

一様分布に基づくチェビシエフ級数展開 と一つの自動積分法

島尾 達生, 長谷川 武夫 (名大工学部)

1. はじめに

有限区間上で滑らかな関数の自動積分法の一つに、被積分関数のチェビシエフ級数展開を項別積分する Clenshaw-Curtis 積分法がある。この方法は収束性、安定性ともよい。高速 cosine 変換 (FFT) を用いれば、演算回数も少なくできる。所要の精度に応じて標本数をなるべく少なく決定したいが、この方法では 2 のべきでしか定められない。

Clenshaw-Curtis 法の特長を生かして、標本数に関する制限を以下のようにゆるめたい。

目的 「区間 $[-1, 1]$ で滑らかな関数 $f(x)$ に対して、等差数列的に標本点を増しながら $f(x)$ の "Chebyshev 有限級数" の列をつくる。この項別積分によって

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx$$

を求める。ここで $w(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で必ずしも正と

は限らな。重み係数

$$\mu_k = \int_{-1}^1 w(x) T_k(x) dx$$

が解析的に陽に求まるか，漸化式で計算できればよい。

正の整数の増え列 $N_0 < N_1 < \dots < N_2 < \dots$ と区間

$[-1, 1]$ に標本点列

$$x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_{N_0}^{(0)}$$

$$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_{N_1}^{(1)}$$

$$\dots$$

$$x_0^{(l)}, x_1^{(l)}, \dots, x_{N_l}^{(l)}$$

を与え， $f(x)$ の補間式の列をつくる。標本点 $\{x_j^{(l)}, 0 \leq j < N_l\}$ を $N_l + 1$ 次のケビシェフ多項式の零点にとれば，収束性，安定性ともよいが，標本点 $x_j^{(l)}$ が l に依存するので各段階で，それ以前の段階の $f(x)$ に関する情報が利用できない。

したがって算法の経済性の立場からいえば， $x_j^{(l)} = x_j$ と標本点は l に依存しないことが望ましい。

算法の基本は次の三点である。

1) 区間 $(0, 1)$ 上に一様分布する Van der Corput 列¹⁾ からケビシェフ分布する点列をつくり，これを標本点に用いる。

2) N 点づつ標本点を追加しながら拡張された意味の N 点ビシエフ補間式の列をつくる. このとき N 項 FFT を用いれば, 演算回数を 1 点づつ追加する場合 (Newton 補間) に比べて $1/N$ に減らすことができる.

3) 上で求めた N 点ビシエフ級数を項別積分する²⁾.

任意の指数関数 a^k ($1 < a < 2$) は, 区分的に直線近似できることから, 前述の方法を標本数を a^k のオーダーで増やす補間過程, 自動積分法に拡張することも可能である.

2 一様分布と単位円周上の補間

n ビットの正の整数 k の 2 進表示

$k = k_1 + k_2 2 + \dots + k_{n-1} 2^{n-1} + 2^n$, $k_i \in \{0, 1\}$
 に対し, k の 2 進逆転と橋勢動により k の共役整数 k^* を

$$k^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \dots + k_{n-1} 2^{-(n-1)} + 2^{-n}, \quad 0^* = 0$$

によって定義する. $[0, 1)$ 上に分布する $\{k^*\}$ は, Vander Input 列とよばれる¹⁾ 一様分布列である. 実際, $\{k^*\}$ から, l 次多項式

$$\omega_l(z) = \prod_{0 \leq k < l} (z - \lambda_k), \quad \lambda_k = e^{2\pi i k^*}$$

を定義すれば, $l = l_1 + l_2 2 + \dots + l_n 2^{n-1}$, $l_n = 1$ のとき

$$\omega_l(z) = \prod_{l_v \neq 0, 1 \leq v < n} (z^{2^{v-1}} + \lambda_{l_v}^{2^{v-1}}) \quad (1)$$

と書けるからである。後の都合上 $\omega_0(z) = 1$ とおく。

この直接的結果として $\omega_\lambda(z)$ の次の諸性質が明らかとなる。

$$\omega_\lambda(\lambda_\nu z) = \lambda_\nu^L \prod_{\lambda \neq \nu} (z^{2^{\nu-1}} + 1) \quad (2)$$

N が 2 のべき乗ならば

$$\omega_{\lambda N}(z) = \omega_\lambda(z^N) \quad (3)$$

単位円周 $|z| = 1$ における $|\omega_\lambda(z)|$ の最大値は、

$$\max_{|z|=1} |\omega_\lambda(z)| = |\omega_\lambda(\lambda_\nu)| = 2^{\sum \lambda_\nu} \quad (4a)$$

半径 $r > 1$ の円周上において

$$\frac{\max |\omega_\lambda(z)|}{\min |\omega_\lambda(z)|} < \frac{r+1}{r-1} \quad (4b)$$

が成り立つ。

上の不等式だけ証明する。簡単のため $\omega_\lambda(\lambda_\nu z)$ をあらためて $\omega_\lambda(z)$ とおけば

$$\omega_\lambda(z) = \frac{z^{2^N} - 1}{(z-1) \prod_{\lambda \neq 1} (z^{2^{\lambda-1}} + 1)}$$

