数理解析研究所講究録
第335巻 1978年 42-67

細長い物体のおそい運動に対する壁の影響

東大　生研　　成瀬文雄

§1　あらまし

細長い物体のおそい運動に対する壁の影響について、つぎの仮定で研究する。1. 基礎方程式はストークス方程式、2. 物体の形は任意で、代表的長さを l とする。3. 物体の断面の形は任意で（円への写像関数が既知）、その代表的長さを b とする。4. 壁として無限に続く一枚の平面壁を考える。5. 物体の速度 $\mathbb{U}_B(s)$ はストークス近似を許す範囲内で自由に与えられているとする。また物体がないときの速度 $\mathbb{U}(\mathbb{r})$、圧力 $P(\mathbb{r})$ はストークス方程式をみたす範囲内で自由に与えられているとする。ここで s は物体の中心線に沿って基準点から測った長さであり、$\mathbb{r}$ は位置ベクトルである。6. $\kappa(=b/l) \ll 1$ を仮定する。

以上のような仮定のもとに、流れの場を支配する積分方程式を導出する。この積分方程式は一般の場合には $\varepsilon=(\log\kappa)^{-1}$

による展開の形でとかれる。特別の場合には厳密解が存在し、その解は $O(K)$ を無視する範囲内でストークス方程式の解と一致する。ここで d は壁から物体までの代表的距離である。この積分方程式の厳密解が存在する場合として、断面が一様であるリングの運動と微小な生物の平面波動運動の二つの場合がとかれる。

細長い物体のおそい運動に対する壁の影響については、断面が円である直線状物体の場合には Mestre[1]、Katz, Blake & Paveri-Fontana[2] によって研究されているが、いずれも ε による展開の形でとかれ、一枚の壁に平行に動く場合には $O(\varepsilon^3)$ の精度まで、二枚の平行平板間の中心面上で動く場合には $O(\varepsilon^2)$ の精度まで解が得られている。

また微小な生物の平面波動運動の壁効果については、A. J. Reynolds[3]、D. F. Katz[4] などによって研究されているが、いずれも細長い物体ではなく、無限に続く薄いシート状物体の波動運動に対する研究である。

本稿の研究は上記文献と比較して、(i) 求められている解が積分方程式の厳密解であるから、解の精度がよい。(ii) リングに対する壁効果はいままで研究されていない。(iii) 物体の断面の形が任意の形でよい、などに特徴がある。

§2　壁があるときの積分方程式

いま無次元変数として

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^*/U_0 \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^*/l \quad , \quad p = p^* l/\mu U_0 \tag{1}$$

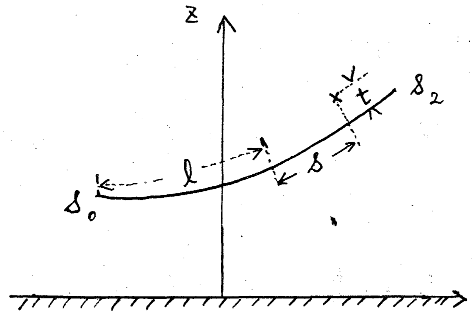
をえらぶとき、ストークス方程式は

$$\Delta \mathbf{q} - \nabla p = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \tag{2}$$

となる。また境界条件はつぎのようになる。

$$\text{物体上} \quad : \quad \mathbf{q} = \mathbf{U}_B(s) \tag{3}$$

$$\text{物体がないとき} : \quad \mathbf{q} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) , \quad p = P(\mathbf{r}) \tag{4}$$



第 1 図

第1図の如く座標系をえらぶ。いま考えている点から物体までの最短距離を t^* とし、

$$t = t^*/l \quad , \quad \bar{t} = t^*/b \tag{5}$$

で定義される t, $\bar{t}$ を導入するとき、$t \sim O(1)$ となる領域が外部領域となり、また $\bar{t} \sim O(1)$ となる領域が内部領域となる。

壁があるときには、壁がないときの同種の運動と比較して、外部解に特徴があるから、外部変数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/l$ とし、外部解をつぎの形で表わす。

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) - \int_{s_0}^{s_2} c(s) \left\{ \frac{\mathbf{l}'(s)}{R} + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{l}(s))\mathbf{R}}{R^3} \right\} ds + \mathbf{q}''(\mathbf{r}) \ , \tag{6}$$

$$p = P(\mathbf{r}) - 2\int_{s_0}^{s_2} c(s)\frac{(\mathbf{l}'(s)\cdot \mathbf{R}(s))}{R^3}\,ds + P''(\mathbf{r}) \qquad (7)$$

ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_B(s)$ で、$\mathbf{R}_B(s)$ は座標原点と ds を結ぶベクトルである。(6),(7) の第1項は物体がないときの場の速度、圧力を表わし、第2項は s 上に強さ、方向とも未定のストークス源 $c(s)\,\mathbf{l}'(s)$ を分布させたときに誘起される速度及び圧力であり、第3項は第2項のストークス源の分布から生ずる壁の上での速度を打消して壁の上での境界条件を満足さすために付加した関数で、勿論ストークス方程式を満たしている速度及び圧力である。

ここでストークス源の方向分布 $\mathbf{l}'(s)$ を

$$\mathbf{l}'(s) = l'(s)\,\mathbf{e}_x + m'(s)\,\mathbf{e}_y + n'(s)\,\mathbf{e}_z\,, \qquad (8)$$

($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は x, y, z 方向の単位ベクトル)

の如く表わすとき、$\mathbf{q}''(\mathbf{r})$ の x, y, z 成分 (u'', v'', w'') は以下の形となる。

$$u'' = \int_{s_0}^{s_2} c(s')\Big[\, l'(s')\Big\{\frac{1}{R'} + \frac{(x-x')^2+2zz'}{R'^3} - \frac{6(x-x')^2 zz'}{R'^5}\Big\} + m'(s')(x-x')(y-y')$$

$$\times\Big(\frac{1}{R'^3} - \frac{6zz'}{R'^5}\Big) + n'(s')(x-x')\Big\{\frac{z-z'}{R'^3} + \frac{6zz'(z+z')}{R'^5}\Big\}\Big]\,ds' \qquad (9)$$

$$v'' = u''\ \ (l' \leftrightarrow m',\ \ x \leftrightarrow y,\ \ x' \leftrightarrow y') \qquad (10)$$

$$w'' = \int_{s_0}^{s_2} C(s')\Big[\, l'(s')(x-x')\Big\{\frac{z-z'}{R'^3} - \frac{6zz'(z+z')}{R'^5}\Big\} + m'(s')(y-y')\Big\{\frac{z-z'}{R'^3} - \frac{6zz'(z+z')}{R'^5}\Big\}$$

$$+ n'(s')\Big\{\frac{1}{R'} + \frac{2z^2}{R'^3} - \frac{(z+z')(z-z')}{R'^3} + \frac{6zz'(z+z')^2}{R'^5}\Big\}\Big]\, ds' \qquad (11)$$

