

埋蔵問題と被覆問題について  
(Packing & Covering in Graphs)

日本医大	秋山 仁
東海大・理	恵羅 博
日本医大	金子紀美子
上智大・理	斎藤友克
東京理大	佐藤 巖

§ 1 序論

グラフ理論に於る 2 つの関連する問題ととり扱う。  
先づ、被覆問題とは、与グラフ  $G$  に対し、ある性質をみたすいくつかの  $G$  の部分グラフの合併 (union) が  $G$  となるような部分グラフの最小個数を求める問題である。埋蔵問題とは、与グラフに対し、反対の性質をみたす  $G$  の部分グラフの最大個数を求める問題である。これらの問題は、ある意味では、双対的な関係にある。

いくつかの知られている不変数と、その双対概念から始めてそれらを適当な条件を加えて拡張する。新しく定義した概念を含めた個々の不変数を定義し、その後これらの不変数を完全

グラフ  $K_m$  ( $m \geq 3$ ), 完全二組グラフ  $K_{m,n}$  について求める。

例えば, グラフ  $G$  の樹化数 (arboricity)  $\pi(G)$  は, 各部分グラフが acyclic になるように  $G$  の線集合を直和分割した最小数として定義される被覆不変数である。この不変数は, Nash-Williams [7] に於て, 一般グラフに対して与えられている。

その反対は,  $G$  に埋蔵される cyclic な部分グラフで, 線素なもの最大の個数である。非樹化数 (cycle-multiplicity)  $\tilde{\pi}(G)$  である。

例えば,  $K_m, K_{m,n}$  に対するこれらの不変数の値は,  $G$  をトリビアルでない  $(p, q)$  グラフとし,  $q_m$  を  $G$  の  $n$  個の点をもつ部分グラフの線の最大個数とする。そのとき,

$$\pi(G) = \max \left\{ \frac{q_n}{n-1} \right\}, \text{ Nash-Williams [7]}$$

$$\pi(K_m) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \quad \pi(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{mn}{m+n-1} \right\rfloor \quad (\text{Beineke [3]})$$

$G$  を  $n$ -regular グラフとすると,  $\pi(G) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ , 秋山, 吉村 [6]

$$\tilde{\pi}(K_m) = \left\lfloor \frac{m}{3} \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor, \quad \tilde{\pi}_1(K_{m,n}) = \begin{cases} \frac{mn}{4} & m, n; \text{ even} \\ \frac{m(n-1)}{4} & m; \text{ even}, n; \text{ odd} \\ \left\lfloor \frac{m(n-1)}{4} \right\rfloor & m \geq n, m, n; \text{ odd} \end{cases}$$

(Chartrand, Geller, Hedetniemi [4])

$$\begin{cases} \tilde{\pi}(L(K_n)) = \binom{n}{3}, \text{ Pereira [8]} \\ \tilde{\pi}(M(K_n)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{6} P^2 (P-1) \right\rfloor & \text{if } P \text{ is odd} \\ \left\lfloor \frac{1}{6} (P+1) P (P-2) \right\rfloor & \text{if } P \text{ is even} \end{cases} \text{ 秋山, 浜田, 吉村 [1]} \\ \tilde{\pi}(T(K_n)) = \binom{n+1}{3}, \text{ Pereira [8]} \end{cases}$$

となる。

## §2 種々のグラフ不変数の定義と例

- ① グラフ  $G$  の *linear arboricity*  $\bar{\alpha}(G)$  は, グラフを *linear-forest* に *line-disjoint* に分割した最小数 (Harary [5]) (Fig.1)
- ② グラフ  $G$  の *point arboricity*  $\alpha_2(G)$  は誘導部分グラフが, *acyclic* になるように,  $G$  の点集合を分割した最小数 (Harary [5]) (Fig.2)
- ③ グラフ  $G$  の *paths (path number)*  $\pi(G)$  は, グラフを *path* で *line-disjoint* に分割する最小数 (Harary [5]) (Fig.3)
- ④ グラフ  $G$  の *apathy*  $\hat{\pi}(G)$  は, *path* でないように, グラフを *line-disjoint* に分割した最大数 (Harary [5]) (Fig.4)
- ⑤ グラフ  $G$  の *cyclicality*  $\theta(G)$  は, グラフ  $G$  を *cycle* に分割し, これが  $G$  を *cover* するような分割の最小個数 (Harary [5]) (Fig.5)
- ⑥ グラフ  $G$  の *unicyclicality*  $U(G)$  は, グラフ  $G$  を *unicycle* グラフに分割し, これが  $E(G)$  を *cover* するような分割の最小数 (Harary [5]) (Fig.6)
- ⑦ グラフ  $G$  の *point linear arboricity*  $\alpha'(G)$  は, 誘導部分グラフが *linear forest* となるように, 点集合を *point-disjoint* に分割した個数の最小数。 (Fig.7)
- ⑧ グラフ  $G$  の *point apathy*  $\alpha'(G)$  は, グラフ  $G$  を誘導部分グラフが *path* にならない *point-disjoint* に分割した最大数 (Fig.8)
- ⑨ グラフ  $G$  の *point-cyclicality*  $\bar{\theta}(G)$  は, グラフ  $G$  を誘導部分グラフが *cycle* であるように 点集合を分割した最小数 (Fig.9)