であるから $|z| = r$ 上において

$$|\omega_\lambda(z)| > \frac{r^{2^N} - 1}{(r+1) \prod_{\lambda \neq 1} (r^{2^{\lambda-1}} + 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r-1}{r+1} \prod_{\lambda \neq 0} (r^{2^{\nu-1}} + 1) \\
&= \frac{r-1}{r+1} \max_{|z|=r} |W_\lambda(z)| \quad (\text{証明終})
\end{aligned}$$

一様分布列 $\{k^*\}$ のつくり方は, " $\langle \rangle$ " を考えれば一例を示す.

$$\begin{aligned}
1^* &= 1/2 \\
(2^\ell)^* &= (2^{\ell-1})^* / 2 \\
(2^\ell + j)^* &= (j^* + (2^{\ell-1} + j)^*) / 2, \quad 0 < j < 2^{\ell-1} \\
(2^{\ell+1} - 1 - j)^* &= \overline{(2^\ell + j)^*}, \quad 0 \leq j < 2^{\ell-1} \\
\ell &= 1, 2, \dots \quad (5)
\end{aligned}$$

ただし $\alpha \in (0, 1)$ の 1 に関する補数 $\bar{\alpha}$ を $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ と表わす.

この漸化式から容易に $\lambda_k = e^{2\pi i \alpha k^*}$ に関する漸化式を導くことができる.

単位円周板 $|z| \leq 1$ で解析的な関数 $f(z)$ に対する補間過程を構成する. $N \in \mathbb{N}$ の N とする. 単位円周上の一様分布列 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N, \dots, \lambda_{2N-1}, \dots$ を N 個づつ区切り, 最初の組から補間点として採用する. すなわち N 個づつ点を追加して N 個づつ補間式の列 $L_{\ell N}(f, z)$, $\ell = 1, 2, \dots$ をつくる.

いま $z^N - \lambda_\ell$ の零点は $\lambda_{\ell N + j}$, $0 \leq j < N$ であるから

$$L_{(\ell+1)N}(f, z) = L_{\ell N}(f, z) + W_\ell(z^N) \sum_{0 \leq k < N} A_{\ell, k} z^k$$

よす"は

$$L_{(l+1)N}(f, z) = \sum_{\lambda=0}^l \omega_{\lambda}(z^N) \sum_{0 \leq \kappa < N} A_{\lambda, \kappa} z^{\kappa} \quad (6)$$

と書いてよい。係数 $A_{\lambda, \kappa}$ は、補内条件

$$f(\lambda_{lN+j}) = \sum_{\lambda=0}^l \omega_{\lambda}(\lambda_l) \sum_{0 \leq j < N} A_{\lambda, \kappa} \lambda_{lN+j}^{\kappa} \quad (7)$$

から一意に定まる。左辺の N 項離散型フーリエ変換を

$$A_{\kappa} = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j < N} f(\lambda_{lN+j}) \lambda_{lN+j}^{-\kappa}, \quad 0 \leq \kappa < N \quad (8)$$

とすれば、補内条件 (7) は

$$A_{\kappa} = \sum_{0 \leq \lambda \leq l} \omega_{\lambda}(\lambda_l) A_{\lambda, \kappa}, \quad 0 \leq \kappa < N \quad (9)$$

と変る。したがって、求める係数 $A_{\lambda, \kappa}$ は

$$A_{\lambda, \kappa} = \frac{A_{\kappa}}{\omega_{\lambda}(\lambda_l)} - \sum_{0 \leq \lambda' < \lambda} \frac{\omega_{\lambda'}(\lambda_l)}{\omega_{\lambda}(\lambda_l)} A_{\lambda', \kappa} \quad (10)$$

以上より、補内条件の計算が完了する。この式は、 κ を固定すれば、 l についての補内の差分高の計算と考えられる。

l N 個の係数 $A_{\lambda, \kappa}$, $0 \leq \lambda < l$, $0 \leq \kappa < N$ を求めるには、必ず複素数乗算回数は、(8) は N 項 FFT を用いれば、(8), (10) より $2 \log_2 N + l$ とする。これは $2N$

が十分大ならば, 1 次づつ追加する場合に比べ, $1/N$ 以下
 である.

補間式の誤差は, 差分商を用いて

$$f(z) - L_{2N}(f, z) = f[z, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2N-1}] \omega_2(z^N) \quad (11a)$$

ある ρ は 適当な $\rho > 1$ をとり

$$= \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|s|=\rho} \frac{\omega_2(z^N)}{(s-z)\omega_2(s^N)} f(s) ds \quad (11b)$$

と複素積分表示できる.