ここで (x, y, z) は $\mathbf{r}$ の x, y, z 成分、(x', y', z') は s' を示すベクトルの x, y, z 成分、

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$$

である。また $l' \leftrightarrow m'$ は (9) 式の u'' の表示の中で、l' を m' に、m' を l' に変更することを意味する。

さて外部解の速度 $\mathbf{q}$ の共通領域における形は、壁がないときの場合[5]と同じように計算して、つぎのようになる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}(s_1) + \Big[4C(s_1)\cos\phi\Big(\log P - \log 2 + \frac{1}{2}\Big)\Big]\mathbf{t} + 2C(s_1)\sin\phi\Big\{(\log P - \log 2)\mathbf{e}_{x'} - (\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_{x'})\mathbf{P}/P^2\Big\} + \mathbf{K}(s_1) + \mathbf{q}''(s_1),$$

ここで

$$\mathbf{K}(s_1) = \Big\{\int_{s_0}^{s_1-\varepsilon'} + \int_{s_1+\varepsilon'}^{s_2}\Big\}\Big[-C(s)\Big\{\frac{\mathbf{l}'(s)}{R} + \frac{(\mathbf{l}(s)\cdot\mathbf{R})}{R^3}\mathbf{R}\Big\}ds\Big] - 4C(s_1)\cos\phi$$

$$\times(\log\varepsilon')\mathbf{t} - 2C(s_1)\sin\phi\,(\log\varepsilon')\mathbf{t} - 2C(s_1)\sin\phi\,(\log\varepsilon')\mathbf{e}_{x'}, \qquad (12)$$

また $\mathbf{q}''(s_1)$ は、(9)〜(11) の x, y, z として、s_1 の x, y, z 座標を代入すれば得られる。(12) 式中で、$\mathbf{P}$ は $\overrightarrow{QP} = \mathbf{P}$（今考えている共通領域の点を P とし、P から物体までの最短距離の点を Q とした）で与えられ、$\mathbf{t}$ は接線方向の単位ベクトル、$\mathbf{e}_{x'}$ は x' 方向の単位ベクトル（x' 方向は $\mathbf{l}'(s)$ を $\mathbf{t}$ に直角な面

に射影したときに得られる方向)、ϕ は $\mathfrak{l}(s)$ と $\mathfrak{t}$ とのなす角、ε' は $l \gg \varepsilon' \gg \rho$ をみたす微小量である。

つぎに内部解は壁がないときの内部解[5), 6)]と同一であるから、壁がないときの場合をそのまま用いることができる。

ここで外部解及び内部解の共通領域におけるマッチングを壁がない場合[5)]と同様に行い、

$$c(s)\,\mathfrak{l}'(s) = \frac{A(s)}{4}\mathfrak{t} + \frac{I(s)}{2}\mathfrak{l}_1 + \frac{J(s)}{2}\mathfrak{j}_1, \tag{13}$$

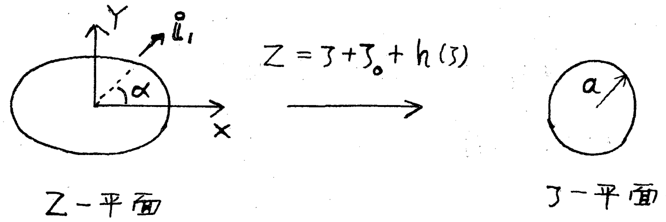
($\mathfrak{t}$ は s における接線方向の単位ベクトル、$\mathfrak{l}_1, \mathfrak{j}_1$ は $\mathfrak{t}$ に直角な面内において互に直交する単位ベクトルで、以下の解析に都合のよい方向をとってよい)

とおくとき、$A(s)$, $I(s)$, $J(s)$ に対するつぎのような積分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&A\left(\lambda' - \tfrac{1}{2} - \log a_1\right)\mathfrak{t} + \left[\left(\lambda' + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(\mathfrak{l}_1) - \log a_1\right)I - c_1(\mathfrak{l}_1)J\right]\mathfrak{l}_1 \\
&+ \left[-c_1(\mathfrak{l}_1)I + \left(\lambda' + \tfrac{1}{2} + \bar{b}_1(\mathfrak{l}_1) - \log a_1\right)J\right]\mathfrak{j}_1 + \mathfrak{U}_B(s) - \mathfrak{U}(s) = \mathbb{K}(s) + \mathfrak{v}''(s), \\
&\text{ここで}\quad \lambda' = \log(2l/b), \\
&\mathbb{K}(s) = \left\{\int_{s_0}^{s-\varepsilon'} + \int_{s+\varepsilon'}^{s_2}\right\}\left[-\frac{\frac{A}{4}\mathfrak{t} + \frac{1}{2}(I\mathfrak{l}_1 + J\mathfrak{j}_1)}{R} - \frac{\left\{\frac{A}{4}(\mathbb{R}\cdot\mathfrak{t}) + \frac{I}{2}(\mathbb{R}\cdot\mathfrak{l}_1) + \frac{J}{2}(\mathbb{R}\cdot\mathfrak{j}_1)\right\}\mathbb{R}}{R^3}\right]ds' \\
&\quad - (A\mathfrak{t} + I\mathfrak{l}_1 + J\mathfrak{j}_1)\log\varepsilon'
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

であり、$\mathfrak{v}''(s)$ は (9)〜(11) の x, y, z に s の (x, y, z) 座標を代入すればよい。また a_1, $\bar{b}_1(\mathfrak{l}_1)$、$c_1(\mathfrak{l}_1)$ は物体の断面の形によって

変化する。いま物体の断面形をZ平面上でえがき、この断面形が寫像関数 $Z=\zeta+\zeta_0+h(\zeta)$ によってζ平面上の半径 a の円に寫像されるとするとき、a_1, $b_1(\mathbb{l}_1)$, $c_1(\mathbb{l}_1)$ は以下の形となる。



第２図

$$\left.\begin{aligned} &a_1=\frac{a}{b}, \quad b_1(\mathbb{l}_1)=-\frac{\gamma}{2}\cos(\beta+2\alpha), \quad c_1(\mathbb{l}_1)=\frac{\gamma}{2}\sin(\beta+2\alpha) \\ &\gamma e^{i\beta}=\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{h(ae^{-i\theta})-ae^{-i\theta}h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}\{1+h'(ae^{i\theta})\}}\,d\theta \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(14)式をといて A, I, J が決定されるとき、ds 部分に働く力 $\mathbb{f}\,ds$ は

$$\mathbb{f}=2\pi\mu U_0 A\,\mathbb{t}+4\pi\mu U_0(I\mathbb{l}_1+J\mathbb{j}_1) \tag{16}$$