⑥ グラフ  $G$  の point unicyclicity  $\bar{U}(G)$  は、誘導部分グラフが、unicycle であるように点集合を分割した最小数 (Fig. 10)

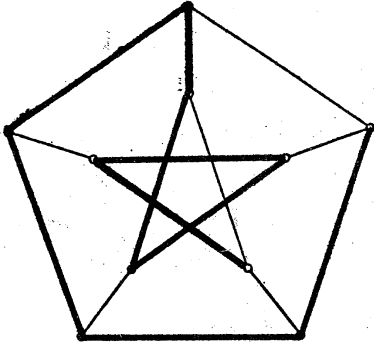


Fig 1  $\bar{U}(G)=2$

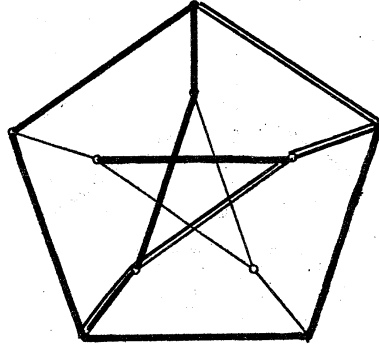


Fig 2  $\pi_2(G)=2$

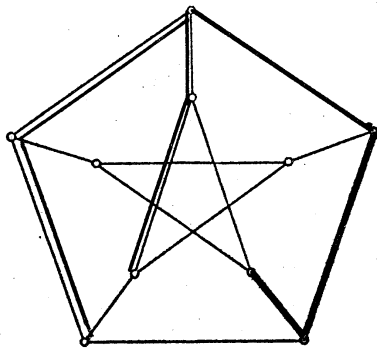
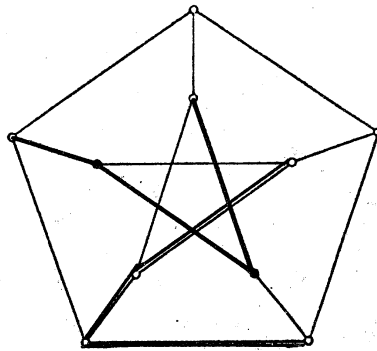
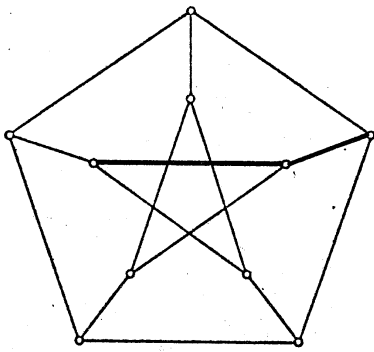


Fig 3  $\pi(G)=5$

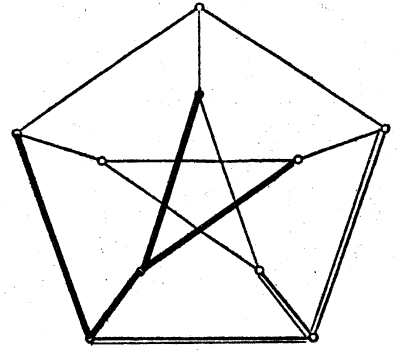
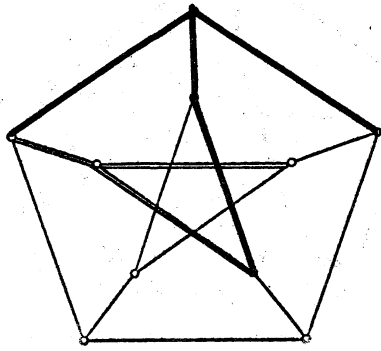


Fig 4  $\tilde{\pi}(G) = 3$

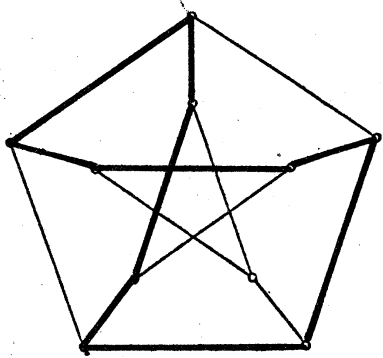
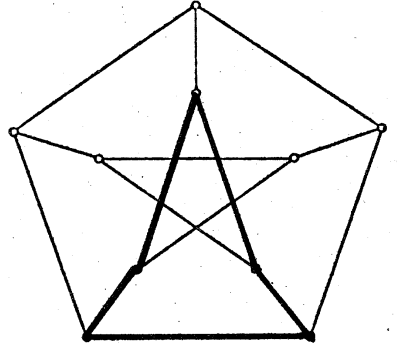
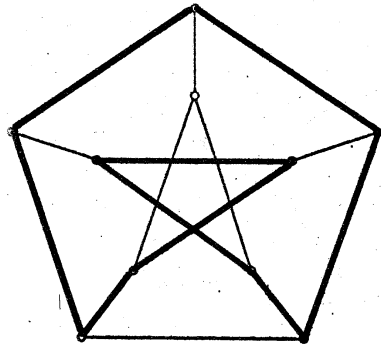