半径 ρ の周周上での $|f(z)|$ の最大値を $M(\rho)$ とすれば, (4a)
 , (4b) を用いることにより

$$\begin{aligned} |f(z) - L_{2N}(f, z)| &< 2^{\sum \lambda_\nu} \cdot \frac{\rho}{\rho-1} \cdot \frac{\rho^{N+1}}{\rho^N-1} \cdot \frac{M(\rho)}{\max_{|s|=\rho} |\omega_2(s)|} \\ &< 2^{\sum \lambda_\nu} \cdot \frac{\rho^{N+1}}{\rho^{2N-1} (\rho-1) (\rho^N-1)} M(\rho) \quad (12) \end{aligned}$$

となる. 右辺の誤差は指数関数的 $O(\rho^{-2N})$ に減少する.

上式は, $f(z)$ の解析性と関連して打切りの誤差が減少する漸
 近的傾向を知るにはよいが, 実際の誤差評価には使えない.

$z=0$ 差分商 (11a) の $z=0$ を中心とするテイラー展開を
 求める. 今 $\lambda_{2N}, \lambda_{2N+1}, \dots, \lambda_{(2+1)N-1}$ を補間点として
 (10) で求めた係数が, (11a) のテイラー展開の係数の近似値

と成る。この対応はフーリエ係数と離散型フーリエ係数の関係に成っている。したがって

$$\begin{aligned} |f(z) - L_{2N}(f, z)| &\approx |\omega_{2N}(z^N)| \left| \sum_k A_{2, k} z^k \right| \\ &\leq 2^{\sum 2^k} \sum_k |A_{2, k}| \\ &\leq 2 \sum_k |A_{2, k}|. \end{aligned} \quad (13)$$

で評価すればよい。しかし N が大ならば、過大評価となるから k による和は、最後の 2~3 項をそればよいであろう。

収束判定に数 $\varepsilon > 0$ を与えたときの補間過程の停止規則として

$$2 \sum_k |A_{2, k}| < \varepsilon \quad (14)$$

を用いればよい。

3. 南区間 $(-1, 1)$ 上でのケイビシエフ補間過程

単位円周上に一様分布する実列を実軸上の区間 $[-1, 1]$ に射影した実列を、ケイビシエフ分布という。これを標本実とする補間式を一般化したケイビシエフ補間式とよぶことにする。一様分布の実列のつくり方には対応してケイビシエフ分布する実列のつくり方も数多く考えられるが、一様性が最もよいとされている Van der Corput 列から次のようにして

つくる. n ビットの自然数 k に対し

$\alpha_k = (k + 2^{n-1})^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \dots + k_{n-1} 2^{-n+1} + 2^{-n-1}$
を定義する. k^* と α_k の違いを例で示す.

k	k^*	α_k	
1	0.1	0.01	= 1/4
2	0.01	0.001	= 1/8
3	0.11	0.101	= 5/8
4	0.001	0.0001	= 1/16
5	0.101	0.1001	= 9/16
6	0.011	0.0101	= 5/16
7	0.111	0.1101	= 13/16

表 1

単位円周上の点列 $\lambda_k = e^{2\pi i k^*}$ は, 原点および実軸に関して対称であるが, $e^{2\pi i \alpha_k}$ は, 原点に関して対称, 実軸に関して非対称であるので, これを実軸に射影した点列

$$\alpha_k = \cos 2\pi \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

は, 原点に関して対称に分布し, お互に相異なる.

三角関数表 (15) の能率的算法を意識して, 漸化式

$$\alpha_{2^l} = \alpha_{2^{l-1}} / 2$$

$$\alpha_{2^l + j} = \alpha_{2^{l-1} + j} - \alpha_{2^l}, \quad 0 < j < 2^{l-1}$$

$$\alpha_{2^{l+1} - j - 1} = \overline{(\alpha_{2^{l-1} + j} + \alpha_{2^l})}, \quad 0 \leq j < 2^{l-1}$$

9 (16)

を示しておく. α_j の定義から

$$\sin \pi \alpha_{2j} = -\cos \pi \alpha_{2j+1}, \quad \sin \pi \alpha_{2j+1} = \cos \pi \alpha_{2j}$$

であるから, 三角関数の半角の公式と加法定理を用い, $\cos \pi \alpha_j$, $1 \leq j < 2^n$ を平方根 n 回, 乗算 2^n 回で求めることができる.

また n エビシエフ分布する実列 $\{x_k\}$ を零点とする多項式

$$\tilde{w}_{\ell-1}(x) = 2^{\ell-1} \prod_{1 \leq k < \ell} (x - x_k), \quad \ell \geq 1$$

$$\tilde{w}_0(x) = 1$$

を定義する. $w_\ell(z)$ の表示 (2) の導出と同様にして

$$\tilde{w}_{\ell-1}(x) = 2^{\sum \ell_\nu} \prod_{\nu=1}^{\ell-1} T_{2^{\nu-1}}(x) \prod_{\nu \neq 0} \{T_{2^{\nu-1}}(x) + T_{2^{\nu-1}}(x_\nu)\} \quad (17)$$

ただし ν の動く範囲は $1 \leq \nu < n$. 以下同様.

を得る. ここで $T_k(x)$, $\prod_k(x)$ は k 次の第 1 種, 第 2 種 n エビシエフ多項式である.

