数理解析研究所講究録
第333巻 1978年 57-76

距離可移グラフと完全コードについて

茨城大・理　北村泰一
東京理大　佐藤巌

1. 緒言

p を素数, $q=p^{\alpha}$ なる有限体 $GF(q)$ 上の長さ n のブロックの誤り訂正コードで, 特に完全コードの存在の問題はハミング(Hamming)距離をもつベクトル空間 $V(n,q)$ における問題として考えられる. これは $V(n,q)$ の代りにある条件を満足する特殊のグラフ $\Gamma(n,q)$ で置き換えて考えることができる.

特に, $q=2$ の場合には $GF(2)=\{0,1\}$ で, $V(n,2)$ は n 次元の超立方体の頂点と辺とからなるグラフとして, そこにおける完全コードの問題として考えられ, ある程度の成果が得られている. (Cf.[6],[12])

完全コードの問題は任意の単純グラフにおいても考えられるが, それでは余り数学的な興味はなく, Γ にある規則性, 対称性のある場合が問題になる.

この方面の考察は Biggs ([3], [4]), Smith ([8], [11]), Hammond ([8]) などで研究されている. この報告では それらの概要を述べ, これを多少なりとも進めようとするものである.

2. 距離可移グラフ

以下 グラフ Γ は 頂点が有限な単純グラフとし, このグラフの自己同型置換 π に対し, Γ の元(頂点) x, y, u, v が, $x=\pi(u)$, $y=\pi(v)$ ならば 常に

$$d(u,v)=d(x,y) \tag{1}$$

が成り立つとき, Γ は距離可移 (distance-transitive) グラフという. ここに $d(x,y)$ は Γ の2頂点 x, y の距離とし, $\mathrm{Max}(\min_{\Gamma} d(x,y))$ $(\forall x, y \in \Gamma)$ を Γ の直径といい d で表わす. Γ を次数 k の正則 (regular) グラフとし, そのガース (girth) を g とすれば

$$d \geq \left[\frac{g}{2}\right] \tag{2}$$

なることはよく知られている.

いま, Γ を k-正則な距離可移グラフとし, これに対して $(d+1)\times(d+1)$ の 3-主対角 (tridiagonal) 行列

$$I(\Gamma)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ k & a_1 & c_2 & & 0 \\ & b_1 & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_d \\ 0 & & & b_{d-1} & a_d \end{bmatrix} \tag{3}$$

を Γ の交行列 (intersection matrix) という. これはその主要部をとり, 省略した形で

$$I^*(\Gamma)=\begin{Bmatrix} * & c_1 & c_2 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ k & b_1 & b_2 & \cdots & b_{d-1} & * \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

で表わし, Γ の交配列 (intersection array) という. ここに $d(u,v)=i$, $\Gamma_i(u)=\{w \mid d(w,u)=i\}$ とするとき

$c_i=|\Gamma_{i-1}(u)\cap\Gamma_1(v)|$, $a_i=|\Gamma_i(u)\cap\Gamma_1(v)|$, $b_i=|\Gamma_{i+1}(u)\cap\Gamma_1(v)|$

であって, これらは u, v の選び方には無関係に定まる.

たとえば, fig.1 は 5 点の完全 (complete) グラフ K_5 で, これは $d=1$, $k=4$, $g=3$ の正則グラフであって

$$I(K_5)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad I^*(K_5)=\begin{Bmatrix} * & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & * \end{Bmatrix}$$

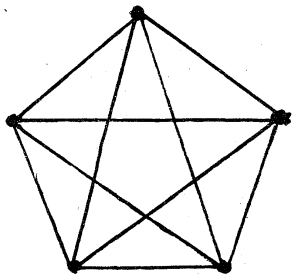


fig. 1

となる. また fig.2 は所謂ペテルゼン (Petersen)-グラフといわれるもので, 奇 (odd) グラフ O_k の一種で O_3 で表わされ, $d=2$, $k=3$, $g=5$ で

$$I(O_3)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad I^*(O_3)=\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & * \end{Bmatrix}$$