Fig 5  $\mathcal{O}(G) = 3$

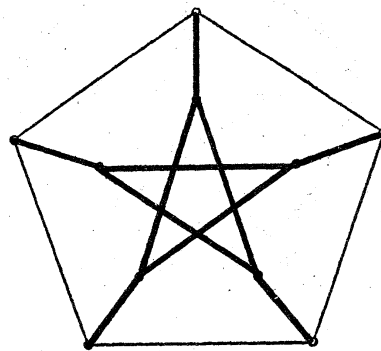
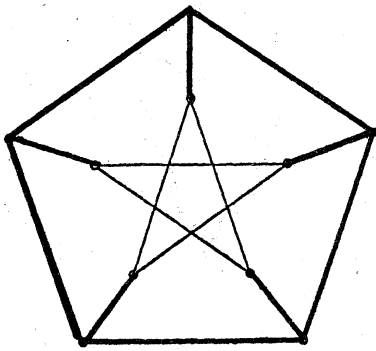


Fig 6  $U(G)=2$

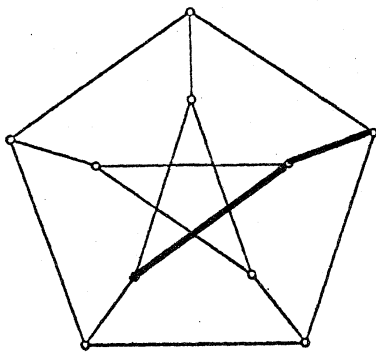
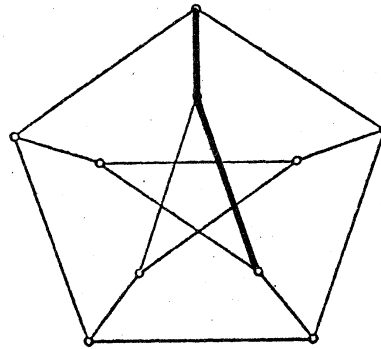
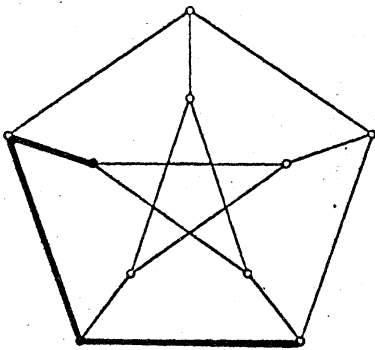


Fig 7  $\pi'(G) = 3$

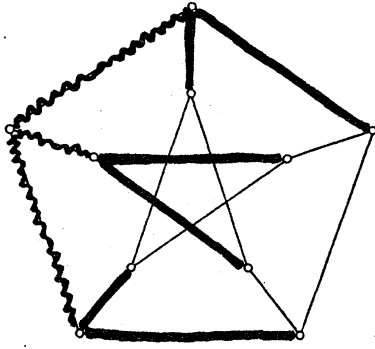


Fig. 8  $\gamma(G)=2$

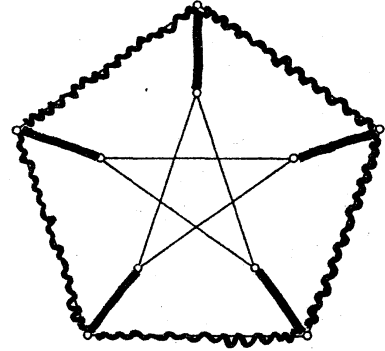


Fig. 9  $\bar{U}(G)=2$

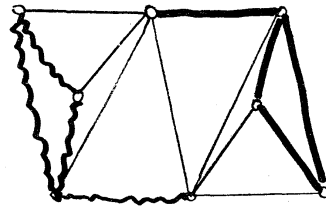


Fig. 10  $\bar{U}(G)=2$

§ 3  $K_{m, n}$  に対する不変数

[I]

<p>Theorem 1</p> <p>1) <math>\bar{\chi}(K_m) = \left\{ \frac{m}{2} \right\}</math></p> <p>2) <math>\bar{\chi}(K_{m, n}) = \left\{ \frac{m + \delta(m, n)}{2} \right\} \quad (m \geq n)</math></p> <p>但し, <math>\delta</math> は Kronecker delta である</p>
--

(Proof)

1) Stanton による [9]

2)  $\bar{\chi}(K_{m, 1}) = \left\{ \frac{m}{2} \right\}$  は容易にわかる。

先づ,  $\bar{\chi}(K_{m, m}) = \left\{ \frac{m+1}{2} \right\}$  を示す。  $V(K_{m, m}) = VUV'$ ,

$V = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $V' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$  とする。  $m$  が even だ

odd の 2 つの場合に分けて考える。

Case 1  $m$ : even

$K_{m, n}$  は, 次のように  $\frac{m}{2}$  個の line-disjoint & spanning cycle に分けられる。  $C_i = v_1 v_{2i+1} v_2 v_{2i+2} \dots v_j v_{2i+j} \dots v_m v_{2i+m}$  ( $i=1, \dots, \frac{m}{2}$ )。但し, subscript は modulo  $m$  とする。