単位円周上に零点をもつ $w_\ell(z)$ の性質 (4a), (4b) に対応して不等式

$$|\tilde{w}_{\ell-1}(w_0 \theta) \sin \theta| \leq 4^{\sum \ell_\nu} \quad (18)$$

が成り立つ.

つぎにパラメータ α を含む高速 cosine 変換法について述べる. α は 1 より小さな正数とする. $N-1$ 次の cosine 級数

$$t(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \theta + \dots + a_{N-1} \cos (N-1)\theta \quad (19)$$

の N 個の標本 $t_{j+d} = t\left(\frac{2\pi}{N}(j+d)\right)$, $0 \leq j < N$ から, 各係数 A_k を求めることが問題である. $\{t_{j+d}\}$ は形式的に N 項実数型 DFT を適用して

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j < N} t_{j+d} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} k(j+d)\right) \quad (20)$$

とおく. λ/τ の実数性より出力 τ は $IN \equiv -1$ 対称となる.

$$A_{N-k} = \bar{A}_k \exp(-2\pi i d) \quad , \quad 0 \leq k \leq N$$

$$\text{ただし} \quad A_N = A_0 \exp(-2\pi i d)$$

この事実と三角関数の逆実直交関係により

$$a_k = \frac{2}{N \sin 2\pi d} \operatorname{Im} \bar{A}_{N-k} \quad , \quad 0 \leq k < N \quad (21)$$

が得られる. $\operatorname{Im} z$ は z の虚数部.

三角多項式 $t(\theta)$ が N sine 級数

$$t(\theta) = a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta + \cdots + a_N \sin N\theta$$

ならば

$$a_k = \frac{2}{N \sin 2\pi d} \operatorname{Re} A_{N-k} \quad , \quad 1 \leq k < N$$

$$a_N = \frac{1}{N \sin 2\pi d} A_0 \quad (22)$$

となる. N が 2 のべき乗ならば, N 項 cosine 変換, sine 変

換に必要な複素乗算回数数は、実数型FFT (20) だけに費やすので $\frac{1}{4} N \log_2 N$ である。

とくに $\alpha = 1/4$ ならば, (21), (22) は中実公式によるフーリエ変換である。

以上準備して閉区間 $(-1, 1)$ における $f(x)$ の補間過程を構成する。標本値 $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N, \dots, x_{2N-1}, \dots$ において, 最初の $N-1$ 点, 以後 N 点づつ追加しながら補間式の列をつくる。それは

$$f(\omega\theta) \sin\theta = \sum_{k=1}^{N-1} A_{0,k} \sin k\theta + \sin N\theta \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_{i-1}(\omega N\theta) \cdot \sum'_{0 \leq k < N} A_{i,k} \cos k\theta \quad (23)$$

と表わし, 係数 $A_{i,k}$ を, 補間条件より決定する。 \sum' は初項を $1/2$ 倍して和をとることを意味する。

まず $A_{0,k}$ は, $f(\omega\theta) \sin\theta$ に対するフーリエ公式による sine 変換によって求める。

$$A_{0,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f(\cos \frac{\pi}{N} j) \sin \frac{\pi}{N} j \sin \frac{\pi}{N} k j \quad (24)$$

これは $A_{i,k}$, $i \geq 1$ の場合である。補間条件は

$$f(\cos \theta_j^e) \sin \theta_j^e = \sum_{k=1}^{N-1} A_{0,k} \sin k \theta_j^e + \sin 2\pi d_j \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_{i-1}(\omega 2\pi d_j) \cdot \sum_{0 \leq k < N} A_{i,k} \cos k \theta_j^e, \quad 0 \leq j < N \quad (25)$$

$$\text{ただし } \theta_j^l = \frac{2\pi}{N} (j + d_l)$$

とす。この \cos 変換を行えば、左辺を A_k で表わす。

$$A_k = \frac{1}{\sin 2\pi d_l} \left(A_{0, N-k} - \cos 2\pi d_l \cdot A_{0, k} \right) + \sin 2\pi d_l \sum_{i=1}^l \tilde{\omega}_{i-1}(\cos 2\pi d_l) A_{i, k} \quad (26)$$

$$A_{0, 0} = A_{0, N} = 0, \quad 0 \leq k < N$$

これを $A_{l, k}$ に関する 2 階微分方程式 $l=1$ のとき $\sin 2\pi d_1 = 1$ $\tilde{\omega}_0(\cos 2\pi d_1) = 1$ であるから $A_{1, k}$ は容易に求まるので $l \geq 2$ の場合を述べなければならない。

$$B_{l-1} = \frac{A_k}{\sin 2\pi d_l} - \frac{A_{0, N-k} - \cos 2\pi d_l A_{0, k}}{\sin^2 2\pi d_l} - A_{1, k}$$

$$B_i = \frac{B_{i+1}}{2(\cos 2\pi d_l - \cos 2\pi d_{l-i-1})} - A_{l-i, k}$$

$$i = l-2, l-3, \dots, 1$$

$$A_{l, k} = \frac{B_1}{2(\cos 2\pi d_l - \cos 2\pi d_{l-1})} \quad (27)$$

$$0 \leq k < N, \quad l = 2, 3, \dots$$

== 各 B_i は、 k に依存するが複雑な式で表わす。

以上により $(-1, 1)$ 上の $f(x)$ の補間過程をつくることに成功した。点 x_1, x_2, \dots, x_{N-1} 上の $f(x)$ の補間式を利

