技術研究所報告 TR-75 (1964)

3. I. Hosokawa, J. Math. Phys. 8, 221 (1967).

4. K. Yamamoto and I. Hosokawa, Phys. Fluids 19, 1423 (1976).

5. J. Mizushima, to be published in Phys. Fluids, March (1978).