この場合から

$$P_i = C_i - \{v_{\frac{m}{2}-i+1}, v'_{\frac{m}{2}+i}\} \quad (i=1, \dots, \frac{m}{2})$$

$$P_0 = \bigcup_{i=1}^{\frac{m}{2}} \{v_{\frac{m}{2}+1-j}, v'_{\frac{m}{2}+j}\}$$

という形の path がある。(Fig 11)



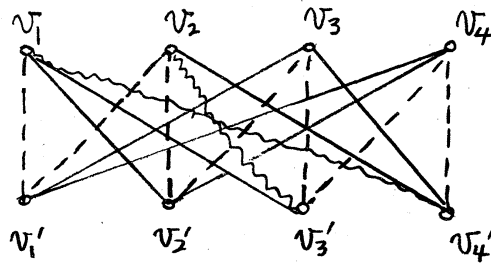


Fig. 11

それぞれのカイクルから1本の線を除いたもの全体は point-disjoint な  $K_2$  の族となる。故に  $\bar{\chi}(K_{m,m}) = \frac{m}{2} + 1 = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ 。

Case 2  $m$ : odd

同様にして、 $K_{m,m}$  は

$$C_i = v_1 v'_{2i+1} v_2 v'_{2i+2} \dots v_j v'_{2i+j} \dots v_m v'_{2i+m} \quad (i=1, \dots, \frac{m-1}{2})$$

$$P = \bigcup_{i=1}^m \{v_i, v'_i\}$$

と  $i$  line-disjoint に cover できる。但し subscript は modulo  $m$  とする。

これらのカイクルから

$$P_i = C_i - \{v_{\frac{m-1}{2}-i+1}, v'_{\frac{m-1}{2}+i}\} \quad (i=1, \dots, \frac{m-1}{2})$$

$$P_0 = \bigcup_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \{v_{\frac{m-1}{2}-i+1}, v'_{\frac{m-1}{2}+i}\}$$

という  $\frac{m}{2}$  の path を得る。(Fig. 12)

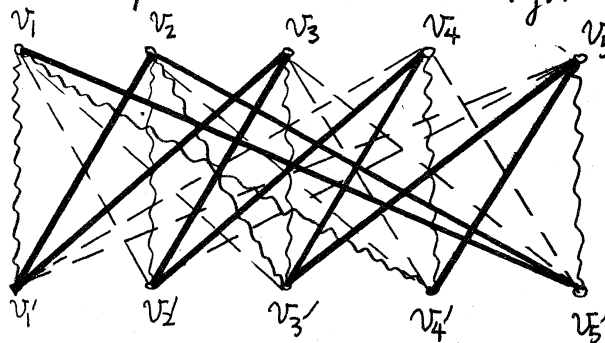


Fig. 12

$P_0$  は point-disjoint な path の族 とおき、  $\frac{m-1}{2} + 1$  個の line-disjoint な linear forest ができる。従って

$$\bar{\Gamma}(K_{m,m}) = \left\{ \frac{m+1}{2} \right\}$$

次に、 $m \geq n$  の場合には、 $K_{m,1} \subset K_{m,n} \subset K_{m,m}$  となるので

$$\bar{\Gamma}(K_{m,1}) \leq \bar{\Gamma}(K_{m,n}) \leq \bar{\Gamma}(K_{m,m}).$$

Case 1  $m$ : odd  $\bar{\Gamma}(K_{m,1}) = \bar{\Gamma}(K_{m,n}) = \bar{\Gamma}(K_{m,m})$

Case 2  $m$ : even

$K_{m,m}$  は (\*) のように line-disjoint な cycle に分割できる。 $K_{m,m}$  から  $v_m$  を除くと

$$P_i = C_i - (\{v_{2i+m-1} v_m\} \cup \{v_m v_{2i+m}\}) \quad (i=1, \dots, \frac{m}{2})$$

の形の  $\frac{m}{2}$  個の line-disjoint な path に分割できる。

従って、 $\bar{\Gamma}(K_{m,m-1}) = \frac{m}{2}$

故に、 $\bar{\Gamma}(K_{m,1}) = \bar{\Gamma}(K_{m,n}) = \bar{\Gamma}(K_{m,m-1}) = \frac{m}{2}$

$$(1 \leq n \leq m-1)$$

$$\bar{\Gamma}(K_{m,m}) = \frac{m}{2} + 1$$

よって  $\bar{\Gamma}(K_{m,n}) = \left\{ \frac{m + \delta(m,n)}{2} \right\} \quad (m \geq n)$

(q. e. d)

III] 次に point arboricity と linear arboricity の関係を述べる。

Theorem 2 任意のグラフ  $G$  に対して  
 $\pi_1(L(G)) = \pi_2(L(G)) = \bar{\Gamma}(G)$

(Proof) 明らかに  $\pi_2(L(G)) \leq \bar{I}(G)$  である。

$$V(L(G)) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad (V_i, j=1, \dots, r, i \neq j),$$