余項は

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \sum_{0 \leq k < N} A_{0,k} \bar{U}_{k-1}(x) + \bar{U}_N(x) \sum_{\lambda=1}^{L-1} \tilde{W}_{\lambda-1}(T_N(x)) \\
 & \cdot \sum_{0 \leq k < N} A_{\lambda,k} T_k(x) \\
 & + \bar{U}_N(x) \tilde{W}_{L-1}(T_N(x)) f[x, x_1, \dots, x_{L-1}]
 \end{aligned} \tag{28}$$

と表示できる。

$L-1$ 階差分商 $f[x, x_1, \dots, x_{L-1}] \in X$ の C 上 C^{∞} シェフ
級数 (離散型) に展開したものが

$$f[x, x_1, \dots, x_{L-1}] \approx \sum_{0 \leq k < \infty} A_{L,k} T_k(x) \tag{29}$$

ただし標本点は $x_{LN}, x_{LN+1}, \dots, x_{(L+1)N-1}$
にほかならない。

閉区間 $[-1, 1]$ で $f(x)$ が解析的ならば, z -平面上の $1,$
 -1 を焦点とする楕円

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2} \leq 1, \quad r > 1$$

の上で解析的としてよい。この境界 C とすれば差分商は

$$f[x, x_1, \dots, x_{L-1}] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-x) \bar{U}_N(z) \tilde{W}_{L-1}(T_N(z))} dz \tag{30}$$

と表現できるので, (17), (18) より剰余項は指数関数

的 $O(r^{-2N})$ で減少することがわかる。

4 閉区間 $[-1, 1]$ 上でのフーリエ補間過程

いままで区間の端点を用いたかったので、両端の点を用いる場合を述べる。このために区間の端点に対応して、 α_0, α_{-1} を適当に定義してやらねばよ。

$$\chi_0 = \cos 2\pi\alpha_0 = -1, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}$$

$$\chi_{-1} = \cos 2\pi\alpha_{-1} = 1, \quad \alpha_{-1} = 0$$

そこで標本点 $\chi_{-1}, \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{2N}, \dots$ によって初めは $N+1$ 点、以後 N 点ずつ増して補間式の列をつくる。

$$f(\cos \theta) = \sum_{0 \leq k \leq N} A_{0,k} \cos k\theta + \sin N\theta \sum_{\lambda=1}^{\infty} \tilde{w}_{\lambda-1}(\cos N\theta) \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} A_{\lambda,k} \sin k\theta \quad (31)$$

と展開できると仮定して、補間条件より各係数 $A_{\lambda,k}$ を定めればよ。 \sum'' は、初項と末項を $1/2$ 倍して和をとることを表す。

まず、初めの $A_{0,k}$, $0 \leq k \leq N$ は $[0, \pi]$ を N 等分した台形公式に基づく高速 cosine 変換が求められる。 $A_{\lambda,k}$ は、閉区間 $(-1, 1)$ の場合と類似の方法で計算できる：

l 段階の補向条件

$$f(\cos \theta_j^l) = \sum_{0 \leq k \leq N} A_{0,k} \cos k \theta_j^l + \rho \sin 2\pi d_l \sum_{i=1}^l \tilde{\omega}_{i-1}(\cos 2\pi d_l)$$

$$\cdot \sum_{1 \leq k \leq N} A_{i,k} \sin k \theta_j^l \quad (32)$$

$$0 \leq j < N, \quad \theta_j^l = \frac{2\pi}{N}(j + d_l)$$

に対し, パラメータ d_l を含む sine 変換を辺に1はじき" = \checkmark 左辺を A_k とおけば"

$$A_k = \frac{A_{0,k} \cos 2\pi d_l + A_{0,N-k}}{\sin 2\pi d_l} + \rho \sin 2\pi d_l \sum_{i=1}^l \tilde{\omega}_{i-1}(\cos 2\pi d_l) A_{i,k} \quad (33)$$

$$1 \leq k \leq N$$

$k=N$ のときは, 右辺第1項を^{1/2}倍した式を用いる.

係数 $A_{l,k}$ は, 前節の差分商の計算 (27) に従って求められるよ.