で与えられ、物体に働く力 $\mathbb{F}$ 及び原点のまわりのトルク $\mathbb{G}$ は

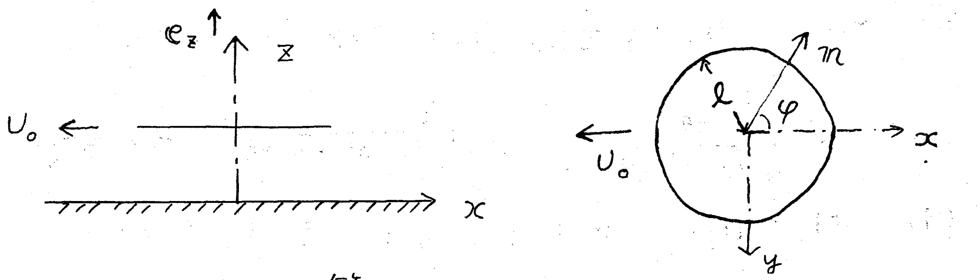
$$\mathbb{F}=l\int_{s_0}^{s_2}\mathbb{f}\,ds, \qquad \mathbb{G}=l^2\int_{s_0}^{s_2}\mathbb{r}(s)\times\mathbb{f}\,ds \tag{17}$$

できまる。

§3. 一様な断面をもつリングの運動

つぎの４つの場合について、積分方程式の厳密解が容易に得られる。

(i) 壁に平行な面内にある一様なリングが壁に平行に動くとき．



第 3 図

上図のように座標軸をえらび、半径 l のリングが U_0 で x 軸の負方向に動く場合について考える。

断面が一様の仮定から $\log a_1 = 0$ ととる。 $\mathbf{l}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_z$ ととって、 (14) の A, I, J に対し

$$\left.\begin{aligned} & A = -\sin\varphi\,\bar{A}\ ,\quad I = \cos\varphi\,\bar{I}\ ,\quad J = \cos\varphi\,\bar{J} \\ & \bar{A},\ \bar{I},\ \bar{J}\ \cdots\cdots\ 一定 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

を仮定し、(8) ~ (11), (14) を用いて $\mathbb{K}$, $\mathbf{q}''$ を求めるとき、

$$\mathbb{K} = -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left[\bar{A}\left(-2\log 2 + \frac{3}{2}\right) - 2\bar{I}\right] + \cos\varphi\,\mathbf{n}\left[\bar{I}(-2\log 2 + 1) - \bar{A}\right] + \cos\varphi\,\mathbf{e}_z\,\bar{J}\,(-2\log 2 + 2), \tag{19}$$

$$\mathbf{q}'' = -\sin\varphi\,\mathbf{t}\left[\bar{A}D_1 + \bar{I}D_2 + \bar{J}D_3\right] + \cos\varphi\,\mathbf{n}\left[\bar{A}E_1 + \bar{I}E_2 + \bar{J}E_3\right] + \cos\varphi\,\mathbf{e}_z\left[\bar{A}H_1 + \bar{I}H_2 + \bar{J}H_3\right] \tag{20}$$

となり、 $D_1, \cdots, H_3$ は第1種及び第2種の完全楕円積分 K, E の関数としてつぎの如く表示される。

$$\left.\begin{aligned} & D_1 = \frac{(1+3d^2)}{\sqrt{1+d^2}}\left[(1+2d^2)K - 2(1+d^2)E\right] , \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}\left[\left(1+\frac{13}{2}d^2 + 6d^4\right)E - d^2\left(\frac{7}{2} + 6d^2\right)K\right] \\ & H_1 = \frac{d}{2\sqrt{1+d^2}}\left[2d^2K - (1+2d^2)E\right] , \quad D_2 = 2E_1 \\ & E_2 = \frac{1}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(2+9d^2+32d^4+24d^6)K - (1+19d^2+44d^4+24d^6)E\right] \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$H_2=\frac{d}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1+7d^2+4d^4)E-d^2(5+4d^2)K\right],\quad D_3=-2H_1$$

$$E_3=-H_2,\quad H_3=\frac{1}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(2+3d^2)K-(1+3d^2)E\right],$$

ここで $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$, $k=\frac{1}{\sqrt{1+d^2}}$

(19), (20) を (14) に代入するとき、$\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ が

$$\bar{A}=A_{11}+A_{12},\quad \bar{I}=A_{21}+A_{22},\quad \bar{J}=A_{31}+A_{32} \qquad (22)$$

のようになる。ここで A_{ij} はつぎのマトリックス T の逆マトリックス T^{-1} の成分である。

$$T=\begin{pmatrix} S-2-D_1 & 2-D_2 & D_3 \\ 1-E_1 & S-\frac{1}{2}-\bar{b}_1-E_2 & -c_1-E_3 \\ -H_1 & -c_1-H_2 & S-\frac{3}{2}+\bar{b}_1-H_3 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

(23) 式で $S=\log(8l/a)$ であり、また a, $\bar{b}_1(k_1)$, $c_1(k_1)$ は (15) を用いて計算できる。(16), (17) より物体に働く力 $\mathbb{F}$ の x 成分 F_x は

$$F_x=\pi L\mu U_0\,(A_{11}+A_{12}+2A_{21}+2A_{22}) \qquad (24)$$

で表わされる。ここで $L\,(=2\pi l)$ は全長である。(22) ~ (24) で表わされる積分方程式の厳密解はかなり複雑である。壁効果がどのような影響を与えるかの大体の模様を知るためには、この解を $\varepsilon=1/\lambda=[\log\frac{2l}{a}]^{-1}$ で展開し、$O(\varepsilon^3)$ を省略した解を調べればよい。この解は

$$F_x = \frac{3\pi L \mu U_0}{S + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\bar{b}_1 - R_1(d)} \tag{25}$$

の形となる。ここで $R_1(d)$ は壁の影響を示す項で

$$R_1(d) = \frac{1}{3(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1+d^2-8d^4-6d^6)E + (3+d^2+5d^4+6d^6)K\right] \tag{26}$$

で表わされる。(25), (26) は、$d \ll 1$ のときには、リングの各素片があたかも2次元物体の1部分を構成していると考えて計算した場合に予想されるような抵抗の増加を示し、$d \gg 1$ のときには、リング全体を3次元物体とみなしたときに期待されるような抵抗の増加を示す。

さて (22) で計算される J は 0 でないから、リングを構成する各要素は z 方向の力をうける。この力は $\cos\varphi$ に比例する形となっているから、z 方向の合力(揚力)は 0 となるが、y 軸のまわりにトルク G_y をうける。このトルク G_y は

$$G_y = -4\pi\mu U_0 l^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, J \, d\varphi = -4\pi\mu U_0 l^2 (A_{31} + A_{32}) \tag{27}$$