$\langle V_i \rangle$  : acyclic

のように  $V(L(G))$  を分ける。このとき、 $\langle V_i \rangle$  の点の maximal degree が 2 以下であることを示そう。(i=1, ..., r):

もし、そうでないとすると、次数が少なくとも 3 の点  $v_i$  が  $\langle V_i \rangle$  に存在することになる。これは、Beineke [2] の禁出語等部分グラフ  $K_{1,3}$  を含むので、 $\langle V_i \rangle$  は線グラフではあり得ない。

従って、 $\langle V_i \rangle$  の各成分は孤立点かまたは path となり、 $\langle V_i \rangle$  の点に対応する  $G$  の線の集合は linear forest を誘導する。従って  $\pi_2(L(G)) \geq \bar{I}(G)$ 。

(q.e.d)

$$\text{Cor. 1} \quad \pi_2(L(K_m)) = \left\{ \frac{m}{2} \right\}$$

$$\pi_2(L(K_{m,n})) = \left\{ \frac{m + \delta(m,n)}{2} \right\} \quad (m \geq n)$$

(Proof) Thm 1, 2 より明らか。

[III] 完全グラフ  $K_p$  と完全二組グラフ  $K_{m,n}$  の apathy を与える。

$$\text{Theorem 3} \quad \tilde{\pi}(K_p) = \left[ \frac{p(p-1)}{6} \right]$$

(Proof) 明らかに, pathでないグラフはサイクルを含むか,  
あるいは, 次数が少なくとも3である頂点を含むから,

$$\widehat{\pi}(K_p) \leq \left\lceil \frac{1}{3} \left( \frac{p(p-1)}{2} \right) \right\rceil$$

である。

実際には,  $K_p$ が,  $\left\lceil \frac{p(p-1)}{6} \right\rceil$ 個の pathでない部分グラフに  
分割できることを示す。

$V(K_p) = \{v_1, \dots, v_p\}$ とし  $\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil$ 個の3点ずつの組を作る。  
即ち,  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \dots, V_i = \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\}, \dots,$   
 $V_{\lceil \frac{p}{3} \rceil} = \{v_{3\lceil \frac{p}{3} \rceil - 2}, v_{3\lceil \frac{p}{3} \rceil - 1}, v_{3\lceil \frac{p}{3} \rceil}\}。$

この時, 次のような分割をする。(Fig.13)

- 1)  $V_i \cup V_j$  ( $1 \leq i < j \leq \lceil \frac{p}{3} \rceil$ ) を点集合として2組グラフ  $K_{3,3}$   
を考え, これをさらに, 3個の  $K_{1,3}$  に分割する。
- 2)  $V_i$  ( $i=1, \dots, \lceil \frac{p}{3} \rceil$ ) を点集合として完全グラフ  $K_3$  に分割  
する。明らかに, これは, *line-disjoint* な分割を与える。

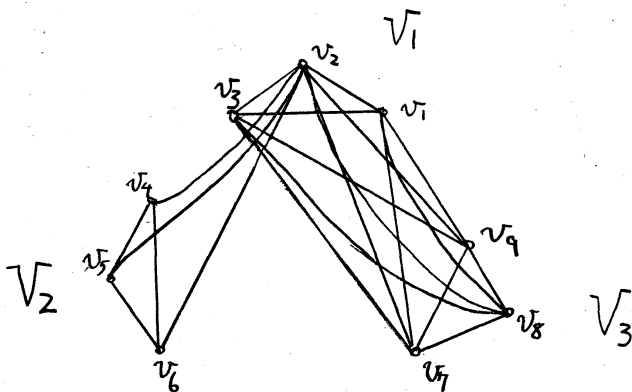


Fig.13

$P \equiv 0 \pmod{3}$  のとき。上記の分割により  $K_P$  はすべて cover される。故に 3本の線から成る  $\text{apathy } K_3$  及び  $K_{1,3}$  により分割できる。

$P \equiv 1 \pmod{3}$  のとき。上記の分割ののちに残っている線は、 $K_{1,P-1}$  である。(Fig.14)。これは、 $\frac{P-1}{3}$  個の  $K_{1,3}$  に分割できるから  $\text{apathy}$  は、 $\frac{3}{2} \frac{P-1}{3} \left( \frac{P-1}{3} - 1 \right) + \frac{P-1}{3} + \frac{P-1}{3}$   
 $= \left[ \frac{P(P-1)}{6} \right]$  となる。

$P \equiv 2 \pmod{3}$  のとき。まだ残っている線は  $K_{2,P-2} \cup \{v_{P-1}, v_P\}$  である。(Fig.15)。これは  $2 \times \frac{P-2}{2} - 1$  個の  $K_{1,3}$  と 1 個の  $K_{1,4}$  で cover できるので  $\text{apathy}$  は  $\left( \frac{P(P-1)}{2} - 1 \right) \times \frac{1}{3}$   
 $= \left[ \frac{P(P-1)}{6} \right]$  となる。