以上によつて区間 $[-1, 1]$ 上における $f(x)$ の補向式

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq N} A_{0,k} T_k(x) + (1-x^2) \overline{U}_{N-1}(x) \sum_{i=1}^{l-1} \tilde{\omega}_{i-1}(T_N(x))$$

$$\cdot \sum_{1 \leq k \leq N} A_{i,k} \overline{U}_{k-1}(x) + (1-x^2) \overline{U}_{N-1}(x)$$

$$\cdot \omega_{l-1}(T_N(x)) f[x, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{2N-1}]$$

を得る. 最後の項の差分商の第2種4エビシエフ展向係数 $A_{l,k}$ である. (34)

lN 次の補間式を求めるために必要な乗算回数は lN ($\log_2 N + l/2$) である。

5. 自動積分法

区間 $[-1, 1]$ で滑らかな関数の定積分を機械的に求める。前区間 $(-1, 1)$ 上での $f(x)$ の補間式の項別積分によって目的の積分の近似値を計算する。

補間式 (2.8) を項別積分するために、あらかじめ重み係数

$$w_{l,k} = \int_0^\pi \tilde{w}_{l-1}(\cos N\theta) \sin N\theta \cos k\theta \, d\theta \quad (3.5)$$

を計算しておく (求め方は後に述べる)。 k が偶数ならば重み係数は 0 であるから、標本点を N 点ずつ追加することによって積分の近似値の列を得る。

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \sum_{k=1}^{N/2} \frac{2}{2k-1} A_{0,2k-1} \\ \hat{I}_{l+1} &= \hat{I}_l + \sum_{k=1}^{N/2} A_{l,2k-1} w_{l,2k-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$l = 1, 2, \dots$$

lN が 2 のべき乗ならば \hat{I}_l は、^(標本点) $lN-1$ 点の Clenshaw-Curtis 積分に一致する (或 2 種 Gauss-Legendre 級数展開の項別積分)。

重み係数 $w_{l,k}$, $1 \leq l \leq m$, $0 \leq k < N$ は次の漸化式で求めればよい。

$$w_{l,k} = \begin{cases} \frac{2N}{N^2 - k^2} & , \quad k \text{ は奇数} \\ 0 & , \quad k \text{ は偶数} \end{cases}$$

$$0 \leq k < mN$$

$$w_{l+1,k} = w_{l,|N-k|} - 2 \cos 2\pi d_l w_{l,k} + w_{l,N+k}$$

$$0 \leq k < (m-l)N, \quad l=1, 2, \dots, m-1 \quad (37)$$

次に区間 $[-1, 1]$ 上での $f(x)$ の補間式 (34) の項別積分を行なう方法について述べる。再び同じ記号で重み係数

$$w_{l,k} = \int_0^\pi \tilde{w}_{l-1}(\cos \theta) \Delta \sin N\theta \cos k\theta \rho \sin \theta d\theta \quad (38)$$

を定義する。 k が奇数ならば 0 であるから、標本点を N 点づつ追加するごとく、次式で積分の近似値を得る。

$$S_1 = \sum_{k=0}^{N/2} \frac{2}{1-4k^2} A_{0,2k}$$

$$S_{l+1} = S_l + \sum_{k=1}^{N/2} A_{l,2k} w_{l,2k} \quad (39)$$

$$l=1, 2, \dots$$

$2N$ が 2 のべき乗ならば、積分区間の端点における標本点を使用した Clenshaw-Curtis 積分となる。

重み係数は、開いた積分公式の場合と同様に (2, 次の漸化式によって、あらかじめ計算しておく。

$$w_{l,k} = \begin{cases} 0 & , k \text{ は奇数} \\ -4Nk / \{(N-k)^2 - 1\} \{(N+k)^2 - 1\} & , k \text{ は偶数} \end{cases}$$

$$0 \leq k < mN$$

$$w_{l+1,k} = w_{l,N-k} - 2 \cos 2\pi d_l w_{l,k} + w_{l,N+k}$$

$$たゞし \quad w_{l,N-k} = \text{sgn}(N-k) w_{l,|N-k|}$$

$$0 \leq k < (m-l)N, \quad l=1, 2, \dots \quad (40)$$

被積分関数が $[-1, 1]$ を含む領域で解析的ならば, $\{T_n(x)\}$ は漸進的には指数関数の速さで収束する。係数は, l のごとく計算すればよい。演算回数に, 補内插法の場合の約 $1/2$ である。

6 数値例

被積分関数として, $4x^2 - 3x + 1$ の級数展開が解析的にわかっているものを用いると, 理論と実験が対比しやすい。

例 1

$$\int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} dx = \frac{1-t^2}{t} \log \frac{1+t}{1-t}$$

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} t^k T_k(x)$$

例 2
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{2}{a} \tan^{-1} \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{2}{a\sqrt{1+a^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a+\sqrt{1+a^2})^{-2k} T_{2k}(x)$$

