数理解析研究所講究録
第 326 巻 1978 年 168-174

渦列における渦の成長

農工大一般教育　高木隆司

最近，乱流境界層内の秩序構造が注目を集めている。その内でも，2次元混合層は，一列に渦が並ぶような構造を持つので可視化が容易であるし，解析も行いやすい。観察によれば，混合層（自由境界層，剥離層ともいう）を作るためのしきり板から次々と渦が放出され，下流に流されるにつれて隣りどうしの渦が合併している。合併と合併の間の期間でも，ポテンシャル領域の流体を巻きこむことによって，渦自身は太っていく。これらの効果のために，混合層は下流に行くに従って直線的に厚くなっていく。

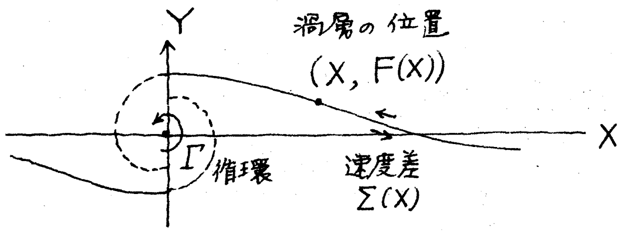
筆者と Kovasznay は，最近，渦の集合を統計的に取扱い，隣り合う渦の間隔の分布を求めた[1]。結果は，Brown & Roshko[2] による測定と一致した。このように，秩序構造を持つ乱流の解析には，構造の一単位に着目し，その集合を統計的に扱うのが有力な方法である。理論的に求めたいことのひとつに，

混合層の成長速度がある。これを求めるには，合併による寄与と渦自身の成長の寄与を両方とも考えねばならない。本論文の目的は，この後者を求める一方法について述べることである。

渦列の中のひとつの渦の成長には，その他の渦が影響を与えているかも知れない。しかし，第一近似としては，他の渦の列を一枚の渦層におきかえてよい。こうして，解析すべき問題は，無限に広い渦層の中で一個の渦が巻き上ったとき，渦層と周囲の流体を巻きこんでいく速さを求めよということになる。

図1のように座標系を選び，原点に渦の中心があるとする。ただし，渦層の十分遠くでの速度差を ΔU，時間を t として，長さは $\Delta U \cdot t$ で，渦層の速度差は ΔU で，流速は ΔU で，中央の渦の循環は $\Delta U^2 \cdot t$ で規格化してある。つまり，渦層は相

図1.



似を保ち直線的に成長することを仮定している。この仮定は，

粘性が重要でない場合正しい。

その他，次のような仮定をおく。

(1) 2次元，

(2) 渦層は十分薄い，

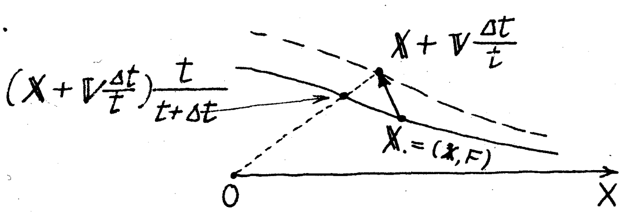
(3) 渦層は，図1のように，$X>0$ の部分，$X<0$ の部，原点にある渦点の3つから成る，

(4) $X>0$, $X<0$ の部分の渦層はほぼ水平．

未知数および未知関数は，Γ, $F(X)$, $\Sigma(X)$，渦層が運ばれる速度 $V_x(X)$, $V_y(X)$ である。これらを決定するための関係式は以下に述べるように5つある。

(I). 規格化された空間では，渦層は自分自身に沿って動く。図2は，この条件を数式の形に表現するためのものである。実線で表わした渦層が Δt 後に，速度 $\mathbb{V}=(V_x, V_y)$ のために点線の位置まで来る。ところが，長さの規格を $\Delta U\cdot(t+\Delta t)$ でやりなおすと，再びもとの渦層の形に一致する。渦層の勾配

図2.



が dF/dX で表わされることに注意すると，この条件は次式で表わされる。

$$\left(\mathbb{X} + \mathbb{V}\, \Delta t / t \right) \frac{\Delta t}{t + \Delta t} - \mathbb{X} \quad /\!/ \quad \left(1, \ \frac{dF}{dX} \right).$$