ここで A_{31}, A_{32} の一般形は複雑な形をしているから、$O(\varepsilon^3)$ 以上を省略した形で定性的な性質を調べてみることにする。このとき

$$G_y = -\frac{4\pi\mu U_0^2 l (C_1 + H_1 + H_2)}{S^2} \tag{28}$$

となる。ここで

$$H_1 + H_2 = \frac{d^3}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[2(2+d^2)E - (3+2d^2)F\right] \tag{29}$$

であり、$H_1+H_2<0$ であると考えられる。このため $C_1=0$ の場合（断面形が進行方向に関して対称な形をしているとき）には、リングは壁効果のため $G_y>0$ であるようなトルクを受けることになる。

(ii) 壁に平行な面内にある一様なリングが壁に直角に動くとき、

第3図のように座標軸をえらび、リングの速度を $(0,0,-V_0)$ とする。(14) の $\mathbb{l}_1=\mathbb{e}_z$, $\mathbb{j}_1=\mathbb{n}$ ととって、$A=0$, $I=const$, $J=const$ を仮定するとき、

$$\mathbb{K} = (3-2\log 2)J\mathbb{n} - 2\log 2\, I\,\mathbb{e}_z , \tag{30}$$

$$\mathbb{q}'' = (E_4 I + E_5 J)\mathbb{n} + (H_4 I + E_4 J)\mathbb{e}_z \tag{31}$$

が得られる。ここで

$$\left.\begin{aligned} E_4 &= \frac{d}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1-d^2)E + d^2 K\right], \quad E_5 = \frac{1}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(2+11d^2+8d^4)K-(5+15d^2+8d^4)E\right] \\ H_4 &= \frac{1}{2(1+d^2)^{3/2}}\left[(3+5d^2)E + (2+d^2)K\right] \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

である。(26), (27) を (14) に代入し、(i) の場合と同じように計算するとき、リングに働く z 方向の力 F_z は

$$F_z = \frac{4\pi\mu V_0 L\,(S-\frac{5}{2}+\bar{b}_1-E_5)}{S^2-(2+H_4+E_5)S-\frac{5}{4}+3\bar{b}_1-\bar{b}_1^{\,2}+(\frac{5}{2}-\bar{b}_1)H_4-(\frac{1}{2}-\bar{b}_1)E_5+H_4E_5-(C_1+E_4)^2} \tag{33}$$

のように決定できる。また $O(\varepsilon^3)$ を省略するとき (33) は

$$F_z = 4\pi\mu V_0 L \Big/ (S+\tfrac{1}{2}-\bar{b}_1-H_4) \tag{34}$$

となり，(34)式は $d \ll 1$，$d \gg 1$ において定性的に(i)においてのべられたと同じ性質を示す。

(iii) 壁に平行な面内にあるリングが面内で回転するとき

第3図においてリングは z 軸のまわりを角速度 $-\omega_0$ で回転しているとする。長さは l で，速度は $l\omega_0$ で無次元化する。

$A =$ const.，$I = J = 0$ の解があり

$$\mathbb{K} = A\pi\left(-2\log 2 + \frac{3}{2}\right), \quad \mathfrak{g}'' = A D_4 \pi \tag{35}$$

となる。ここで

$$D_4 = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}\left[-2(1+d^2)E + (1+2d^2)K\right] \tag{36}$$

である。これらの式を(14)に代入して A を求め，さらに(16)，(17)よりリングに働く z 軸のまわりのモーメント G_z を計算するとき，次式のようにきまる。

$$G_z = 2\pi\mu l^2\omega_0 L \,/\, (S - 2 - D_4) \tag{37}$$

(iv) 壁に平行な面内にあるリングが面に直角に回転するとき

第3図においてリングが y 軸のまわりを $-\omega_0$ で回転する場合を考える。$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{e}_z$，$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}$ とり、(i)の場合と同じく A，I，J に対し(18)を仮定する。このとき $\mathbb{K}$，$\mathfrak{g}''$ に対する式として，(19)，(20)において I と J を入れかえた式が得られる。これを(14)に代入し、(i)の場合と同じような計算をして，y 軸のまわりのモーメント G_y がつぎのように得られる。

$$G_y = 2\pi\mu l^2 \omega_0 L A_{22} \tag{38}$$

ここで A_{ij} は次のマトリックス T の逆マトリックス T^{-1} の成分である。

$$T = \begin{pmatrix} S-2-D_1, & -D_3 & 2-D_2 \\ -H_1, & S-\frac{3}{2}-\bar{b}_1-H_3 & -c_1-H_2 \\ 1-E_1 & -c_1-E_3 & S-\frac{1}{2}+\bar{b}_1-E_2 \end{pmatrix} \tag{39}$$

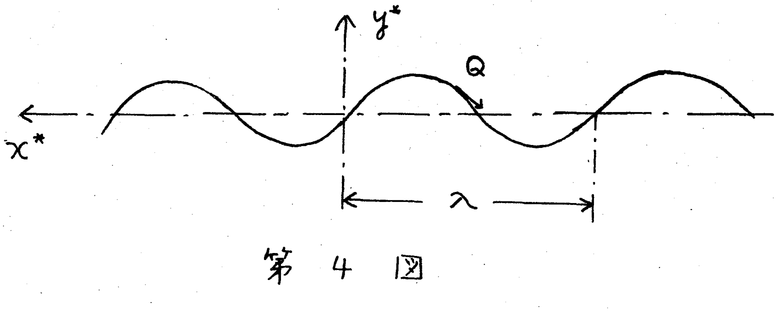
また $O(\varepsilon^3)$ 次以上を省略するとき

$$G_y = 2\pi\mu l^2 \omega_0 L \Big/ \left(S-\frac{3}{2}-\bar{b}_1-H_3\right) \tag{40}$$

が得られる。

§4. 微小な生物の平面波動運動

ここでは無限に続く細長い物体を考える。その断面の形は任意であるが、長さの方向にわたっては一様であると仮定する。第4図の如く座標系を考えて、物体が $y^* = \eta^* \sin k(x^* - Ut^*)$



第4図

で示される平面波動運動をしながら V_A^* の速度で x^* の負の方向に進んでいるとする。長さは $1/k$ で、また速度は U で無

次元化し、無次元量を * をとった量で表わす。いま座標系として波の伝播速度 U で動いている座標系を考えるとき、物体の形は

$$y = \eta \sin x \tag{41}$$

で表わされ、時間的に物体の形は変わらない。このことはこの座標系からみたとき物体の速度が常に接線方向であることを意味し、しかも物体がのびちぢみしないことを仮定するとき、場所にもよらない一定の速度 Q をもつことを意味する。この Q は x 方向への射影速度の平均値が 1 であることから、