故に、 $\tilde{\tau}(K_P) = \left[ \frac{P(P-1)}{6} \right]$ 。

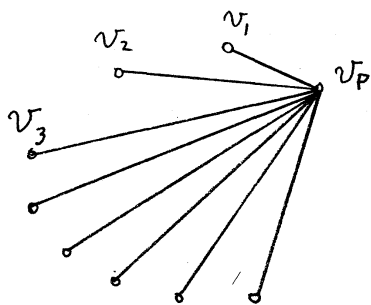


Fig.14

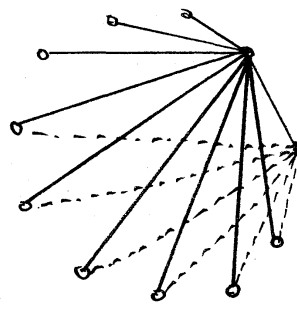


Fig.15

(q. e. d)

**Theorem 4**  $\tilde{\tau}(K_{m,n}) = \left[ \frac{mn}{3} \right]$

(Proof) 明らかに、 $\tilde{\tau}(K_{m,n}) \leq \left[ \frac{mn}{3} \right]$  である。

$m, n$  のどちらか一方に対して, 3 通りに場合分けして考える。今ここでは  $m$  をとる。

イ)  $m \equiv 0 \pmod{3}$  のとき。  $K_{m,n}$  は  $\frac{mn}{3}$  個の  $K_{3,1}$  によって line-disjoint かつ  $K_{m,n}$  を cover するように分割できる。

ロ)  $m \equiv 1 \pmod{3}$  のとき。  $K_{m-1,n}$  はイ)より,  $\frac{(m-1)n}{3}$  個の  $K_{3,1}$  で分割できる。このとき, まだ残されている線は,  $K_{1,n}$  である。(Fig. 16)。これは

(i)  $n \equiv 0 \pmod{3}$  のとき。  $\frac{n}{3}$  個の  $K_{1,3}$  で分割できる。

(ii)  $n \equiv 1 \pmod{3}$  のとき。  $(\frac{n-1}{3} - 1)$  個の  $K_{1,3}$  と 1 個の  $K_{1,4}$  で分割できる。

(iii)  $n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき。  $(\frac{n-2}{3} - 1)$  個の  $K_{1,3}$  と 1 個の  $K_{1,5}$  で分割できる。

(i), (ii), (iii) のいずれの場合も apathy は

$$\frac{(m-1)n}{3} + \left[ \frac{n}{3} \right] = \left[ \frac{mn}{3} \right] \quad \text{である。}$$

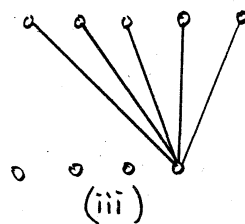
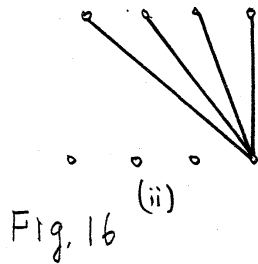
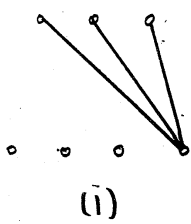


Fig. 16

ハ)  $m \equiv 2 \pmod{3}$  のとき。  $K_{m-2,n}$  をイ)により  $\frac{(m-2)n}{3}$  個の  $K_{3,1}$  で分割する。このとき, 残されている線は  $K_{2,n}$  を作る。(Fig. 17)。これは,

- (i)  $n \equiv 0 \pmod{3}$  のとき。  $\frac{2m}{3}$  個の  $K_{1,3}$  で分割できる。
- (ii)  $n \equiv 1 \pmod{3}$  のとき。  $\frac{2(n-1)}{3} - 2$  個の  $K_{1,3}$  と 2 個の  $K_{1,4}$  で分割できる。
- (iii)  $n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき。  $\frac{2(n-2)}{3}$  個の  $K_{1,3}$  と 1 個の  $C_4$  で分割できる。

いずれの場合も 4 本の線を使う。  $\tau$ -apathy は 2 個以下なので  $\tilde{\pi}_2(K_{m,n}) = \lfloor \frac{mn}{3} \rfloor$ 。

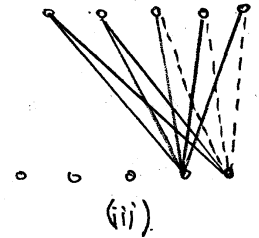
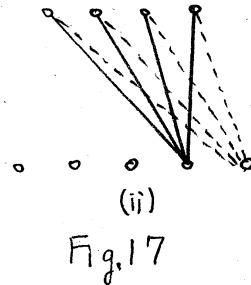
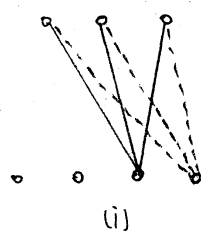


Fig. 17

(q. e. d.)