この式を変形すると，次式になる。

$$V_Y - F = (V_x - X) \frac{dF}{dX}.$$

(II) 渦層が引伸されると，単位長さ当りの循環，すなわち速度差 $\Sigma(X)$ が減少する。途中を省略して，この条件は

$$\Sigma(X) \frac{dV_x}{dX} = \{X - V_x(X)\} \frac{d\Sigma(X)}{dX}$$

となる。ただし，仮定(4)を使った。

(III) 渦層が運ばれる速度は，渦層の他の部分によって誘導される。仮定(3),(4)を使い，この条件は次式で表現される。

$$(V_x, V_Y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-F, X)}{X^2 + F^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Sigma(X') \{ -F(X) - F(X'),\ X + X' \}}{(X + X')^2 + \{F(X) + F(X')\}^2}\, dX'$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Sigma(X') \{ -F(X) + F(X'),\ X - X' \}}{(X - X')^2 + \{F(X) - F(X')\}^2}\, dX'.$$

ただし，$\mathcal{P}$ は主値を表わす。

(IV) 中心の渦の循環は，両側の渦層から巻きこんだ量に等しい。すなわち，仮定(4)を使い，

$$\Gamma = 2 \int_0^\infty \{1 - \Sigma(X')\}\, dX'.$$

以上の連立微分方程式を解けばよいのだが，簡単に近似解を求めるために，まず $X\to\infty$ の漸近形を求める．結果は，

$$F(x) \sim \frac{1}{4\pi X^3}\int_0^\infty X'^2(\Sigma(X')-1)\,dX' \equiv \frac{a}{X^3} \quad (a<0),$$

$$\Sigma(x) \sim 1+\frac{3}{2\pi X^4}\int_0^\infty X'\Sigma(X')F(X')\,dX' \equiv 1+\frac{b}{X^4} \quad (b>0),$$

$$V_x(x) \sim \frac{2}{\pi X^3}\int_0^\infty X'\Sigma(X')F(X')\,dX' \equiv \frac{c}{X^3} \quad (c>0),$$

$$V_Y(x) \sim \frac{1}{\pi X^3}\int_0^\infty X'^2(\Sigma(X')-1)\,dX' \equiv \frac{d}{X^3} \quad (d>0).$$

この漸近形を考慮して，F と Σ の近似形を次の形に仮定する。

$$F(X) \cong -\beta\delta\frac{1}{\sqrt{(X/A)^2+1}}\left\{\frac{1}{\{(X/A)^2+1\}^2}-\frac{\varepsilon'}{\{(X/A)^2+1\}^3}\right\}$$

$$\Sigma(X) \cong 1+\delta\left\{\frac{1}{\{(X/A)^2+1\}^2}-\frac{\varepsilon}{\{(X/A)^2+1\}^3}\right\}$$

ただし，$\beta,\delta,\varepsilon,\varepsilon'>0$．$A>0$．これらの5つのパラメターは，上記の5つの関係式を最もよく満すように決められる。その計算は，電子計算機を使った（日本ミニコン，NOVA 01）．

結果は図3に示す．図からわかるように，渦層は $X\sim0$ あたりで∞での約1割の厚さになっており，巻き込みの上下方向のサイズは $0.054\times2\cdot\Delta U\cdot t=0.108\,\Delta U\cdot t$ である．このサイズが，渦列におけるひとつの渦の成長の速さを与えると考えられる。その速さは $0.108\,\Delta U$ である．