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\eta^2\cos^2 x}\; dx \tag{42}$$

のようにきまる。また定常運動の解として、物体に働く力の一波長平均が 0 でなければならない。すなわち

$$\mathbb{F} = \frac{2\pi\mu U}{k}\int_0^{2\pi} (A\mathfrak{h} + 2I\mathfrak{h}_1 + 2J\mathfrak{g}_1)\sqrt{1+\eta^2\cos^2 x}\; dx = 0 \tag{43}$$

をみたす必要がある。

さきに考えられた伝播速度 U で動いている座標系では無限遠点の流れの速度 V_∞ は未定である。この速度 V_∞ が (43) 及び (14) をみたす条件のもとで決定されるとき（このとき壁の速度は V_∞ と同一速度になるように $\mathfrak{g}''$ が考慮されている）、物体は x の負の方向に $V_A = 1 + V_\infty$ の速度で進むことに

なる。

さて上記のような平面波動運動においては、$O(\eta^3)$ を省略するとき、積分方程式 (14) の厳密解が容易に得られる。以下において二つの場合についてこの解をおめる。

(i) Case I：壁に平行な面内で波動運動をするとき

第 5 図

第 5 図の如く座標軸をとり、(14) の A, I, J に対し

$$A = -b'\eta + 2a'\cos 2x\ ,\quad I = -b'\cos x\ ,\quad J = 2e\sin 2x \tag{44}$$

を仮定する。ただし b' は $O(\eta)$ の定数、a', e は $O(\eta^2)$ の定数とする。(44) を (8) ～ (14) に代入するとき、$\mathbb{K}$, $\mathbb{V}''$ はそれぞれつぎのように決定される。

$$\mathbb{K} = \left[2a'(\gamma + \log 2)\cos 2x + \frac{\eta b'}{2}\{1-\gamma + (1+\gamma)\cos 2x\}\right]\mathbf{e}_x - b'\gamma\cos x\,\mathbf{e}_y$$
$$+\ 2e\log(2\gamma)\sin 2x\,\mathbf{e}_z\ , \tag{45}$$

$$\mathbb{V}'' = \left[-\frac{b'\eta}{4}F_2(d) + \cos 2x\left\{\frac{b'\eta}{4}(F_2(d) + F_4(d)\right\} + \frac{a'}{2}F_3(d) - 8d^3 e F_5(d)\right]\mathbf{e}_x$$
$$-\ \frac{b'}{2}\cos x\,F_1(d)\,\mathbf{e}_y + \sin 2x\left[-8d^3\left(\frac{a'}{2} + \frac{b'\eta}{4}\right)F_5(d) + 3b'\eta d^3 F_6(d) + eF_7(d)\right]\mathbf{e}_z\ , \tag{46}$$

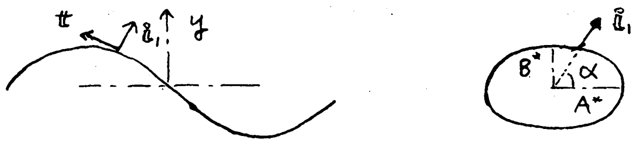
ここで $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ は x, y, z 方向の単位ベクトル、γ はオイラーの定数で、$F_1(d)$, ……, $F_7(d)$ は変形ベッセル関数 $K_n(d)$ を用いてつぎのように表わすことができる

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(d) = 2\left[K_0(2d) + dK_1(2d)\right], \quad F_2(d) = 2\left[K_0(2d) - dK_1(2d)\right] \\
&F_3(d) = 4\left[K_0(4d) - 4dK_1(4d) + 4d^2K_2(4d)\right], \quad F_4(d) = -8d\left[K_1(4d) - 2dK_2(4d)\right] \\
&F_5(d) = \frac{2}{d}K_1(4d), \quad F_6(d) = \frac{1}{6d^2}\left[K_2(2d) - 4K_2(4d)\right], \quad F_7(d) = 2\left[K_0(4d) + 2dK_1(4d)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

(44) の形は (43) をすでにみたしているから、(45), (46) を (14) に代入して得られる4つの方程式（x によらない項、$\cos x$ の係数、$\cos 2x$ の係数、$\sin 2x$ の係数をそれぞれ 0 とおく）から a', b', c, V_∞ を決定することができる。このようにしてきめられた V_∞ を用いて微小な生物の前進速度 V_A は

$$V_A = 1 + V_\infty \doteqdot \frac{\eta^2}{2}\,\frac{\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma + \bar{b}_1(\ell_1) - \frac{1}{2}F_2(d)}{\lambda' + \frac{1}{2} - \gamma - \bar{b}_1(\ell_1) - \frac{1}{2}F_1(d)} \qquad (48)$$

のようになる。ここで $\lambda' = \log(2/a\kappa) = \log(\lambda/a\pi)$（$\lambda$ は波長）、a と $\bar{b}_1(\ell_1)$ とは物体の断面の形によって変わり、断面の形が



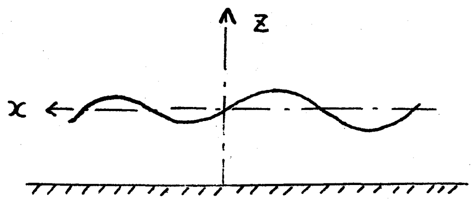
第 6 図

第6図に示される楕円のときには、

$$a = \frac{A^* + B^*}{2}, \qquad \bar{b}_1(\ell_1) = -\frac{A^* - B^*}{2(A^* + B^*)}\cos(2\alpha)$$

となる。また $F_1(d)$, $F_2(d)$ の項は壁の影響を表わし、(47) で与えられている。

(ii) Case II：壁に直角方向に振動するとき



第 7 図

第 7 図の如く、x-z 平面で波動運動をする場合で、この場合は Case I と比較してやや複雑となる。いま

(14) の A, I, J に対し

$$A=-b'\eta+e\sin x+2a'\cos 2x\,,\quad I=-b'\cos x+2h\sin 2x\,,\quad J=0 \tag{49}$$