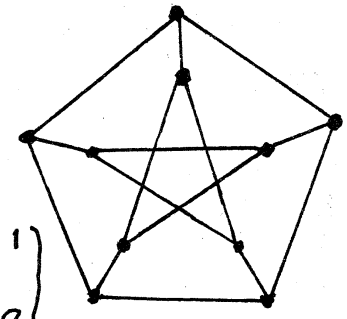


fig. 2

となる. 更に fig 3 は立方体 (Cube または Lattice) グラフといわれるものの一種で Q_3 で表わされ, $d=3$, $k=3$, $g=4$ の正則グラフで

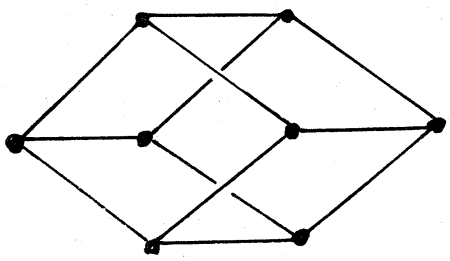


fig. 3

$$I(Q_3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad I^*(Q_3)=\begin{Bmatrix}*&1&2&3\\0&0&0&0\\3&2&1&0\end{Bmatrix}$$

となる. 一般に正則グラフの交行列(または交配列)における c_i, a_i, b_i に対しては

$$c_i>0,\ a_i\geq 0,\ b_i>0;\qquad \begin{matrix}c_i+a_i+b_i=k & (i=1,2,\cdots,d-1)\\ c_d+a_d=k\end{matrix} \tag{5}$$

なる関係が成立し, 更に距離可移なグラフの交行列に対しては

$$1\leq c_2\leq c_3\leq\cdots\leq d,\quad k\geq b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_{d-1} \tag{6}$$

が成立することが証明される. (Cf. [1], [2], (11))

(5) によれば a_i は b_i, c_i がわかれば計算できるので省略し

$$I^*(\Gamma)=\{k, b_1,\cdots,b_{d-1};\ 1, c_1,\cdots c_d\}$$

と書くことがある. 上の例では

$$I^*(K_5)=\{4,3;1,3\},\quad I^*(O_3)=\{3,2;1,1\},\quad I(Q_3)=\{3,2,1;1,2,3\} \tag{7}$$

である.

$I(\Gamma)$ は $d+1$ 個の異なる実の固有値をもち，それを

$$k=\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_d$$

とし，u_i を λ_i に対応する，第1成分に1をもつ左固有ベクトル

v_i を λ_i に対応する，第1成分に1をもつ右固有ベクトル

とすれば，$(u_0,v_0)/(u_i,v_i)$ は整数になることなどが証明される．この他にも正則(距離可移の隣接および交行列の固有値および固有ベクトルについては完全コードにも関連して多くの研究がなされている(cf.[1],[2])が，これらは省略して，距離可移なグラフを列挙すると

I. 完全グラフ K_n

II. 完全2部グラフ $K_{n,n}$

III. 立方体(Cube)グラフ Q_n

IV. 奇(Odd)グラフ O_n

V. 2-奇グラフ $2\cdot O_n$

などがあるが，これらはいずれも対称性をもつ美しく重要なものであるが相当強い制限で規定されるので割合に稀な存在である．距離可移ならばもちろん対称(symmetric)グラフであり，頂点可移(vertex transitive)でもあって，それらの関係は

距離可移グラフ $\Rightarrow$ 対称グラフ $\Rightarrow$ 頂点可移グラフ

となるが，距離可移グラフを含む族としては距離正則

(distance regular) グラフ, antipodal グラフ などがあり, それらの関係も相当わかっているようであるがまだ問題は残っておるように思われる.

