

一般的固有値問題のためのアルゴリズム

日大 理工 戸川 隼人

問題1 与えられた正定値対称行列 M, C, K に対し

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K) u = 0$$

を満たす固有値 λ , 固有ベクトル u を求める.

問題2 $(\lambda^2 M + K) u = 0$ についての同様な問題.

(ただし $C=0$ の場合に相当).

これらの問題に対し, 各種の解法が提案されてはいるが, ここでは, Householder 変換により, 上記の M, C, K が, 5重対角化 (問題2の場合) または 7重対角化 (問題1の場合) できることを示す. このような前処理をしておけば, Gupta の方法^{注1)} などの計算時間は大幅に短縮できる. また QR 法に接続することも考えられる.

<記号> 細字体の 小文字はスカラー. 太字体の 小文字は列ベクトル. T は転置記号

大文字は行列 ($n \times n$)

注1 K.K. Gupta; Recent Advances in Numerical Analysis of Structural Eigenvalue Problems. in "Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis" Univ. Tokyo Press

問題 2 の 5 重対角化の具体的手順 ($k=1, 2, \dots, n-3$ の順に)

$$S = \sqrt{\sum_{j=k+1}^n m_{kj}^2}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{但し } x_i = \begin{cases} 0 & i \leq k \\ m_{ik} - S & i = k+1 \\ m_{ik} & i \geq k+2 \end{cases}$$

$$C_1 = x^T x \quad C_2 = 2 / C_1$$

$$w = C_2 M x$$

$$C_3 = (1 / C_1) x^T w$$

$$v = w - C_3 x$$

$$\text{新 } M = M - x v^T - v x^T$$

$$w = C_2 K x$$

$$C_3 = (1 / C_1) x^T w$$

$$v = w - C_3 x$$

$$\text{新 } K = K - x v^T - v x^T$$

$$g = C_2 T x$$

$$\text{新 } T = T - g x^T$$

$$S = \sqrt{\sum_{j=k+2}^n k_{kj}^2}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{但し } x_i = \begin{cases} 0 & (i \leq k+1) \\ k_{ik} - S & (i = k+2) \\ k_{ik} & (i \geq k+3) \end{cases}$$

ただし α_k, β_k は次式によって求める.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{l+1,l} & m_{l+2,l} \\ k_{l+1,l} & k_{l+2,l} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -m_{kl} & m_{l+2,l} \\ -k_{kl} & k_{l+2,l} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{l+1,l} & -m_{kl} \\ k_{l+1,l} & -k_{kl} \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \Delta_1 / \Delta \quad \beta = \Delta_2 / \Delta$$

古題1の7重対角化も同じ要領でできる.

(おわびと訂正) 研究集会当日, 算法 I として発表した方法には誤りがありました. つつしんでおわび申しあげ, 取り下げさせていただきます.