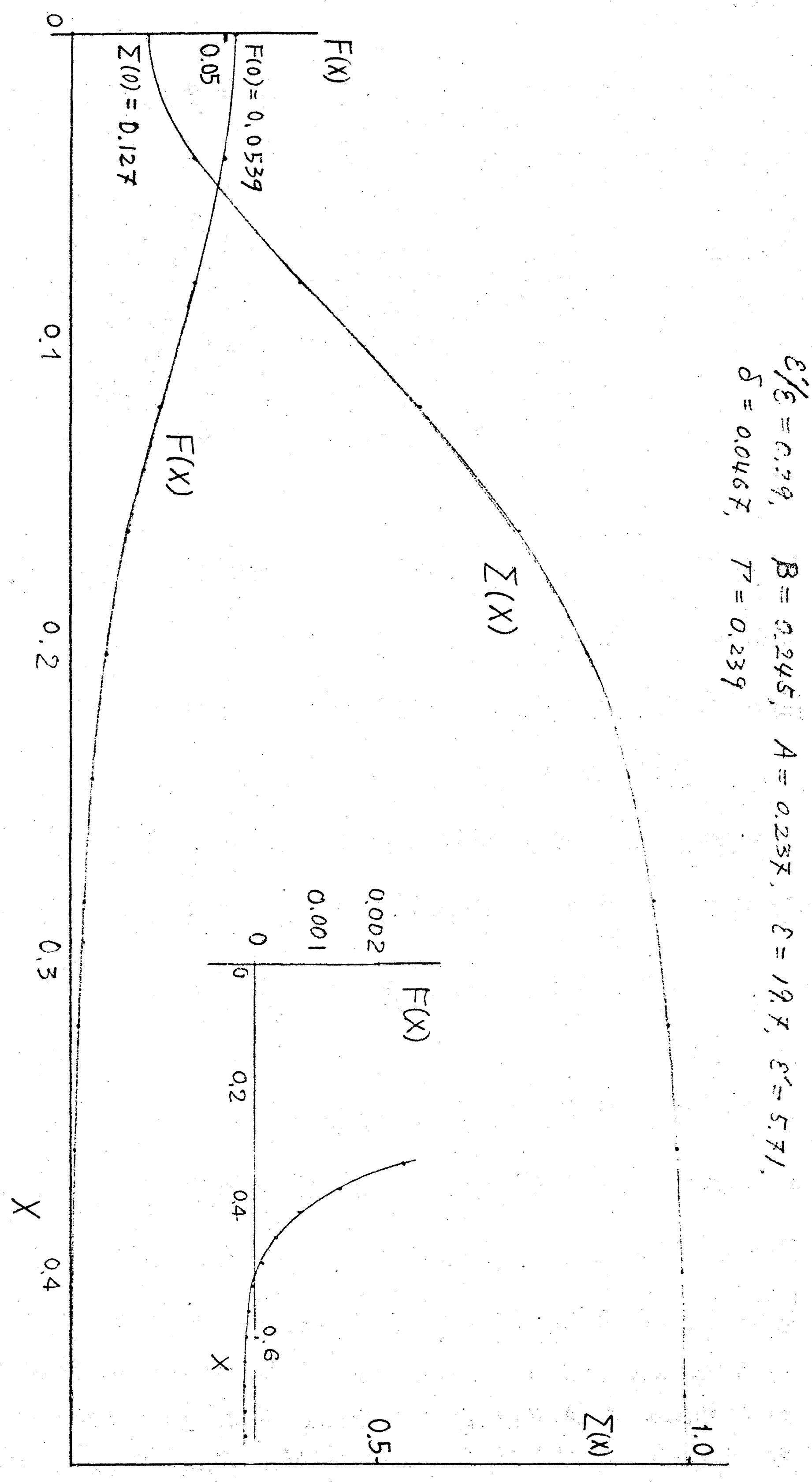

ε'/ε = 0.29, B = 0.245, A = 0.237, ε = 19.7, ε' = 5.71,
δ = 0.0467, T = 0.239
F(x)
F(0) = 0.0539
Σ(0) = 0.127
0.05
0
0.1
0.2
0.3
0.4
X
F(X)
Σ(X)
0.5
1.0
Σ(x)
0.002
0.001
0
0.2
0.4
0.6
X

図3.

次のような方法で，混合層の成長速度を求めてみる．渦は等しい大きさを持ち，規則的に並んでいると仮定する（

図4.

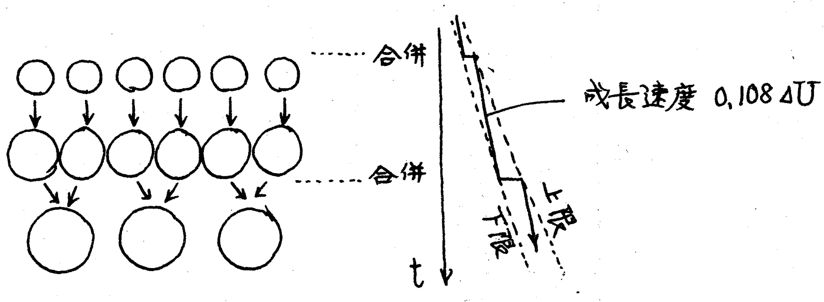


図4）．渦どうしが接触したら瞬間的に合体し，面積が保存されるような $\sqrt{2}$ 倍の大きさの渦になると仮定する。すると，図の点線で表わした，成長速度の上限と下限はそれぞれ $0.260\,\Delta U$，$0.184\,\Delta U$ であり，平均は $0.222\,\Delta U$ である．

実験では，混合層は時間的ではなく主流方向に空間的に成長する．そこで，混合層の上下の速度を U_1, U_2 として，

$$\frac{1}{2}(U_1+U_2)\frac{d}{dx} \equiv \frac{d}{dt}$$

によって，実験データと対応させてみる．Brown & Roshko[2)] によれば，成長速度は $0.18\,\Delta U$ であり，上記の結果より2割低い．Fiedler & Thies[3)] によれば，$0.22\,\Delta U$ (tripped case) あるいは，$0.15\,\Delta U$ (untripped case) である．

1) R. Takaki & L.S.G. Kovasznay : to appear in Phys. Fluids (1978).
2) G. Brown & A. Roshko : J. Fluid Mech. 64 (1974) 775.
3) H. Fiedler & H.J. Thies : pre-print, Symposium in Berlin (1977).