また, 距離可移グラフに関連して $P(k,t)$ なる次の正則グラフの族がある. これは $2k$ 個の頂点 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$, $y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}$ なる頂点と, $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\} \pmod k$ なるすべての i に対して $\{x_i, y_i\}$, $\{x_i, x_{i+1}\}$, $\{y_i, y_{i+t}\}$ なる辺をもつグラフで, このグラフは $t^2 \equiv \pm 1 \pmod k$ か $(k,t) = (10,2)$ のときは頂点可移グラフ, $(k,t) = (4,1), (5,2), (8,3), (10,2), (10,3), (12,5), (24,5)$ のとき対称グラフ, $(k,t) = (4,1), (5,2), (10,3)$ のとき頂点可移グラフである (Cf. [2]). $(k,t) = (5,2)$ のときがペテルゼン・グラフ (fig.2) である.

この考えは更につぎのように拡張することができる:

すなわち, k, t_1, t_2 を自然数として $P(k, t_1, t_2)$ として $4k$ 個の $\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}, \{w_i\}$ $(i = 0, 1, \cdots, k-1)$ を頂点とし $\{x_i, w_i\}, \{y_i, w_i\}, \{z_i, w_i\}, \{x_i, x_{i+1}\}, \{y_i, y_{i+t_1}\}, \{z_i, z_{i+t_2}\} \pmod k$ を辺とするグラフを考える.

fig.4 は $P(5,2)$ でペテルゼン・グラフに他ならない. その右の図はこれを標式的に表わしたものである.

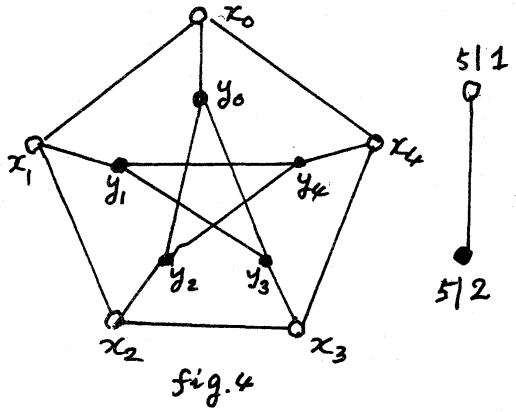
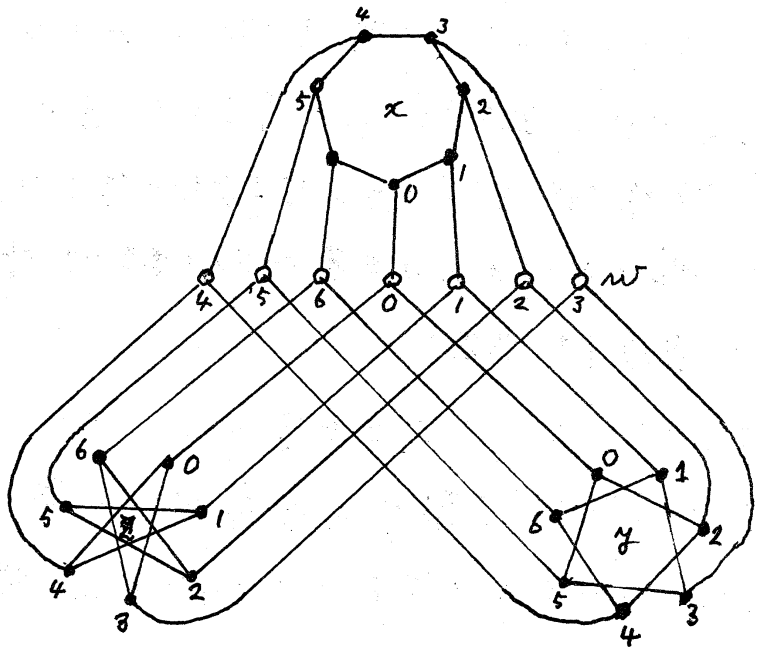