を仮定し、b', e は $O(\eta)$ の定数、a', h は $O(\eta^2)$ の定数とする。(i) の場合と同じようにして $\mathbb{K}$, $\mathfrak{q}''$ を計算するとき、

$$\begin{aligned}\mathbb{K}=&\Big[\frac{b'\eta}{2}\{(1-\gamma)+(1+\gamma)\cos 2x\}+2a'\cos 2x(\gamma+\log 2)+e\gamma\sin x\Big]\mathbf{e}_x\\&+\Big[-b'\gamma\cos x+2h\gamma\sin 2x+\frac{1}{4}e\eta(-1+2\gamma+3\log 2)\sin 2x\Big]\mathbf{e}_z\,,\end{aligned}\tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}''=&\Big[\frac{b'\eta}{4}H_1-2d^2b'K_1(2d)+\frac{e}{4}d\eta\Big(H_2-\frac{1}{d^2}\Big)+\frac{e}{4}\sin x\,H_3+\cos 2x\Big\{\Big(\frac{a'}{2}+\frac{b'\eta}{4}\Big)H_5\\&-\frac{e}{4}d\eta(H_2+H_6)+\frac{b'\eta}{4}(-H_1+H_7)-16d^2K_1(4d)\Big(h+\frac{1}{8}e\eta\Big)\Big\}\Big]\mathbf{e}_x\\&+\Big[\cos x\Big\{ed^2K_1(2d)-\frac{b'}{2}H_4\Big\}+\sin 2x\Big\{-16d^2K_1(4d)\Big(\frac{a'}{2}+\frac{b'\eta}{4}\Big)-\frac{e\eta}{8}(H_8+H_9)\\&+\frac{b'\eta}{2}d(H_{10}+H_{11})+\Big(h+\frac{1}{8}e\eta\Big)H_{12}\Big\}\Big]\mathbf{e}_z\\&\text{ここで}\\&H_1=-2(1-2d^2)K_0(2d)-2dK_1(2d)\,,\quad H_2=4K_0(2d)-\frac{2}{d}(1+d^2)K_1(2d)\\&H_3=4(1+d^2)K_0(2d)-4dK_1(2d)\,,\quad H_4=2(1+2d^2)K_0(2d)+6dK_1(2d)\\&H_5=4\{(1+4d^2)K_0(4d)-6dK_1(4d)\}\,,\quad H_6=16K_0(4d)-\frac{4}{d}(1+4d^2)K_1(4d)\\&H_7=-4(1+8d^2)K_0(4d)+8dK_1(4d)\,,\quad H_8=2(1+2d^2)K_0(2d)-2dK_1(2d)\\&H_9=-4(1-8d^2)K_0(4d)-8dK_1(4d)\,,\quad H_{10}=4K_0(2d)+\frac{2}{d}(2+d^2)K_1(2d)\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

$$H_{11} = 4K_0(4d) + \frac{2}{d}(1+8d^2)K_1(4d), \qquad H_{12} = 2(1+8d^2)K_0(4d) + 12d\,K_1(4d) \;)$$

のように求まる。いま (50)、(51) を (14) に代入して得られる5つの方程式から、a', b', e, h, V_∞ を決定することができる。このようにしてきめられた V_∞ を用いて、V_A はつぎのようになる。

$$V_A = \frac{\eta^2}{2}\,\frac{(\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{4}H_3)(\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma + \frac{1}{2}H_1 + \bar{b}_1) - d\,K_1(2d)\,(d^2H_2 - 1)}{(\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{4}H_3)(\lambda' + \frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{2}H_4 - \bar{b}_1) - 2d^4K_1^2(2d)} \tag{52}$$

(iii) 線虫の運動の観測値との比較

実際の微小な生物の運動においては、その長さは無限に続くのではなく一波長から二波長位にとどまることが多い。このように長さが有限のときには積分方程式 (14) は厳密解を求めることがむつかしく、ε による展開でとかねばならない。$O(\varepsilon^3)$ を省略するとき、このような解が求められる。[7),8)] その解を用いて、無限に続く場合の前進速度と長さが有限である場合の前進速度を比較することができる。この比較によれば、一波長か二波長程度の長さの波動運動による速度は、無限に続くときと比較して数%程度小さくなる。現在の観測精度から考えられば、この程度の誤差はあまり問題とならないので、実際の観測結果との比較に、長さが無限に続く場合の結果を用いることにする。

現在考えられている線虫の平面波動運動の観測値では、

ηは1程度である。ηが1付近である場合の前進速度は、近似的につぎのようにして(48)及び(52)から構成される。(48)、(52)のη^2を$f(\eta)$でおきかえる。この$f(\eta)$は$\lambda' \to \infty$ときにηの前進速度に及ぼす影響を与える関数とする。そのとき$f(\eta)$は次式で与えられる。

$$f(\eta) = \int_0^{2\pi} \frac{\eta^2 \cos^2 x}{(1+\eta^2\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}} dx \Big/ \int_0^{2\pi} \frac{1+2\eta^2\cos^2 x}{(1+\eta^2\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}} dx \qquad (53)$$

この式は$\eta \fallingdotseq 1$で

$$f(\eta) = \eta^2 \big/ 1+\eta^2 \qquad (54)$$

でおきかえてよい[8]。このようにするとき(48)と(52)は

Case I:

$$V_A = \frac{\eta^2}{2(1+\eta^2)} \frac{\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma + \bar{b}_1(a_1) - \frac{1}{2}F_2(d)}{\lambda' + \frac{1}{2} - \gamma - \bar{b}_1(a_1) - \frac{1}{2}F_1(d)} \qquad (48')$$

Case II:

$$V_A = \frac{\eta^2}{2(1+\eta^2)} \frac{(\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma - \frac{H_3}{4})(\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma + \frac{H_1}{2} + \bar{b}_1) - d K_1(2d)(d^2 H_2 - 1)}{(\lambda' - \frac{1}{2} - \gamma - \frac{H_3}{4})(\lambda' + \frac{1}{2} - \gamma - \frac{H_4}{2} - \bar{b}_1) - 2d^4 K_1^2(2d)} \qquad (52')$$

のようになる。(48')または(52')は、ηが1とくらべて大きいときには精度のよい結果が期待できないかも知れないが、(48)と(52)が有効なηの範囲($\eta < 0.5$)に比較的近い$\eta \fallingdotseq 1$付近ではよい精度の結果が期待できる。

さて線虫の運動に対する観測結果[8]と、計算結果を比較して見よう。まず観測値として、振幅η、断面の大きさの尺度aと波長λの比、前進速度$(V_A)_{ob}$を、つぎに計算値として、

上記の η、a/λ を用い、壁がないとしかつ断面が円 ($\bar{b}_1 = 0$) として計算したときの前進速度 V_{A0} を、最後に $(V_A)_{ob}/V_{A0}$ を表Ⅰに示す。表Ⅰで示されるように観測値の方が計算値より

表 Ⅰ

	η	a/λ	$(V_A)_{ob}$	V_{A0}	$(V_A)_{ob}/V_{A0}$
例1	0.77	0.029	0.37	0.122	3.03
例2	0.93	0.016	0.24	0.166	1.45
例3	1.07	0.021	0.305	0.184	1.66