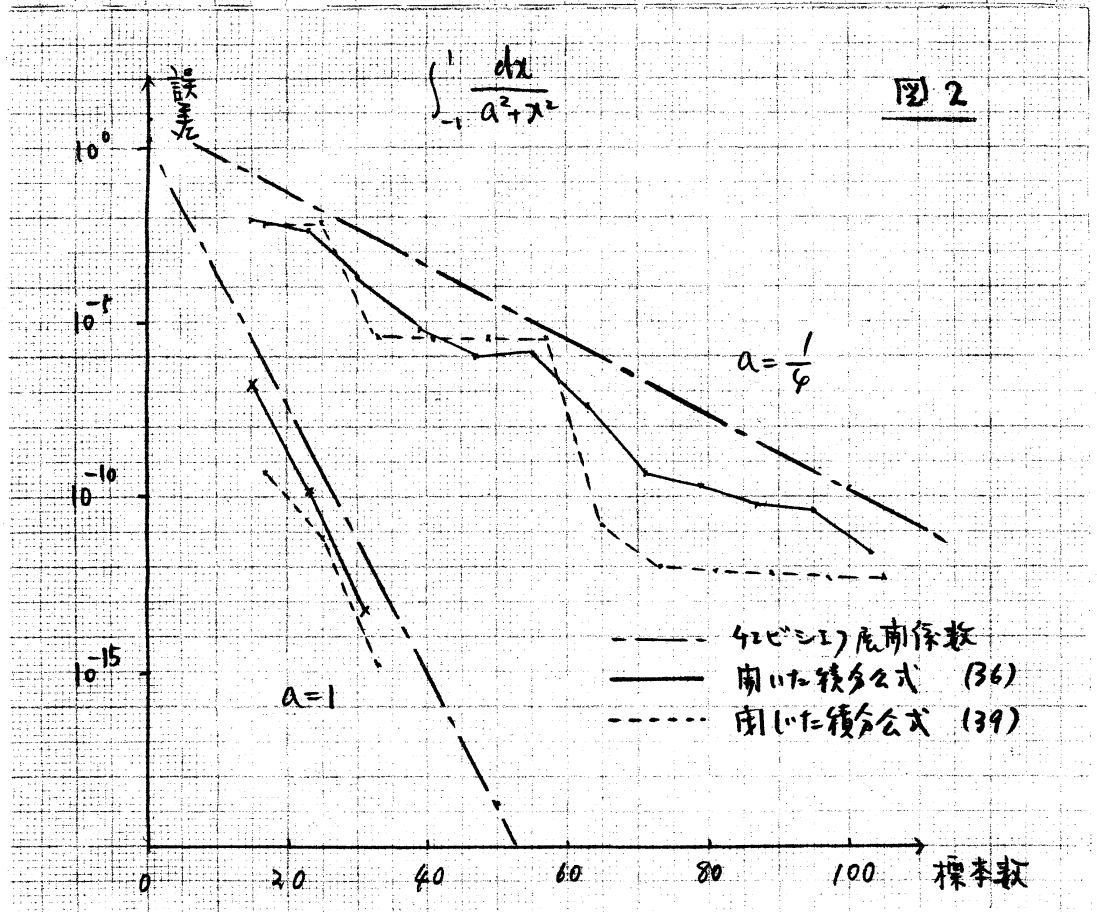
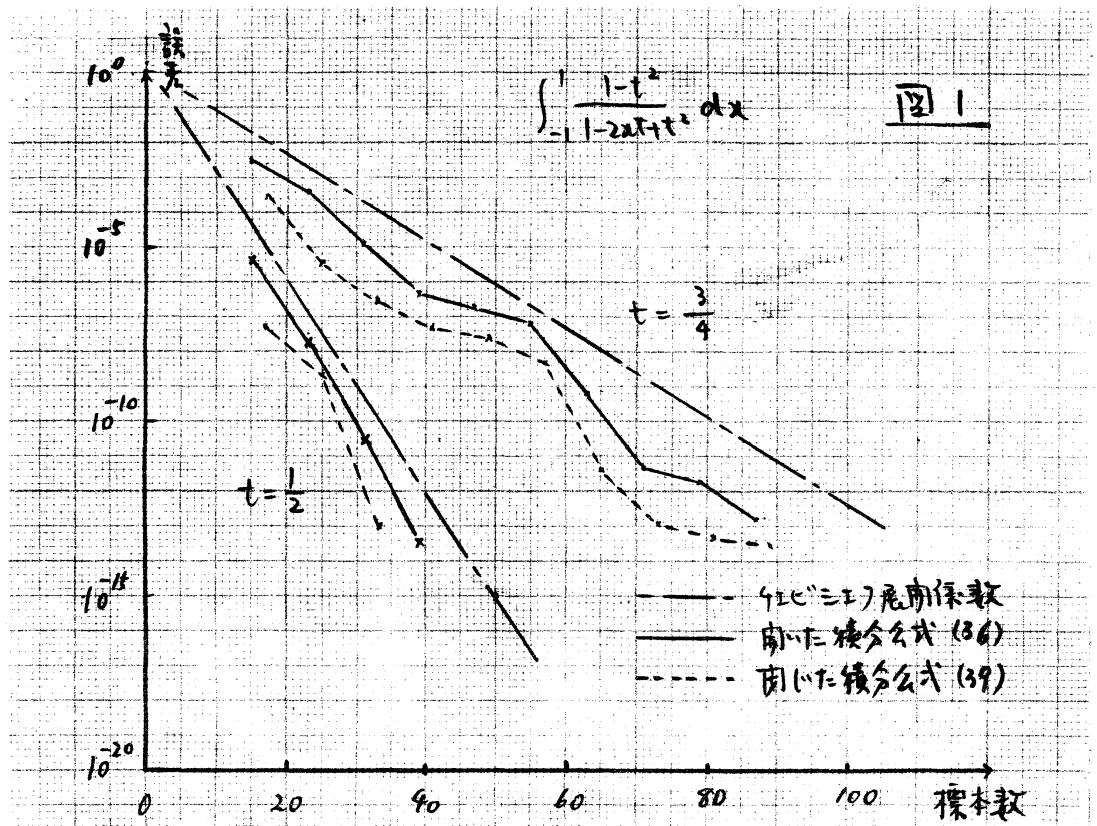
例 3
$$\int_{-1}^1 \cos ax = \frac{2}{a} \sin a$$