fig.4



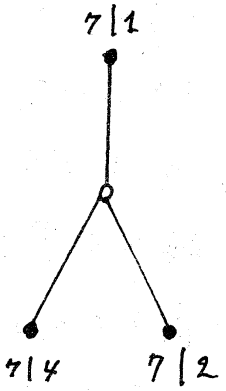


fig. 5

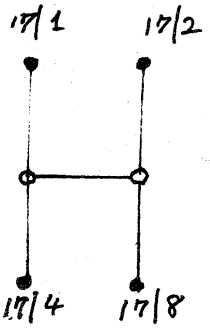


fig. 6

fig. 5 は P(7, 2, 4) に相当するもので Coxeter グラフといわれるもので，右に副えた図は，これを標式的に表わしたものである．同様の考えで fig. 6 に従って 3 組の17辺形と 2 組の17点を結ぶ 102個の頂点をもつグラフを作ることができる．fig. 4～6 が Biggs がいう 3 つの remarkable グラフで 3 次の自己同型 (automorphic) はこれだけである．(Cf. [2], [5])

Biggs と Smith によれば，3 次の正則グラフで距離可移なものは 12種，4 次のそれは 15種であることが知られている．

また，P(4, 1) は 3 次元の立方体より成るグラフ Q_3

(fig.3) であるが，これは上述のように距離可移グラフである．(上の方法で Q_n $(n \geq 4)$ を構成することも考えたが，述べる程までもない)．距離可移な n 次元の超立方体のなすグラフ Q_n は 0 と 1 の n 個の列(長さ n の 2 進コード)の集合で，情報理論にも密接に関連する(後述)．

高高度の対称性を有するグラフを考察に対しては次数 k，直径 d 以外に ガース(内周) g も考察する必要がある．いま 次数 k，ガース g の正則グラフの頂点の個数を $|V|$ とすれば

$$|V| \geq c(k, g) \tag{8}$$

が成り立つ．ここに

$$c(k,g) = \begin{cases} 1+k+k(k-1)+\cdots+k(k-1)^{\frac{1}{2}(g-3)} & (g: \text{odd}) \\ 2\left[1+(k-1)+(k-1)^2+\cdots+(k-1)^{\frac{1}{2}(g-2)}\right] & (g: \text{even}) \end{cases} \tag{9}$$

なることが容易に証明される．(Cf. [1], [2])

(8) において等号の成り立つ極値的な場合は しばしば重要なグラフを与える．たとえば $g=3$ のときは，任意の k に対し $c(k,3)=1+k$ で K_{1+k} のとき，$g=4$ のときは $c(k,4)=2k$ で $K_{k,k}$ のとき達せられる．$g=5$ のときは $c(k,5)=1+k^2$ で $k=3$ ならば $|V|=c(3,5)=10$ となり，ペテルゼン・グラフのときである．

一般に k と g とを与えたとき V の個数の最小になる

グラフを (k,g)-cage と呼んでいる.

(k,g)-cage の頂点の個数を $|V(k,g)|$ と書けば,

$|V(2,g)|=g$ で, $g\geq 3$ に対しては

$$|V(k,g)|\geq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)^{\frac{1}{2}(g-1)}-2}{k-2} & (g:\text{odd}) \\ \dfrac{2(k-1)^{\frac{1}{2}g}-2}{k-2} & (g:\text{even}) \end{cases} \tag{10}$$

なることが証明される.

$(2,g)$-cage は C_g (cycle グラフ), $(k,3)$-cage は K_{k+1}, $(k,4)$-cage は $K_{k,k}$ である. これらの場合はいずれも (10) においては等号が成り立つ.

$(3,5)$ cage はペテンゼン・グラフ (fig. 2), $(3,6)$-cage はヒーウッド (Heawood) グラフ (fig. 7) と呼ばれるものである.

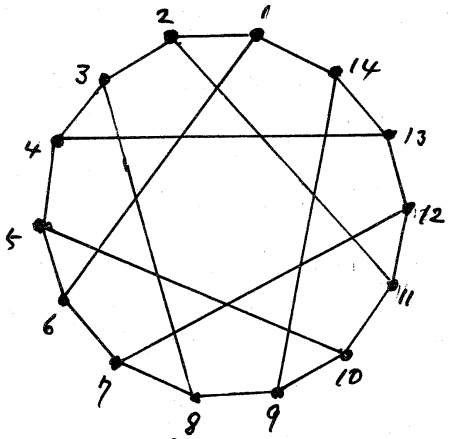


fig. 7

g を与えたとき, 任意の $k(\geq 2)$ に対し (k,g)-cage は必ず存在し, しかも $3\leq g\leq 8$ ならば (k,g)-cage はただ1つしか存在しないことが証明されている.