次に、グラフ  $G$  の point-cycle multiplicity  $\tilde{\pi}_2(G)$  は誘導部分グラフがサイクルをなすように、グラフ  $G$  に line-disjoint 埋め込めることのできる最大個数である。次の命題で point-cycle multiplicity と apathy の関係を述べる。これは、先の point-arboricity と linear-arboricity の関係に類似している。

**Theorem 5** 任意のグラフ  $G$  に対して  $\pi_2(L(G)) = \tilde{\pi}_2(G)$

(Proof)  $L(G)$  で point-disjoint に分割することと、 $G$

で *line-disjoint* に分割することは同値である。

今、 $G$  は *apaths*  $K_i$  ( $i=1, \dots, l$ ) で *cover* されているとする。この  $K_i$  は、次の 2 つのどちらかである。

i) サイクルを含むグラフ。

ii) サイクルを含まず、かつ  $\exists v_0 \in K_i \text{ deg}(v_0) \geq 3$  in  $K_i$  となるグラフ。

いずれの場合も、 $L(K_i)$  を考えれば、長さ 3 以上のサイクルを含むので  $\widehat{\pi}(G) \leq \widehat{\pi}_2(L(G))$ 。

逆に、 $L(G)$  で長さ  $k_i$  の *point-cycle*  $P_i$  ( $i=1, \dots, l$ ) が埋め込まれているとする。 $L(G) = P_i$  なる  $G$  の部分グラフ  $G_i$  を考えれば、

$k_i \geq 4$  のとき、 $G_i$  には長さ  $k_i$  のサイクルが存在し、

$k_i = 3$  のとき、 $G_i$  には  $K_3$  あるいは  $K_{1,3}$  が存在する。

いずれも *apathy* が  $G_i$  に存在するので

$$\widehat{\pi}(G) \geq \widehat{\pi}_2(L(G)) .$$

(q. e. d.)

$$\text{Cor. 2} \quad \widehat{\pi}_2(L(K_p)) = \left\lfloor \frac{p(p-1)}{6} \right\rfloor$$

$$\widehat{\pi}_2(L(K_{m,n})) = \left\lfloor \frac{mn}{3} \right\rfloor$$

(Proof) Thm 3, 4, 5 より明らか。



[IV] 完全グラフ  $K_m$  と完全2組グラフ  $K_{m,m}$  の cyclicity を求める。

Theorem 6 $\theta(K_m) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$
---

(Proof) 1)  $m$ : odd

Harary [6] の定理 9.6 「グラフ  $K_{2m+1}$  は  $m$  個の生成サイクルの和である。」より明らか。

2)  $m$ : even

$K_m$  の各点の次数は  $m-1$  なので,  $\theta(K_m) \geq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor = \frac{m}{2} - 1$  一、Beineke [3] により,  $K_m$  は  $\frac{m}{2}$  個の生成通路に分解される。故に, 線を1本付け加えることにより, サイクルをつくることのできるから,  $\theta(K_m) \leq \frac{m}{2}$ 。よって,

$$\theta(K_m) = \frac{m}{2}$$

(q.e.d)

次の図 (Fig 18) は,  $K_6$  の3個のサイクルによる covering を示している。

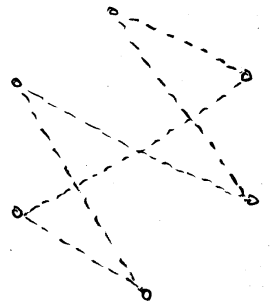
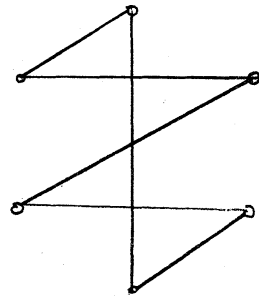
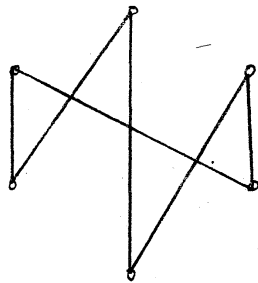


Fig. 18

[V] 完全グラフ  $K_m$  と完全二組グラフ  $K_{m,n}$  の cyclicity を求める。

$$\text{Theorem 7} \quad \varphi(K_{m,n}) = \begin{cases} \left\{ \frac{m}{2} \right\} & n: \text{even} \\ \left\{ \frac{m(n+1)}{2n} \right\} & n: \text{odd} \end{cases}$$

(Proof) 証明省略。

[VI] 完全グラフ  $K_m$  の unicyclicity を求める。

$$\text{Theorem 8} \quad U(K_m) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

(Proof) 証明省略。

[VII] 完全グラフ  $K_m$  と完全二組グラフ  $K_{m,n}$  の point linear arboricity を求める。

$$\text{Theorem 9} \quad \begin{aligned} 1) \quad \pi'(K_m) &= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \\ 2) \quad \pi'(K_{m,n}) &= 2 \end{aligned}$$

(Proof) 1) 完全グラフにおいて path を誘導するには、点  
は2個以下でなければならぬ。

2) 2の孤立点群に分ける。

(q.e.d)

[VII] 完全グラフ  $K_m$  と完全二組グラフ  $K_{m,n}$  の point apathy を求める。

<p>Theorem 10 (1) <math>\mathcal{I}'(K_m) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor</math></p> <p>(2) <math>\mathcal{I}'(K_{m,n}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{m+n}{4} \right\rfloor &amp; m \leq 3n \text{ のとき} \\ n &amp; m &gt; 3n \text{ のとき} \end{cases}</math></p>
---