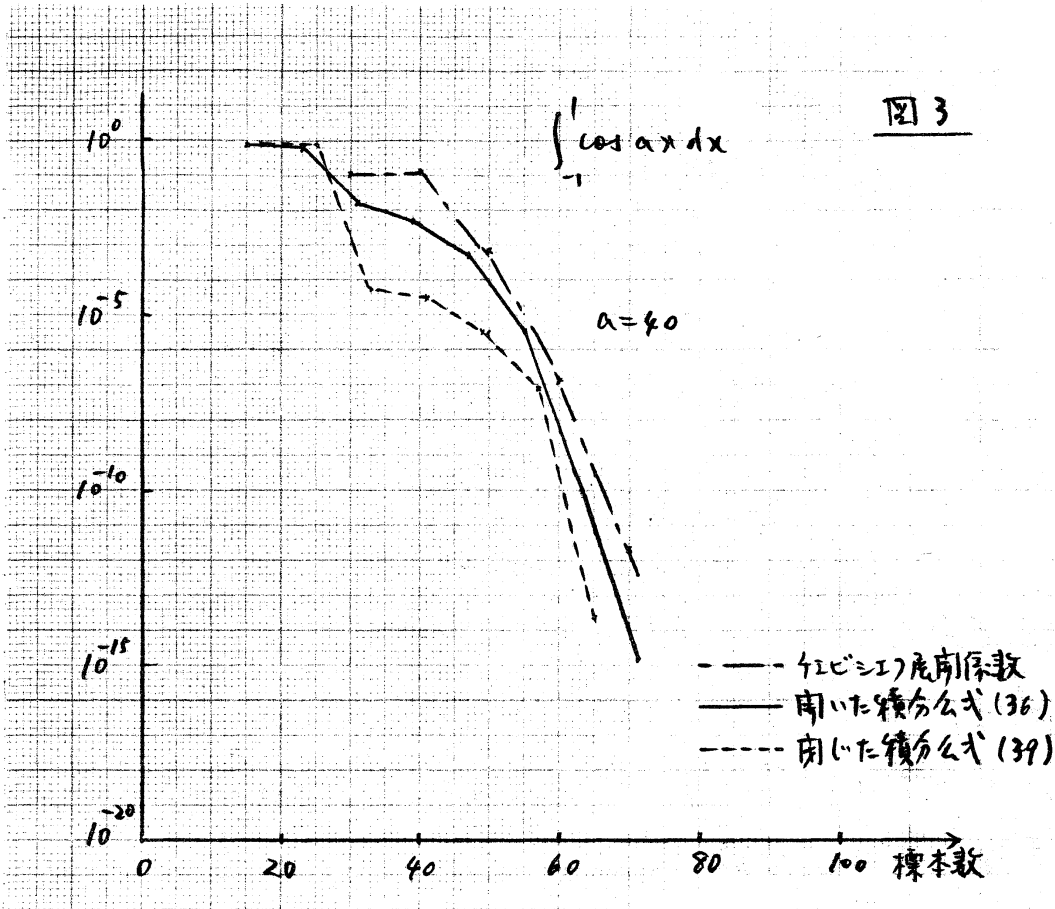
$$\cos ax = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(a) T_{2k}(x)$$

$J_{2k}(a)$ は $2k$ 次の第一種ベッセル関数。

これらの例は、被積分関数が実軸上に極をもつ有理式、実軸上で解析的な有理式および整関数の代表とみなして採用した。標本数の増加とともに、近似積分の誤差およびギビシエフ展南係数が減少してゆく状況を図1, 2, 3にそれぞれ示した。開いた積分公式(36)、閉いた積分公式(39)のそれぞれの誤差も、ギビシエフ展南係数より速く0に収束する。閉いた積分公式は、標本数が $2^l + 1$ のとき精度が急によくなる。

開いた積分公式は、標本数の増加とともに比較的ゆっくりと減少するが、 $2^l - 1$ を標本数が通過することによって突如目立って誤差は小さくなる。





参考文献

- 1) L. Kuiper & H. Niederreiter: Uniform distribution of Sequences, Chap. 2, John Wiley (1974).
- 2) 島田達生, 長谷川武夫, = 官字三: 等差数列的 n -標本数 ε 増補補間の自動積分法, 情報処理 (印刷中).