cage は一般に高度の対称性をもつグラフで, グラフの可移性にも関連する. [Cf. [7]]

3. コード (codes) の理論

コーディング理論では $q(=p^\alpha;$ p は素数) 個の異なる記号の集合を考え, それらをアルファベットと呼ぶ. これらの記号の k 個の組 (k-tuples) を単語 (words), k をその長さ (length) という. $F=GF(q)$ とおき, k-tuple の全体 F^k を $\mathcal{R}^{(k)}$ で, これを $\bmod q$ の下で k 次元ベクトル空間とみなして用いる. 情報理論では通例 $q=2$ (または3, あるいは1つの素数) とし, $F=GF(2)=\{0,1\}$ を用いることが多い.

$\mathcal{R}^{(k)}(=V(k,q))$ において ハミング (Hamming) 距離と呼ばれる, つぎのような距離函数 d を定義して位相を導入する. x, y を $\mathcal{R}^{(k)}$ の要素とし

$d(x,y) \overset{d}{=} x$ と y とにおける異なる成分の個数 (1)

これが距離の公理を満足することは距離の定義(1)と $\bmod q$ で考えていることとで容易にわかる. ($q=2$ ときは $d(x,y)=d(x-y,0)=d(x+y,0)$. この距離の概念は間違って作られた1つの単語の間違いの個数を考えるとき最も自然である.

また, $\forall x\in\mathcal{R}^{(k)}$ に対して $w(x)=d(x,0)$ をベクトル x の重さ (weight) と定義する. したがって

$$d(x,y)=w(x-y,0)\ (\bmod q) \qquad (2)$$

この距離 d を用いて $\forall x\in\mathcal{R}^{(k)}$ の ρ-近傍を

$$S(x,\rho) \triangleq \{ y \in \mathcal{X}^{(k)} \mid d(x,y) \leq \rho \} \quad (\rho > 0) \qquad (3)$$

で定義し，これを x を中心とする半径 ρ の球という．

いま，e を与えられた自然数とし，2つの異る単語が少くとも $2e+1$ の距離をもつような $\mathcal{X}^{(k)}$ の部分集合 C を考える．もし任意の $x \in C$ が e 個の成分を異にする ($t \leq e$)，すなわち t 個の誤をなしているならば，このような単語は他の勝手な単語よりも始めの単語に似ているということができる．それゆえ C があたえられているならば t 個の誤を正すことができることになる．コーディング理論の1つの目的は，そのような e-誤り訂正コード (e-error correcting codes) の研究にある．(cf. [9], [10]) (この他に誤り検出コードがある)

e-誤り訂正コード C とは つぎの性質をもつ $\mathcal{X}^{(k)}$ の部分集合 C である：

$$\forall x \in C,\ \forall y \in C \left[x \neq y \Rightarrow d(x,y) \geq 2e+1 \right] \qquad (4)$$

すなわち

$$\forall x \in C,\ \forall y \in C \left[x \neq y \Rightarrow S(x,e) \cap S(y,e) = \phi \right] \qquad (4')$$

実際には あまり重要ではないが，組合せ理論や群論で非常に興味あるものとして 完全(perfect)コード がある．これは e-誤り訂正コード C が

$$\bigcup_{x \in C} S(x,e) = \mathcal{X}^{(k)} \qquad (5)$$

すなわち，$S(x,e)$ が $\mathcal{X}^{(k)}$ の分割(partion) になっているよ

うもコードである. 距離可移なグラフをその自己同型置換で移すとき上の条件を満足することはそう期待できない. 完全コードも相当まれな存在で, 距離可移なグラフで上の条件を充すものは極めて限られてくるわけである.