も大きくなっている。この観測値と計算値のずれを壁効果及び断面の変形によってどの程度説明できるかを試みて見よう。

まず壁効果の影響を見るため、断面は円として (48′) 及び (52′) を用いて計算された V_A と壁がないとして計算された V_{A0} との比を第8図に示す。この図からつぎのことが分る。観測された運動が Case Ⅱ のような運動をしているときには、観測値は、例1を除いて、断面を円として壁効果で説明できそうであるが、Case Ⅰ のような運動をしているときには、観測値は説明できそうになり。いま線虫の運動において、波長 λ とか振幅 η などを観測するためには Case Ⅰ のように運動していると考える方が好都合と思われる。したがって観測値を、Case Ⅰ のような運動をしていると仮定して説明しようとするときには、壁の影響だけでは不十分で、物体の変形を考慮する必要があ

る。いま試みに Case I で物体の断面を楕円とし、しかも長軸の長さが短軸の長さの3倍であるような楕円と仮定しよう。このとき(48′)でどのような結果が得られるかを第9図に示す。此の図から、物体の断面が上述のような楕円に変形していると考えるときには、観測値の例2、例3は、壁からの距離 d が $d/\lambda \sim 0.1$ をみたす位置を運動していると考えて、(48′)式で説明できそうに思われる。

さて線虫が壁からどの程度離れて運動しているかの観測資料は得られてないから、実際にはどの程度円から変形しているかを予測することはむつかしい。もし $d/\lambda < 0.1$ のところを運動しているなら、円からの変形はもっと少くてよいと考えてよい。

§5. まとめ

細長い物体のおそい運動に対する壁の影響を調べるために、リングの運動と微小な生物の平面波動運動の二つの運動の壁効果を積分方程式の厳密解を求めて研究した。

リングの並進運動や回転運動に対する壁効果の研究は実用的な面ではレオロジーの分野でその利用が期待される。また微小な生物の平面波動運動に対する壁効果の研究は、線虫などの運動の観測結果と従来の計算結果[8)]のずれをどの程度説

明できるかを解明するために必要な研究である。上記のような必要性の他に、本稿の研究は積分方程式の厳密解として精度のよい解が得られていることに価値がある。その理由はつぎのことにある。一般の場合、上にのべられた積分方程式は厳密解をみつけることがむつかしく、εの展開によってとかれねばならない。εの展開によってとかれた解の精度を知るために、これらの厳密解は有用な役割を果すことが期待される。

リングの壁に平行な運動において、リングにトルクが働くことが§3でのべられた。このことは定性的には、ストークス源が周囲の物体にどのような力を与えるかを、壁の存在を考慮して議論することによっても理解することができる。いま微小な生物の運動に対してこのような定性的議論を試みてみよう。頭部と有限の長さの尾部(べんも)をもつ微小な生物が壁の近くで平面波動運動をしながら壁に平行に進んでいるとする。頭部や尾部をストークス源でおきかえ、上述のような定性的考察をすることによって、この物体は揚力、しかも壁の方へ物体を近づけるような揚力をうけることが分る(頭部と尾部は方向反対のストークス源でおきかえられることに注意せよ。リングの場合にトルクが働き、微小な生物の場合に揚力が働く原因はこの点にある)。このような揚力の存在

は、うにの精虫のような頭部をもつ微小な生物が、壁の近くに長く滞在したまま前進運動をつづけることを予想させる。

§4の微小な生物の平面波動運動のところで、観測結果をうまく説明するためには、物体の断面が円から楕円に変形していると考えた方がよいことがのべられた。しかし円からどの程度変形していると考えるべきかは、物体がどの程度壁に近づいて運動しているかによってきまってくるものと思われる。§4の表Iでのべられた線虫の運動が壁からどの程度離れた位置で運動しているかについての観測資料は得られてないから、どの程度の変形が妥当かを推測することはむつかしい。しかし第9図を見て大雑把な推論をするならば、case Iのように運動していると考えて、$d/\lambda \sim 0.1$付近を運動していると仮定するときには、長軸と短軸の比が3程度の楕円、$d/\lambda < 0.1$と仮定するならば、円からの変形はもっと少くてよいものと思われる。

また頭部と有限な長さの尾部（平均して1.3波長程度）をもつうにの精虫の運動の観測結果と頭部と尾部の干渉、壁の影響、物体断面の変形を考慮した計算結果（積分方程式の厳密解ではない。εによる展開の解）とを比較した場合にも、断面の変形について上述と同じような結論が得られている。[7)]

さて細長い物体は全体としての体積が非常に小さいため、

物体が存在しなかつたとき存在すると考えられる速度場をみたすことが小さい。いいかえれば物体表面のすぐ近傍（表面から $O(\kappa)$ 程度の距離のところ、すなわち内部領域）で速度が急速に変化し、物体表面の境界条件をみたすことになる。これは一種の境界層と考えてよく、したがつて物体表面に働く粘性応力並びに表面圧力は $O(\mu U_0/\ell\kappa)$ で、κ が分母にあるため普通の低レイノルズ数の流れで予想される粘性応力、圧力に比して、大きい力が働くことになる。このような力が表面に働くことが、断面の変形の原因の１つ（流体力学的原因）であつてもよいように思われる。