(Proof) (1) 完全グラフにおいては,  $\alpha, \beta$  に少なくとも 3 点をとれば, apathy が誘導できる。

(2)  $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$   $|V_1| = m, |V_2| = n$  とする。

apathy を誘導するためには点集合の分割の仕方は, 次の 2 つの場合がある。

(1) 一方の点集合から少なくとも 1 点を取り, もう一方の集合から少なくとも 3 点をとる。(  $K_{1,3}$  を誘導部分グラフとして含む。)

(2) 2 つの点集合からそれぞれ少なくとも 2 点をとる。(  $C_4$  を誘導部分グラフとして含む。)

Case 1  $m > 3n$  のとき。

最大個数に分割するには, すべて (1) の手法でとらねばならない (Fig. 19)。故に  $\mathcal{I}'(K_{m,n}) = n$ 。

Case 2  $m \leq 3n$  のとき。

最大個数に分割するには, (1), (2) 両方とも, 少なくとも

も4点と此ほよい。この2つの方法で、 $\lceil \frac{m+n}{4} \rceil$  位に  
分割できることは容易にわかる (Fig. 20)。

故に、 $\bar{\gamma}(K_{m,n}) = \lceil \frac{m+n}{4} \rceil$

(q. e. d.)

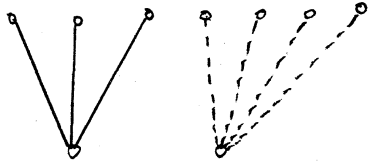


Fig. 19

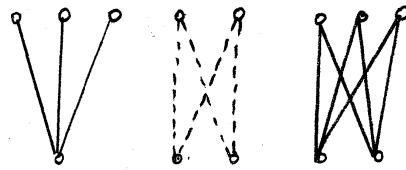


Fig. 20

[IX] 完全グラフ  $K_m$  と完全二組グラフ  $K_{m,n}$  の point  
cyclicity を求める。

<p>Theorem 11 (1) <math>\bar{\theta}(K_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil</math>  (2) <math>\bar{\theta}(K_{m,n}) = \lceil \frac{m}{2} \rceil</math> (<math>m \geq n</math>)</p>
--

(Proof) (1) 点の個数が3のときのみ、cycle を誘導するから、 $\bar{\theta}(K_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$  (Fig 21)。

(2)  $V(G) = V_1 \cup V_2$ ,  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = 2$  とする。(  $m \geq n$  )

2つの点集合から、それぞれ2点を選んだときのみ cycle を誘導する。従って、そのような分割の最小個数は  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$

(Fig 22)。

(q. e. d.)

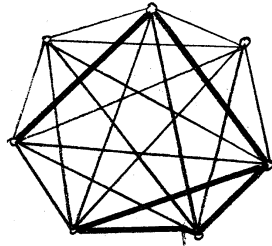


Fig. 21

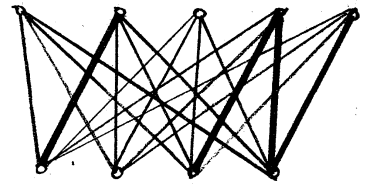


Fig. 22

[X] 完全グラフ  $K_m$  と完全二組グラフ  $K_{m,n}$  の point unicyclicity を求める。

<p>Theorem 12 (1) <math>\bar{U}(K_m) = \left\{ \frac{m}{3} \right\}</math>          (2) <math>\bar{U}(K_{m,n}) = \left\{ \frac{m}{2} \right\} \quad (m \geq n)</math></p>
---

(Proof)  $K_m$  も  $K_{m,n}$  も サイクルでないユニサイクルグラフを点誘導部分グラフとして持たない。故に, unicyclicity は cyclicity と一致する。

## References

- [0] Akiyama, J., Hamada, T.  
The decomposition of line graphs, middle graphs and total graphs of complete graphs into forests (to appear)
- [1] Akiyama, J., Hamada, T., Yoshimura, I.  
Miscellaneous properties of middle graphs, TRU Math.10 (1974)41-53
- [2] Beineke, L.W.  
Derived graphs and digraphs, Beiträge zur Graphentheorie (1968)17-23
- [3] Decompositions of complete graphs into forests, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.9(1964)589-594

- [4] Chartrand, G., Geller, D. and Hedetniemi, S.  
Graphs with forbidden subgraphs, J. Combi.B 10(1971)12-41
- [5] Harary, F.  
Graph theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1969)
- [6] Covering and Packing in graphs I, Annals 175(1970)198-205
- [7] Nash-Williams  
Edge-disjoint spanning trees of finite graphs, J.London  
Math.Soc.36(1961)445-450
- [8] Simões-Pereira, J.M.S.  
A note on the cycle multiplicity of line graphs and total  
graphs, J.Combi.B 12(1972)194-200
- [9] Stanton, R.G., Cowan, D.D., James, L.D.  
Some results on path numbers, Proc. Louisiana Conf. Comb.  
Graph Theory and Computing, Baton Rouge(1970)112-135