これに対し, つぎのことを証明することができる:

<u>定理1</u> コード C 内の最小の重さ(直径)を d とすれば, このコードは $[(d-1)/2]$ 個以上の誤を訂正することはできない. ここに $[x]$ は x の整数部分を表わすガウスの記号である.

証明は背理を用い, 距離函数 $d(x,y)$ の間の三角関係を用いてできる. (省略, fig 8 参照)

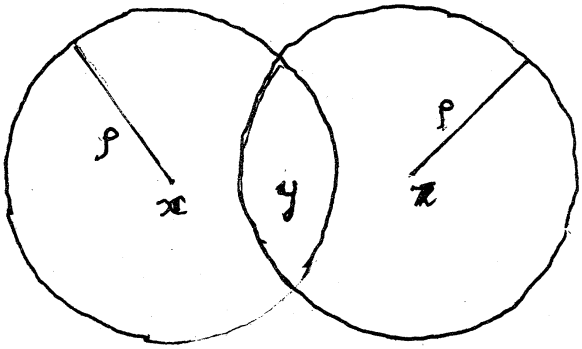


fig. 8

また, コード理論において興味のある重要な1つの型は線型 (linear) コードといわれるものがある. これは $\mathcal{X}^{(q)}$ の k 次元線型部分空間をなすコードで, $GF(q)$ 上の (n,k)-コードと呼ばれる. これに対して

<u>定理2</u> 1つの線型コードにおいては, その最小距離はすべての零コード単語でないものの間の最小の重さに等しい.

これは $x \in C$, $y \in C$ ならば $x-y \in C$ で $d(x,y) = d(x-y, 0) = w(x-y)$ だからである.

線型コードは2つの方法で研究することができる. 1つはその生成行列(generator matrix)を用いる方法であり, いま1つは線形空間であるから, その双対(dual)コード $C^{\perp}$ を考えることである. C が $\mathcal{X}^{(n)}$ の線型コードならば, その双対コードは

$$C^{\perp} \triangleq \{x \in \mathcal{X}^{(n)} \mid \forall y \in C\,[(x,y)=0]\} \qquad (1)$$

で定義され, これは $(n, n-k_1)$ 線型コードである.

この他にも通信(情報)理論の必要より2進コードに制限を加え改良した ハミング・コード, 循環(cyclic)コード, リード・ミューラー(Reed-Muller)コード, 対称コードなどがあり, ハミング・コードは完全コードであることも証明されている(Cf. [1])が, これは本題目とは別のことである.

4. 距離可移グラフにおける完全コードの存在性

距離可移グラフにおける完全コードの存在が考えられているのは 立方体グラフ Q_n および奇グラフ Q_n' における場合である. 前者は情報理論で最も多く用いられる2進符号の作る $V(n,2)$ で, これは幾何学的には n-次元の超立方体の作るグラフで前述のように距離可移であり この場合には J. H. Lint と A. Tietäväinen (この論文は未見) によって研究され, つぎのような結果が得られている. (Cf. [12])

定理1 Q_k における完全コード存在するのは，(k, e) に対して つぎの4つの場合である:

(i) $k=e$, $|C|=1$ なる自明なコード

(ii) $k=2e+1$, $|C|=2$ なる反復(repetition)コード

(iii) $k=2^r-1$, $e=1$ のハミング・コード

(iv) $k=23$, $e=3$ の2元ゴレー(Golay)コード.

そこで，Q_k 以外の他の正則グラフ特に距離可移グラフの内の完全コードをものものを探すわけであるが，まず正則グラフの場合から考える.

Γ を次数 k の正則グラフとし，$A=A(\Gamma)$ をその隣接行列とする. いま $\mathbf{C}$ をその成分が Γ における完全1-コードに対応する所で1，他では0となるような列ベクトルとすれば $A\mathbf{C}=\mathbf{u}-\mathbf{C}$ が成りたつ. ここに $\mathbf{u}$ はすべての成分が1であるような列ベクトルである. そこで

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}-(k+1)\mathbf{C} \tag{1}$$

とおけば $A\mathbf{w}=A\mathbf{u}-(k+1)A\mathbf{C}=k\mathbf{u}-(k+1)(\mathbf{u}-\mathbf{C})=-\mathbf{w}$ となる. これは -1 が A の1つの固有値で，これに対応する固有ベクトルが $\mathbf{w}$ であることを示している. A は有理数を要素とする対称行列であるから，その最小多項 $\psi(t)$ は $\mathbb{Q}[t]$ に属する.