文献

1) N.J. De Mestre : J. Fluid Mech. **58** (1973), 641

2) D.F. Katz, J.R. Blake & S.L. Paveri-Fonta : J. Fluid Mech, **72** (1975), 529

3) A.J. Reynolds : J. Fluid Mech. **23** (1965), 241

4) D.F. Katz : J. Fluid Mech. **64** (1974), 33

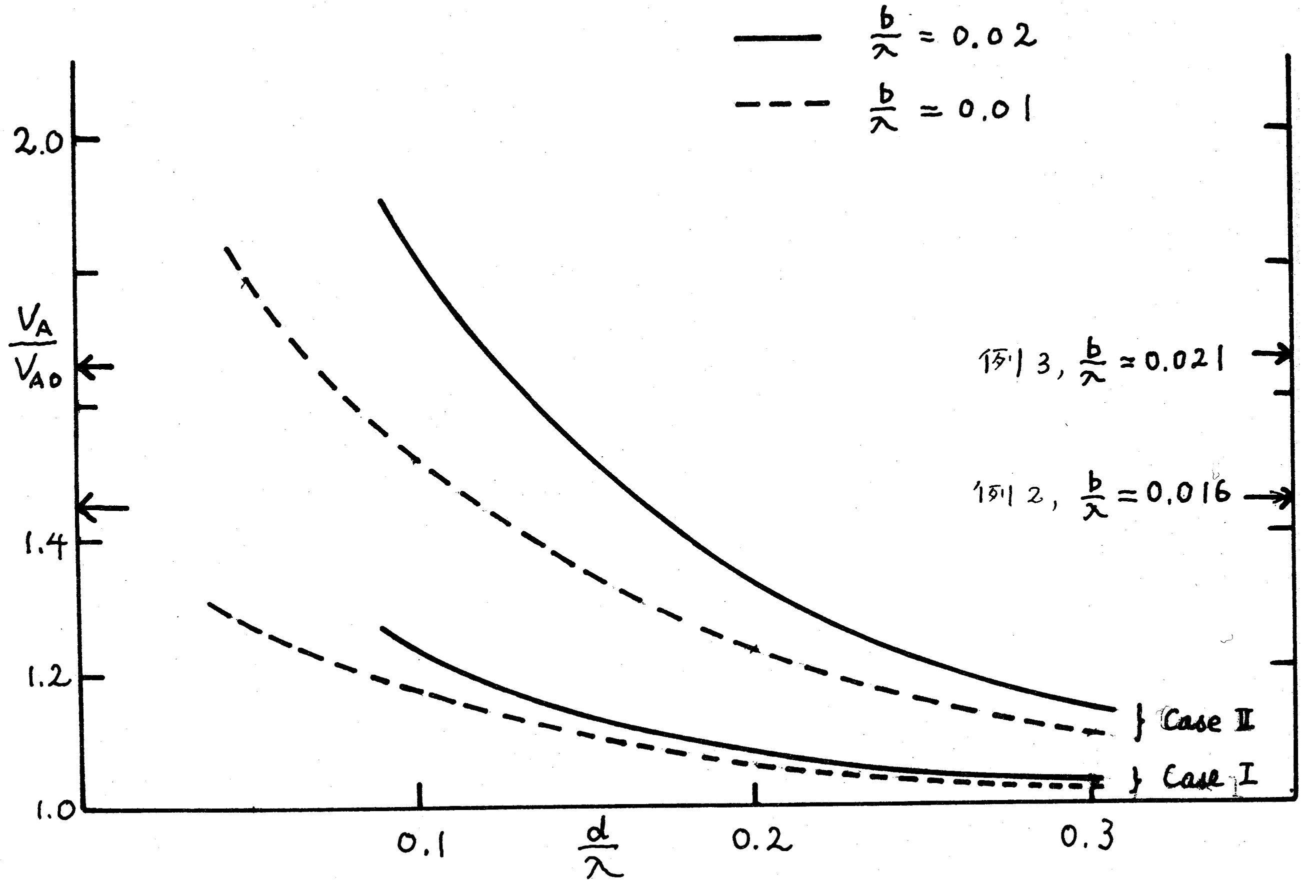
5) 成瀬文雄： 数理解析研講究録 302 (1977), 58

6) 成瀬文雄： 数理解析研講究録 234 (1975), 4

7) 成瀬文雄： 物理学会第32回年会予稿集4, 3 (1977)

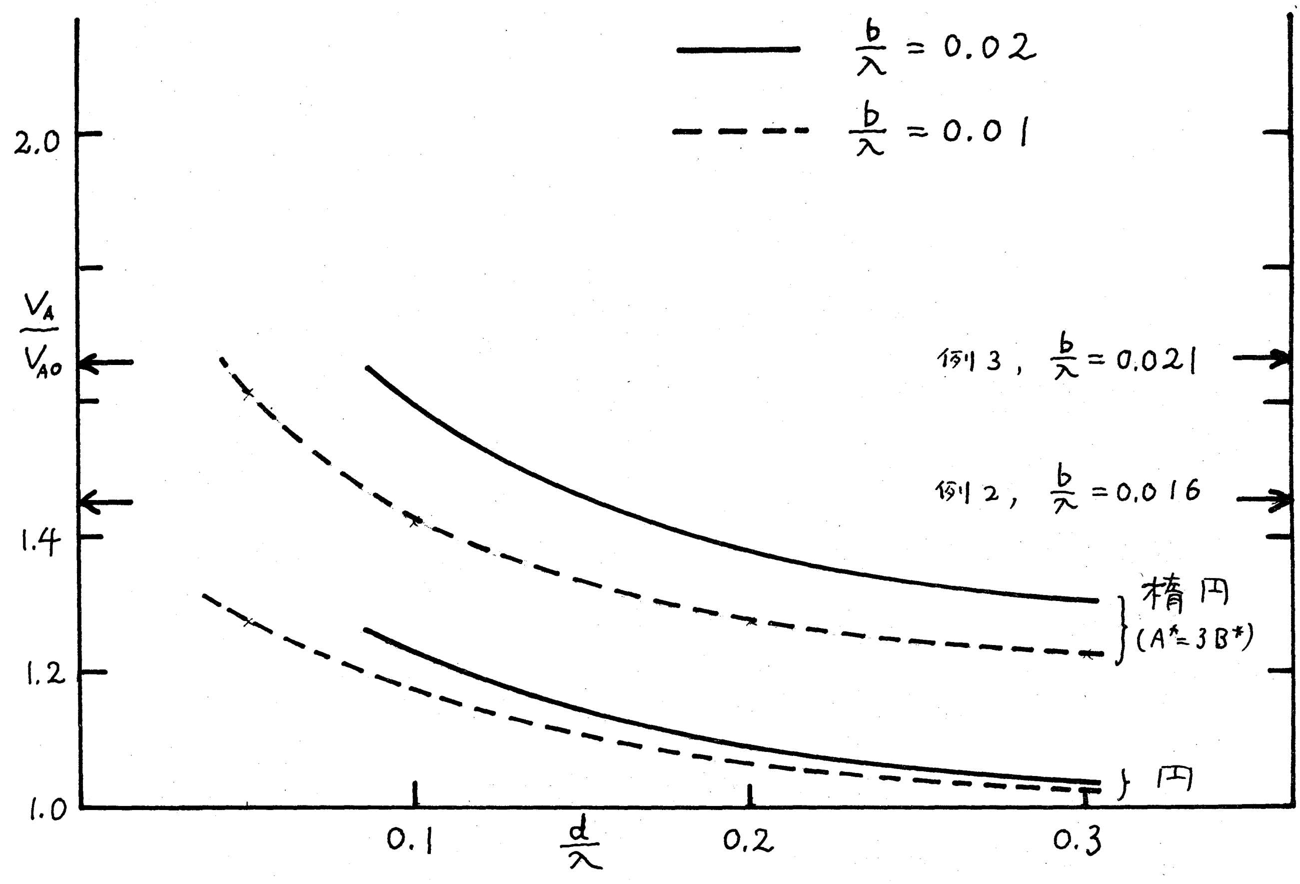
8) G.J. Hancock : Proc. Roy. Soc. A **217** (1953), 96

断面 円　　Case I ,　Case II



第　8　図

断面 円 , 楕円 ($A^* = 3B^*$)   Case I



第 9 図