定理2. 正則グラフ Γ が完全1-コードをもつならば，

$t+1$ は環 $\mathbb{Q}[t]$ における $A(\Gamma)$ の最小多項式 $\mu(t)$ の約数である

ことがわかった. この結果はグラフの隣接行列の最小多項式が, グラフにおける完全コードの研究に関係していることを示している.

距離可移グラフの場合は, その交行列 $I(\Gamma)$ の最小多項式を考え, $e>1$ なる完全 e-コードの存在の必要条件が Biggs によって得られた. すなわち Γ を直径 d の k 価の距離可移グラフとすれば 2. で述べたように

$$I(\Gamma)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ k & a_1 & c_2 & & 0 \\ & b_1 & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_d \\ & 0 & & b_{d-1} & a_d \end{bmatrix} \tag{2}$$

で, その固有ベクトル列は

$$\begin{cases} v_0(t)=1, \quad v_1(t)=t \\ \text{漸化式}: c_i v_i(t)+(a_i-t)v_{i-1}(t)+b_{i-2}v_{i-2}(t)=0 \quad (i=1,2,\cdots d) \end{cases} \tag{3}$$

から計算することができて, $0\le i\le d$ に対して

$$x_i(t)=v_0(t)+v_1(t)+\cdots+v_i(t) \tag{4}$$

とおけば, Γ が完全 e-コードである条件より $I(\Gamma)$ は固有値 k をもち, $I(\Gamma)$ の最小多項式を $\mu(t)$ とすれば…

$$\mu(t)=(t-k)\,x_e(t) \tag{5}$$

なることを示すことができる．これらを用いて距離可移グラフの場合つぎの定理が証明される（Cf.[3]）；

定理3．距離可移グラフ Γ が完全 e-コードを持つならば，$x_e(t)$ は環 $Q[t]$ において $\mu(t)$ の約数である．

上において $e=1$ とすれば $x_1(t)=\overbrace{v_0(t)+v_1(t)=}^{}1+t$ となり，正則グラフが距離可移の場合の定理2の結果が定理3の特別の場合として含まれていることを示している．

さて定理3において Γ が特に立方体グラフ Q_k ならば

$$I(Q_k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ k & 0 & 2 & & 0 & \\ & k-1 & 0 & 3 & \ddots & \\ & & k-2 & 0 & \ddots & k \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

であるから，(3) を用いて，$v_i(t)$ を計算すれば $s=\frac{1}{2}(k-t)$ とおいて この場合

$$x_e(t)=\sum_{i=1}^{e}(-1)^i\binom{s-1}{i}\binom{k-s}{e-i} \tag{7}$$

$$\mu(t)=Rs(s-1)(s-2)\cdots\cdots(s-k) \tag{8}$$

が導き出せる．(7) はいわゆる Lloyd の多項式と言われるもので，Lloyd はこれを用いて，$GF(q)$ 上の長さが n の tuple の作る C で，完全 e-誤り訂正コードが存在する条件を求

また（ロイドがそのとき用いた多項式は

$$P_e(t)=\sum_{i=0}^{e}(-1)^i\binom{k-t}{e-i}\binom{t-1}{i}(q-1)^{e-i}$$

で，これをLloydの多項式という場合もあるが本質的には同じものである.）この(7),(8)を用いてこの節の始めの定理1は証明できる（証明省略）.

さて，つぎは距離可移グラフが奇グラフO_kの場合であるが，O_k($k\geq 3$)はk価で直径が$k-1$なるグラフで，

$$I^*(Q_k)=\left\{\begin{array}{ccccccccccc} * & 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots\cdots & [(k-1)/2] & & [k/2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & & [(k+1)/2] \\ k & k-1 & k-1 & k-2 & k-2 & \cdots\cdots & 1 & 1 & * \end{array}\right\}$$

で，これより$I(O_k)$の固有値を求めると$(-1)^{k-i}i$ $(1\leq i\leq k)$，したがって最小多項式は

$$\mu(t)=(t-k)(t+k-1)(t-k+2)\cdots(t+(-1)^k)$$

となり，更に

$$x_0(t)=1,\quad x_1(t+1),\quad x_2(t)=t^2+t-(k-1),$$

$$x_3(t)=\frac{1}{2}(t+1)\{t^2+t-(2k-2)\},\ \cdots$$

となるから，これらのことを用いて，つぎの定理が証明される.（cf. [4]）

定理4　O_kの中に完全e-コードが存在するとすれば(k,e)に対してつぎのことが示せる:

(i)　$e=1\Rightarrow k$は偶数

(ii)　$e=2\Rightarrow k=4r^2-2r+1$　　（r：自然数）

(iii) $e=3 \Rightarrow k=2(4r^2-3r+1)$ (r：自然数)

さらに O_k における完全e-コードについては，Hamond と Smith が[8]において優れた考えを用いて

O_k が1つの完全eコードを持ち，eが奇数ならば kは偶数であり，しかも

eが偶数のとき $k \geq (e^2+4e+2)/2$

eが奇数のとき $k \geq (e^2+4e+3)/2$

などの結果を得ている．

著者は K_n, $K_{n,n}$ は交行列も簡単であるので，定理3を適用して計算してみたが特記すべき結果は得られない．

実際距離可移グラフにおける完全コードの例は稀なもので，2で述べたように3価の距離可移グラフは12種あるが，その内でtrivialでない完全コードをなすものは2種しかない；すなわち Q_3 の中の1-コードの場合と，2で述べた fig5. ($P(7,2,4)$ として述べた28個の頂点をもつグラフ) の中の1-コードの場合に限る．この節の始めに述べた定理1にしても Q_k の中に完全コードの少ないことを示しているが，このTietäväinenの証明においては，前述のLloyd多項式と，いわゆるSphere packing condition：

$$|\Sigma_e(c)| \,\Big|\, |V(Q_k)| \quad (c \in C,\ q=p^\alpha)$$

すなわち $1+n(q-1)+\cdots\cdots+\binom{n}{q}(q-1)^k \mid q^\alpha$

を用いるが，この Sphere packing condition を用いない優れた方法で坂内英一氏は

$e \geq 3$ に対して Q_k (k, q は任意) における trivial でない 完全 e-コードは高々有限個であることを証明した．これも距離可移なグラフの中に完全-コードの存在の稀なことを示す一つの事実であろう．

参 考 文 献

[1] Biggs, N. L.: 「Finite Groups of Automorphisms」 1971, Cambridge

[2] 〃 : 「algebraic Graph Theory」 1974, Cambridge

[3] 〃 : Perfect Codes in Graphs, Jour. Combinatr. Theory (B), 1973

[4] 〃 : Perfect Codes and distance-transitive Groups. Proc. Brit. Comb. Conference, 1973

[5] Biggs and Smith D.H. : On trivalent Graphs.
Bull. Lond. Math. Soc., 1971

[6] Cameron P. J. and Van Lint, J. H. : 「Graph Theory Coding Theory and Block Design, 1975, Cambridge

[7] Coxeter, H.S.M.: Self dual Configurations and Regular Graph.
Bull. Amer. Math. Soc. 1950

[8] Hamond P. and Smith : Perfect Codes in Graph O_k.
Jour. Comb. Theory (B) 1975

[9] 三根 久:「情報理論入門」1964 朝倉書店

[10] 関 英男:「情報理論」1969 オーム社

[11] Smith D. H.: Distance-transitive Graphs,
Proc. Brit. Comb. Confer., 1973

[12] Van Lint, J. H.: 「Coding Theory」(Lecture Notes in Math. 201) 1971, Springer.